

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS  
CENTRO DE DESENVOLVIMENTO E PLANEJAMENTO REGIONAL

LUCIANO GONÇALVES DE CASTRO E SILVA

**PROJEÇÕES DOS NÍVEIS E PADRÕES DA  
MORTALIDADE NO BRASIL E GRANDES REGIÕES  
1950-2010-2110 PELO MÉTODO COERENTE LEE-  
CARTER ESTENDIDO E OUTROS: A TÁBUA BR-  
GERACIONAL E O RISCO DE LONGEVIDADE NAS  
INSTITUIÇÕES PREVIDENCIÁRIAS DO PAÍS**

Belo Horizonte  
UFMG/Cedeplar  
2019

LUCIANO GONÇALVES DE CASTRO E SILVA

**PROJEÇÕES DOS NÍVEIS E PADRÕES DA  
MORTALIDADE NO BRASIL E GRANDES REGIÕES  
1950-2010-2110 PELO MÉTODO COERENTE LEE-  
CARTER ESTENDIDO E OUTROS: A TÁBUA BR-  
GERACIONAL E O RISCO DE LONGEVIDADE NAS  
INSTITUIÇÕES PREVIDENCIÁRIAS DO PAÍS**

Tese apresentada ao curso de Demografia do Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional da Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do Título de Doutor em Demografia.

Orientador: Prof. Bernardo Lanza Queiroz

Belo Horizonte, MG  
Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional  
Faculdade de Ciências Econômicas - UFMG  
2019

## Ficha catalográfica

S586p  
2019

Silva, Luciano Gonçalves de Castro e.  
Projeções dos níveis e padrões da mortalidade no Brasil e grandes regiões 1950-2010-2110 pelo método coerente Lee-Carter estendido e outros [manuscrito]: a tábua Br-geracional e o risco de longevidade nas instituições previdenciárias do país. / Luciano Gonçalves de Castro e Silva – 2019.  
309 f.: il., gráfs. e tabs.

Orientador: Bernardo Lanza Queiroz.  
Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional.

Inclui bibliografia (f. 272-309).

1. Mortalidade – Brasil – Teses. 2. Expectativa de vida – Brasil – Teses. 3. Demografia – Teses. I. Queiroz, Bernardo Lanza. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional. III. Título.

CDD: 304.62







*Aos meus familiares e amigos*

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, pela saúde e paz necessárias para que todos os obstáculos pudessem ser transpassados.

Ao Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), instituição da qual muito me honra e orgulha ser pesquisador desde 31/03/2009, e a quem eu muito devo pela oportunidade ímpar de realizar o Doutorado em Demografia no Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional (CEDEPLAR/UFMG).

À minha família, muitíssimo obrigado pela compreensão, amor incondicional e carinho nessa jornada difícil, mas extremamente enriquecedora que passou. Como disse Albert Einstein: *“Lembre-se que as pessoas podem tirar tudo de você, menos o seu conhecimento”* e ainda *“Deus não nos fez perfeitos e não escolhe os capacitados, capacita os escolhidos”*.

Ao Professor Bernardo Lanza Queiroz, meu orientador, que muito me ajudou com o seu vasto conhecimento e orientações preciosas, sem as quais eu jamais teria conseguido atingir ao objetivo final do trabalho, mesmo ciente de todas as dificuldades e obstáculos que teriam que ser superados. Muito obrigado pela motivação, disponibilidade e por acreditar no meu projeto.

Aos membros da banca de defesa, Adrian Pablo Hinojosa Luna, Edviges Isabel Felizardo Coelho, José Alberto Magno de Carvalho, Marcos Roberto Gonzaga e Víctor Manuel García-Guerrero, e da banca de qualificação, Laura Lúcia Rodríguez Wong e Jeronimo Oliveira Muniz, agradeço muito por todas as críticas altamente construtivas feitas a este trabalho e pelas sugestões dadas, que foram fundamentais no seu aprimoramento.

Aos professores do Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional (CEDEPLAR/UFMG), pela minha formação em Demografia e todo o conhecimento enriquecedor adquirido ao longo do curso das disciplinas. Muito obrigado a todos!

Aos colegas da coorte 2015, pelos momentos enriquecedores, alegres e difíceis que passamos juntos. Foi muito bom conhecer todos vocês!

## SUMÁRIO

RESUMO .....	XII
ABSTRACT .....	XIV
LISTAS DE ILUSTRAÇÕES .....	XVI
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS .....	XXI
TABELA DE CÓDIGOS E SIGLAS DAS GRANDES REGIÕES E UNIDADES DA FEDERAÇÃO .....	XXIII
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO 2 - CONTEXTUALIZAÇÃO E RELEVÂNCIA .....	12
2.1) Queda da Mortalidade, Aumento na Longevidade, Limites Biológicos e Projeções ....	13
2.2) Métodos de Projeção: de Lee-Carter até os coerentes.....	15
2.3) A importância da Projeção Probabilística da Mortalidade.....	18
2.4) A Questão do Risco de Longevidade no Brasil e no Mundo .....	22
CAPÍTULO 3 - BASES DE DADOS, AJUSTES METODOLÓGICOS PRELIMINARES E A SUPERFÍCIE DE MORTALIDADE .....	29
3.1) Exposição ao Risco / Populações Base .....	29
3.1.1) População dos censos demográficos .....	30
3.1.2) Ajustes nos Dados Populacionais.....	31
3.2) Tábuas de Mortalidade do IBGE.....	34
3.2.1) Um breve histórico sobre as tábuas de mortalidade do IBGE.....	35
3.2.2) Aspectos metodológicos da construção das tábuas de mortalidade do IBGE.....	37
3.2.3) Comparação das Tábuas de Mortalidade do IBGE com aquelas construídas para o Brasil por Instituições Internacionais.....	46
3.3) Ajustes realizados nas Tábuas e Estimativas para 1950, 1960 e 1970.....	53
3.3.1) Estimativa das Tábuas de Mortalidade para os anos de 1950, 1960 e 1970, para o Brasil e Grandes Regiões .....	53
3.3.1.1) Ajuste logístico do nível da mortalidade ( $e_0$ ) para os anos de 1950, 1960 e 1970.....	53
3.3.1.2) Ajuste do padrão da mortalidade ( ${}_nM_x$ ) para os anos de 1950, 1960 e 1970.....	57
3.3.2) Método para a transformação de tábuas abreviadas em tábuas completas.....	58
3.3.3) Método utilizado para a extrapolação de tábuas de mortalidade do grupo aberto 80+ para o grupo aberto 100+.....	61
3.3.3.1) Ajuste pelo modelo de Kannisto .....	61
3.4) Tábuas Finais e a Superfície de Mortalidade .....	63
3.4.1) Tábuas Completas de 1950, 1960, 1970, 1980, 1991, 2000 e 2010 – grupo aberto 100+ 65	
3.4.2) Interpolação das $M_x$ 's para o período intercensitário.....	67
3.4.3) A Superfície de Mortalidade para o Brasil - 1950-2010 .....	68
CAPÍTULO 4 - TÁBUAS, MODELOS, LEIS E MÉTODOS DE PROJEÇÃO DA MORTALIDADE.....	72
4.1) Um Breve Histórico das Tábuas e Leis de Mortalidade.....	72

4.2)	Tipos de Modelo-Padrão de Mortalidade.....	75
4.2.1)	Representações Tabulares .....	75
4.2.2)	Modelos Relacionais .....	76
4.2.3)	Leis de Mortalidade.....	77
4.2.4)	Parametrização da mortalidade: Ajuste do modelo HP3.....	84
4.3)	Métodos para a projeção da mortalidade.....	86
4.3.1)	Métodos Expectativos ( <i>Expectation</i> ) .....	89
4.3.2)	Métodos Explicativos ( <i>Explanation</i> ).....	90
4.3.3)	Métodos Extrapolativos ( <i>Extrapolation</i> ).....	91
4.4)	Projeções com Leis de Mortalidade .....	93
4.5)	O método de Lee Carter, Variantes e Extensões .....	94
4.5.1)	Antecedentes na Aplicação do método de Lee-Carter com dados do Brasil.....	96
4.6)	Modelos Lineares Generalizados .....	98
4.7)	Modelos de Coorte .....	99
4.8)	Métodos de Projeção da Mortalidade: Independentes X Coerentes.....	102
4.8.1)	Métodos de Projeção Independente da Mortalidade .....	102
4.8.1.1)	Método de Lee-Carter (1992) - LC .....	102
4.8.1.2)	Método de Lee-Miller (2001) - LM .....	106
4.8.1.3)	Método de Booth, Maindonald & Smith (2002) - BMS .....	107
4.8.1.4)	Método de Brouhns, Denuit & Vermunt (2002) - BDV .....	109
4.8.1.5)	Método de Hyndman & Ullah (2007) – HU .....	111
4.8.1.6)	Método de Hyndman & Ullah (2007) Robust – HU <sup>rob</sup> .....	114
4.8.1.7)	Método de Hyndman & Shang (2009) – HU <sup>wei</sup> .....	114
4.8.2)	Métodos de Projeção Coerente da Mortalidade .....	117
4.8.2.1)	Método de Li & Lee (2005) – (Lee-Carter coerente).....	121
4.8.2.2)	Método de Li, Lee & Gerland (2013) – LC estendido (rotação).....	126
4.8.2.3)	Método de Hyndman, Booth & Yasmineen (2013) – coerente produto-razão (COE)...	131
4.9)	Testes realizados e abordagem metodológica final adotada .....	137
<b>CAPÍTULO 5 - RESULTADOS DA PROJEÇÃO DA MORTALIDADE PARA BR E GR'S ..</b>		<b>141</b>
5.1)	Sensibilidade dos métodos de Lee-Miller (LM) e coerente de Hyndman (COE) em relação ao período-base da projeção para o Brasil .....	141
5.1.1)	Diferenciais de Nível Geral ( $e_0$ ) da Mortalidade Projetada para o Brasil, em função do período-base.....	145
5.2)	Definição do período-base utilizado nas Projeções da Mortalidade para o Brasil .....	149
5.3)	Projeções da Mortalidade de Homens e Mulheres no Brasil pelo método de Lee-Miller e coerente de Hyndman – Características, Níveis e Padrões resultantes.....	155
5.3.1)	Projeção da Mortalidade pelo método de Lee-Miller (LM).....	155
5.3.2)	Projeção da Mortalidade pelo método coerente de Hyndman (COE).....	160
5.4)	Projeção da Mortalidade por diferentes metodologias para o Brasil .....	165

5.5) Diferenciais de Nível ( $e_0$ ) e Padrão da Mortalidade Projetada para o Brasil, por metodologia .....	169
5.6) Análise de Múltiplo-Decremento nas Tábuas Masculinas de 1991, 2000 e 2010, para a projeção da mortalidade no Brasil .....	173
5.7) Projeção da Mortalidade em dois estágios para o Brasil.....	181
5.7.1) Comparativo da $e_0$ projetada para o Brasil pelos métodos LM e COE X ONU, CELADE e IBGE 185	
5.8) Aplicação do método adotado para o Brasil, nas Grandes Regiões .....	187
5.8.1) Projeções da Mortalidade para a Região Norte .....	190
5.8.2) Projeções da Mortalidade para a Região Nordeste.....	192
5.8.3) Projeções da Mortalidade para a Região Sudeste.....	194
5.8.4) Projeções da Mortalidade para a Região Sul.....	196
5.8.5) Projeções da Mortalidade para a Região Centro-Oeste.....	198
5.8.6) Comparativo da $e_0$ projetada pelo método coerente de Hyndman para o Brasil e Grandes Regiões 200	
5.8.7) A busca pelo melhor método de projeção para países com altas taxas de mortalidade, como o Brasil.....	203
<b>CAPÍTULO 6 - O RISCO DE LONGEVIDADE .....</b>	<b>207</b>
6.1) Risco de Longevidade e a Reforma da Previdência no Brasil .....	209
6.2) Mortalidade de Período X Coorte: A construção das Tábuas Geracionais para o Brasil 212	
6.3) Quantificação do Risco de Longevidade no Brasil .....	219
6.3.1) Risco de Longevidade em relação à tábua base de 2010 .....	225
6.3.2) Risco de Longevidade nos Regimes Próprios de Previdência Social (RPPS) .....	228
6.3.3) Risco de Longevidade nas Entidades Fechadas (EFPC) e Abertas (EAPC) de Previdência Complementar .....	232
6.3.4) Risco de Longevidade na Previdência Complementar do Servidor Público Federal - FUNPRESP .....	248
6.3.5) Exposição das Instituições Previdenciárias Brasileiras ao Risco de Longevidade .....	252
6.4) Simulação Atuarial com a Tábua BR-Generacional e o Impacto do Risco de Longevidade para uma massa de segurados .....	253
6.4.1) Premissas atuariais utilizadas nas simulações com a Tábua IBGE 2016 X Tábua BR-Generacional.....	254
6.4.2) Resultados da simulação atuarial em relação ao Impacto do Risco de Longevidade .	255
6.5) Considerações sobre o Risco de Longevidade no Brasil.....	261
<b>CAPÍTULO 7 - DISCUSSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>265</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>272</b>

## RESUMO

### ANTECEDENTES

O século XX registrou melhorias significativas nas taxas de mortalidade. Nos últimos anos o rápido envelhecimento populacional tem se mostrado um fenômeno global que traz profundas implicações não apenas para as sociedades como também para os governos. Em muitos países desenvolvidos, as preocupações se concentram nos cuidados com a saúde dos indivíduos com idades mais avançadas e na sustentabilidade dos Sistemas de Aposentadorias e Pensões, fazendo emergir o termo cunhado como Risco de Longevidade. Nesse contexto, as projeções da mortalidade são ferramentas fundamentais para a estimativa da expectativa de sobrevivência de homens e mulheres ao longo dos anos futuros. Nas últimas décadas, os métodos de projeção da mortalidade passaram por melhorias substanciais, cujo divisor de águas foi o trabalho seminal desenvolvido por Lee-Carter. Tal como ocorre nos outros países em desenvolvimento no mundo, o Brasil não possui longas séries temporais de curvas de mortalidade, o que dificulta e muito a aplicação dos métodos mais modernos de projeção estocástica.

### OBJETIVOS

O presente trabalho possui três objetivos principais: 1) construir uma longa série temporal de curvas de mortalidade desde de 1950, com base nas tábuas do IBGE de 1980, 1991, 2000 e 2010, para o Brasil e suas cinco Grandes Regiões; 2) apresentar uma discussão metodológica e de resultados, utilizando diferentes métodos de projeção da mortalidade para o contexto brasileiro, num horizonte de projeção de 100 anos até 2110; e 3) a partir das tábuas projetadas, construir uma tábua geracional para o Brasil, a ser utilizada para mensurar o Impacto do Risco de Longevidade em seus diversos segmentos previdenciários.

### MÉTODOS

Para a construção da série temporal das curvas de mortalidade, o nível dado pela expectativa de vida ao nascer ( $e_0$ ) foi retroprojetado para 1950, 1960 e 1970 considerando uma regressão logística com base nas tábuas abreviadas de 1980, 1991, 2000 e 2010 do IBGE, sendo o padrão de 1980 ajustado ao nível estimado nesses três primeiros pontos. Essas sete tábuas abreviadas foram transformadas em tábuas completas, sendo então extrapoladas do grupo aberto 80+ para 100+, pelo modelo de Kannisto. Na sequência, foi realizada uma interpolação log-linear das taxas ( $M_x$ 's) considerando sete pontos-base, resultando numa superfície de mortalidade para o período 1950-2010. A partir da superfície de mortalidade construída foram testadas nove metodologias diferentes de projeção estocástica, dentro da linha proposta por Lee-Carter, sendo sete métodos independentes e dois coerentes. Definido o método de projeção da mortalidade mais adequado para o Brasil, foi construída a tábua batizada de BR-Geracional considerando a mortalidade projetada, introduzindo a perspectiva de sobrevivência futura de coorte, cujo Impacto do Risco de Longevidade nos diversos segmentos previdenciários foi mensurado em função da razão entre as anuidades atuariais calculadas com a tábua geracional e aquela de determinada tábua de período por segmento previdenciário (*benchmark*).

### RESULTADOS

Em relação às projeções da mortalidade, depois de vários exercícios metodológicos conduzidos para o Brasil considerando as superfícies de mortalidade de 1950-2010, foi adotada a técnica da projeção em dois estágios. No 1º estágio a  $e_0$  foi projetada pelo método coerente de Hyndman (produto-razão) e no 2º estágio as  $M_x$ 's foram projetadas pelo método coerente de Li, Lee & Gerland (Lee-Carter estendido), resultando em  $e_0$ 's equivalentes àquelas do 1º estágio. Como esses métodos

apresentam resultados coerentes em uma dimensão apenas, optou-se pela coerência entre sexos. Depois dos ajustes finais executados, a  $e_0$  no Brasil em 2110 foi estimada em 88,26 anos para os homens e 90,94 anos para as mulheres, com IC de 95%. As projeções da mortalidade realizadas para as Grandes Regiões também se mostraram consistentes no longo prazo, exceto para a Região Centro-Oeste, por conta da limitação referente à unidimensionalidade dos métodos coerentes. Em relação ao Impacto do Risco de Longevidade, calculado em função da tábua BR-Geracional construída, foi observado, em linhas gerais, que o mesmo é: 1) inversamente proporcional à idade do segurado, 2) maior para os homens do que para as mulheres, 3) diretamente proporcional à idade de entrada em gozo de benefício e 4) inversamente proporcional à taxa de juros. Considerando uma escala arbitrária criada, ficou definido que os RPPS's estariam muito expostos, as EFPC's e o FUNPRESP estariam expostos, e as EAPC's estariam pouco ou não expostas ao Risco de Longevidade, mas apenas no caso de utilização das tábuas construídas com base na sobrevivência do mercado segurador brasileiro. A simulação atuarial realizada na parte final do trabalho com base em informações fictícias de mais de 15.000 segurados, entre ativos, aposentados e pensionistas, apontou para um Risco de Longevidade da ordem de 13,88%.

## CONCLUSÃO

Apesar de todas as limitações existentes no país, tanto para a construção da longa série temporal de  $M_x$ 's que deu origem à superfície histórica de mortalidade construída, como para a aplicação dos diferentes métodos de projeção estocástica aqui testados, os resultados das projeções em dois estágios mostraram-se bem satisfatórios para o Brasil e praticamente todas as Grandes Regiões, tendo sido não-divergentes e factíveis, para homens e mulheres, mesmo no longo horizonte de 100 anos de projeção adotado. Apesar dos bons resultados obtidos, é fundamental que seja criada uma nova metodologia que forneça resultados coerentes em várias dimensões. No delicado cenário de iminente Reforma Previdenciária em que se encontra o país, os resultados aqui obtidos em função da tábua BR-Geracional demonstram que o Impacto do Risco de Longevidade, apesar de diferenciado em função do segmento previdenciário específico, deverá obrigatoriamente ser considerado no novo arcabouço legal que surgirá num futuro bem próximo, não podendo jamais ser negligenciado.

## CONTRIBUIÇÃO

Entende-se que as principais contribuições dos trabalhos aqui executados foram: 1) as longas séries temporais de 61 anos de  $M_x$ 's construídas para o Brasil e Grandes Regiões no período 1950-2010, e que deram origem às superfícies de mortalidade criadas, por sexo e total da população, até então inexistentes em virtude da ausência das informações de óbitos por idade antes do ano de 1974; 2) mostrar que é possível utilizar, mesmo em um país em desenvolvimento como o Brasil, métodos de projeção da mortalidade dentro da linha proposta originalmente por Lee-Carter, que possuem inúmeras vantagens quando comparados com os métodos tradicionais de *targeting* utilizados pelo órgão oficial das estatísticas no país, o IBGE, dentre elas a possibilidade de obtenção de intervalos de confiança para a mortalidade projetada e uma menor dependência da *expert opinion*, que possui diversos graus de subjetividade; e 3) a tábua BR-Geracional, construída com base nas projeções da mortalidade, que poderá inclusive ser utilizada pelas entidades previdenciárias brasileiras em seus cálculos atuariais como referência, e que resultou na estimativa para o Impacto do Risco de Longevidade nessas instituições, por segmento específico.

---

**PALAVRAS-CHAVE:** Projeção da Mortalidade, método de Lee-Carter, Risco de Longevidade, Tábuas de Vida Geracionais, *Improvement*, Expectativa de Vida, Projeções Coerentes.

## ABSTRACT

### BACKGROUND

The twentieth century recorded significant improvements in mortality rates. Rapid population aging in recent years has been a global phenomenon that has profound implications not only for societies but also for governments. In many developed countries, concerns are focused on the health care of older individuals and on the sustainability of the Pension Systems, leading to the emergence of the term coined as Longevity Risk. In this context, mortality projections are fundamental tools for estimation of the survival expectancy of men and women over the years in the future. In the last decades, methods of mortality projection have undergone substantial improvements, whose watershed was the seminal work developed by Lee-Carter. As other developing countries in the world, Brazil does not have long time series of mortality curves, which makes it difficult to apply the modern methods of stochastic projection.

### OBJECTIVES

The present work has three main objectives: 1) to construct a long time series of mortality curves from 1950, based on the IBGE tables of 1980, 1991, 2000 and 2010, for Brazil and its five Major Regions; 2) to present a methodological and results discussion using different methods of mortality projection for the Brazilian context, within a projection horizon of 100 years until 2110; and 3) from the projected tables, to construct a generation life table for Brazil, to be used to measure the impact of the longevity risk in its various Pension System segments.

### METHODS

For the construction of the time series of mortality curves, the level given by life expectancy at birth ( $e_0$ ) was inverse projected to 1950, 1960 and 1970, based on a logistic regression with IBGE's 1980, 1991, 2000 and 2010 abridged life tables, and the age schedule (pattern) of 1980 has been adjusted to the estimated level in these three first points. These seven abbreviated tables were transformed into complete ones, and then extrapolated from the open interval 80+ to 100+, by the Kannisto model. In the sequence, a log-linear interpolation of the mortality rates ( $M_x$ 's) was performed from these seven base points, resulting in a mortality surface for the period 1950-2010. With this constructed mortality surface, nine different stochastic mortality projection methodologies were tested, within the approach proposed by Lee-Carter (seven independent methods and two coherent methods). Once defined the most adequate method for Brazil, the table named BR-Generation was constructed based on the projected mortality, introducing the perspective of future cohort survival, whose impact of the longevity risk in Pension System segments was measured by the ratio between actuarial annuities calculated with the generation life table and those of a specific segment, by its benchmark period life table.

### RESULTS

With regard to Mortality Projections, after several methodological exercises conducted for Brazil, from the mortality surfaces of 1950-2010, the technique of projection in two stages was adopted. In the 1<sup>st</sup> stage the  $e_0$ 's were estimated by the Coherent Method of Hyndman (Product-Ratio) and in the 2<sup>nd</sup> stage the  $M_x$ 's were estimated by the Coherent Method of Li, Lee & Gerland (Extended Lee-Carter), resulting in equivalent  $e_0$ 's of the 1<sup>st</sup> stage. As these methods present

consistent results in one dimension only, gender coherence was chosen. After the final adjustments were made,  $e_0$  in Brazil in 2110 was estimated at 88.26 years for men and 90.94 years for women, with 95% confidence intervals. Mortality projections for the Major Regions were also consistent in the long run, except for the Midwest Region, due to the limitation concerning one-dimension of the coherent methods. With respect to the impact of the longevity risk calculated from the BR-Generation table constructed, it was observed that: 1) it's inversely proportional to the age of the individual, 2) it's greater for men than for women, 3) it's directly proportional to the age of retirement and 4) it's inversely proportional to the interest rate. From an arbitrary scale created, it was defined that the RPPS's would be very exposed, the EFPC's and the FUNPRESP would be exposed, and the EAPC's would be little or not exposed to longevity risk, but just in the case of adoption of mortality tables based on the survival of the Brazilian insurance market. The actuarial simulation carried out in the final part of the study based on fictitious information of more than 15,000 insured lives among working age individuals, retirees and pensioners, pointed out to a longevity risk of 13.88%.

## CONCLUSION

In spite of all limitations existing in the country, both for the construction of long time series of  $M_x$ 's that gave origin to the historical surface constructed and for the application of different methods of stochastic mortality projection tested here, the results of the projections in two stages have been satisfactory for Brazil and almost all it's Great Regions, having been non-divergent and feasible, for men and women, even over the long horizon of 100 years of projection adopted. Despite the good results obtained, it is fundamental that a new methodology be created, to provide coherent results in several dimensions. In the delicate scenario of impending Pension System reform, like the Brazilian one, the results obtained here from the BR-Generation life table demonstrate that the impact of Longevity Risk, although differentiated according to the specific Pension System segment, must be considered in the new legal framework that will emerge in a very near future and must not be neglected.

## CONTRIBUTION

It is understood that the main contributions of the work carried out here were: 1) the long time series of 61 years of  $M_x$ 's built for Brazil and it's Major Regions in the period 1950-2010, information that gave rise to the mortality surfaces created, until then absent due to lack of information on deaths by age before 1974; 2) to show that it is possible to use, even in a developing country like Brazil, methods of mortality projection inside the framework proposed by Lee-Carter, that have numerous advantages when compared with the traditional methods of targeting used by the official statistics agency in the country, the IBGE, among them, the possibility of obtaining confidence intervals for projected mortality and less dependence on expert opinion, which has different degrees of subjectivity; and 3) the BR-Generation life table constructed from mortality projections, which may even be used by the Brazilian Social Security market in their actuarial reports as a reference, and which resulted in the estimation of the impact of longevity risk on these entities, by specific segment.

---

**KEYWORDS:** Mortality Forecast, Lee-Carter Method, Longevity Risk, Generation Life Tables, Improvement, Life Expectancy, Coherent Forecast.

## LISTAS DE ILUSTRAÇÕES

### LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros ajustados da Função Logística – BR e GR´s – Homem e Mulher .....	55
Tabela 2 – Brasil e Grandes Regiões – Expectativa de Vida ao Nascer Ajustada (1950, 1960 e 1970) e Observada (1980, 1991, 2000 e 2010) – Homem e Mulher .....	57
Tabela 3 – Brasil e Grandes Regiões – Fatores de Ajuste do padrão 1980 ao nível $e_0$ de 1950, 1960 e 1970 – Homem e Mulher .....	58
Tabela 4 – Parâmetros do modelo de Kannisto 1950, 1960, 1970, 1980, 1991, 2000 e 2010 – BR e GR´s – Ambos os sexos.....	63
Tabela 5 – Brasil – $e_0$ s projetadas por sexo para 2050 em função do método e período-base....	147
Tabela 6 – Proporção da Variabilidade dos dados explicada – modelo LM .....	155
Tabela 7 – Pessoas mais longevas em toda a história da humanidade .....	159
Tabela 8 – Proporção da Variabilidade dos dados explicada por componente principal – Funções Produto e Razão – modelo COE.....	160
Tabela 9 – Brasil – $e_0$ s projetadas para 2110 por diversos métodos – Homem e Mulher.....	169
Tabela 10 – Estatísticas da Base de Dados fictícia utilizada na Simulação Atuarial .....	256

### LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Principais Leis de Mortalidade criadas ao Longo da História.....	80
Quadro 2 – Métodos de projeção da Mortalidade, pacote do R utilizado e Autores .....	137
Quadro 3 – N° Sobreviventes Tábua Estática (Período) X Tábua Geracional (Coorte).....	214
Quadro 4 – Tábua Benchmark utilizada por Segmento Previdenciário brasileiro .....	221
Quadro 5 – Premissas Atuariais utilizadas na Simulação .....	254
Quadro 6 – Impacto do Risco de Longevidade no Custo Normal do Plano de Benefícios .....	258
Quadro 7 – Impacto do Risco de Longevidade nas Reservas Matemáticas do Plano de Benefícios .....	260

### LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação da Evolução da Reserva Matemática e do Equilíbrio Financeiro e Atuarial (EFA).....	259
---	-----

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Brasil – Pirâmides Populacionais Ajustadas Sobrepostas – 1950-2010.....	34
Gráfico 2 – Brasil – Taxas Centrais de Mortalidade ( ${}_nM_x$ 's – escala ln) – Homem.....	36
Gráfico 3 – Brasil – Taxas Centrais de Mortalidade ( ${}_nM_x$ 's – escala ln) – Mulher.....	36
Gráfico 4 – Brasil – Carga de Doenças – Ambos os Sexos, Todas as Idades, 2016, Mortes.....	48
Gráfico 5 – Brasil – Taxas Centrais de Mortalidade ( $M_x$ 's – escala ln) – Homem.....	66
Gráfico 6 – Brasil – Taxas Centrais de Mortalidade ( $M_x$ 's – escala ln) – Mulher.....	66
Gráfico 7 – Brasil – $M_x$ 's interpoladas (2D) – Homem – 1950-2010.....	67
Gráfico 8 – Brasil – $M_x$ 's interpoladas (2D) – Mulher – 1950-2010.....	67
Gráfico 9 – Brasil – $M_x$ 's interpoladas (2D) – Ambos – 1950-2010.....	68
Gráfico 10 – Brasil – Superfície de Mortalidade (3D) – Homem – 1950-2010.....	69
Gráfico 11 – Brasil – Superfície de Mortalidade (3D) – Mulher – 1950-2010.....	70
Gráfico 12 – Brasil – Superfície de Mortalidade (3D) – Ambos – 1950-2010.....	70
Gráfico 13 – Linha do Tempo das Leis de Mortalidade.....	83
Gráfico 14 – Brasil – $M_x$ 's – Valores Observados X Ajustados HP3 – 2010 – Homem.....	84
Gráfico 15 – Brasil – $M_x$ 's – Valores Observados X Ajustados HP3 – 2010 – Mulher.....	85
Gráfico 16 – Brasil – $M_x$ 's – Valores Observados X Ajustados HP3 – 2010 – Ambos.....	85
Gráfico 17 – Brasil – $M_x$ 's Proj. X Obs. – Ano 2000 – método LM – Período 1950-1990 – H e M.....	143
Gráfico 18 – Brasil – $M_x$ 's Proj. X Obs. – Ano 2010 – método LM – Período 1950-1990 – H e M.....	143
Gráfico 19 – Brasil – $M_x$ 's Proj. X Obs. – Ano 2000 – método COE – Período 1950-1990 – H e M.....	144
Gráfico 20 – Brasil – $M_x$ 's Proj. X Obs. – Ano 2010 – método COE – Período 1950-1990 – H e M.....	144
Gráfico 21 – Brasil – $e_0$ 's Projetadas – métodos LM e COE – Vários Períodos Base – Homem.....	148
Gráfico 22 – Brasil – $e_0$ 's Projetadas – métodos LM e COE – Vários Períodos Base – Mulher.....	148
Gráfico 23 – Brasil – $M_x$ 's Projetadas método Lee-Miller – Homem.....	158
Gráfico 24 – Brasil – $M_x$ 's Projetadas método Lee-Miller – Mulher.....	158
Gráfico 25 – Brasil – $e_0$ 's Projetadas IC95 – método coerente Hyndman – Homem e Mulher.....	161
Gráfico 26 – Brasil – $M_x$ 's Projetadas método coerente Hyndman – Homem.....	162
Gráfico 27 – Brasil – $M_x$ 's Projetadas método coerente Hyndman – Mulher.....	162
Gráfico 28 – Brasil – $e_0$ 's Obs. 1950-2010 e Proj. 2011-2110 – Diversas Metodologias – Homem.....	170
Gráfico 29 – Brasil – $e_0$ 's Obs. 1950-2010 e Proj. 2011-2110 – Diversas Metodologias – Mulher.....	170
Gráfico 30 – Brasil – $M_x$ 's Masculinas com e sem decremento de Causas Externas – 1991.....	178
Gráfico 31 – Brasil – $M_x$ 's Masculinas com e sem decremento de Causas Externas – 2000.....	178
Gráfico 32 – Brasil – $M_x$ 's Masculinas com e sem decremento de Causas Externas – 2010.....	179
Gráfico 33 – Brasil – ${}_nM_x$ 's Proj. método coerente de Li, Lee, & Gerland (2013) – Homem.....	183
Gráfico 34 – Brasil – ${}_nM_x$ 's Proj. método coerente de Li, Lee, & Gerland (2013) – Mulher.....	184
Gráfico 35 – Brasil – ${}_nM_x$ 's Proj. método coerente de Li, Lee, & Gerland (2013) – Ambos.....	184
Gráfico 36 – Brasil – $e_0$ 's Obs. e Proj. LM e COE X IBGE, CELADE e WPP – Homem.....	186
Gráfico 37 – Brasil – $e_0$ 's Obs. e Proj. LM e COE X IBGE, CELADE e WPP – Mulher.....	186
Gráfico 38 – Taxas Centrais de Mortalidade ( $M_x$ 's) – Brasil e Grandes Regiões – 2010 – Homem.....	187

Gráfico 39 – Taxas Centrais de Mortalidade ( $M_x$ 's) – Brasil e Grandes Regiões – 2010 – Mulher .....	188
Gráfico 40 – Evolução do GAP entre a $e_0$ 's de mulheres e homens – BR e GR's – 1950-2010-2110 .....	189
Gráfico 41 – Região Norte – $e_0$ 's Proj. IC95 – método coerente Hyndman – Homem e Mulher	190
Gráfico 42 – Região Norte – ${}_nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Homem.....	190
Gráfico 43 – Região Norte – ${}_nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Mulher .....	191
Gráfico 44 – Região Norte – ${}_nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Ambos .....	191
Gráfico 45 – Região Nordeste – $e_0$ 's Proj. IC95 – método coerente Hyndman – Homem e Mulher .....	192
Gráfico 46 – Região Nordeste – ${}_nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Homem....	192
Gráfico 47 – Região Nordeste – ${}_nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Mulher....	193
Gráfico 48 – Região Nordeste – ${}_nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Ambos....	193
Gráfico 49 – Região Sudeste – $e_0$ 's Proj. IC95 - método coerente Hyndman – Homem e Mulher .....	194
Gráfico 50 – Região Sudeste – ${}_nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Homem.....	194
Gráfico 51 – Região Sudeste – ${}_nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Mulher.....	195
Gráfico 52 – Região Sudeste – ${}_nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Ambos .....	195
Gráfico 53 – Região Sul – $e_0$ 's Proj. IC95 - método coerente Hyndman – Homem e Mulher....	196
Gráfico 54 – Região Sul – ${}_nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Homem.....	196
Gráfico 55 – Região Sul – ${}_nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Mulher.....	197
Gráfico 56 – Região Sul – ${}_nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Ambos .....	197
Gráfico 57 – Região Centro-Oeste – $e_0$ 's Proj. IC95 – método Coer. Hyndman – Homem e Mulher .....	198
Gráfico 58 – Região Centro-Oeste – ${}_nM_x$ 's Proj. método Li, Lee, & Gerland (2013) – Homem.	198
Gráfico 59 – Região Centro-Oeste – ${}_nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Mulher .....	199
Gráfico 60 – Região Centro-Oeste – ${}_nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Ambos .....	199
Gráfico 61 – Brasil e Grandes Regiões – $e_0$ 's Obs. 1950-2010 e Proj. 2011-2110 – Homem .....	202
Gráfico 62 – Brasil e Grandes Regiões – $e_0$ 's Obs. 1950-2010 e Proj. 2011-2110 – Mulher .....	202
Gráfico 63 – $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua IBGE-2010 .....	217
Gráfico 64 – Razão $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua IBGE-2010 .....	217
Gráfico 65 – $IRL_x$ – benchmark Tábua IBGE-2010, taxa de juros de 6% a.a., BC 60 anos .....	226
Gráfico 66 – $IRL_x$ – benchmark Tábua IBGE-2010, taxa de juros de 6% a.a., BC 65 anos .....	226
Gráfico 67 – $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua IBGE-2016.....	229
Gráfico 68 – Razão $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua IBGE-2016.....	229
Gráfico 69 – $IRL_x$ – benchmark Tábua IBGE-2016, taxa de juros de 6% a.a., BC 60 anos .....	230
Gráfico 70 – $IRL_x$ – benchmark Tábua IBGE-2016, taxa de juros de 6% a.a., BC 65 anos .....	230
Gráfico 71 – $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua AT-83 .....	233
Gráfico 72 – Razão $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua AT-83 .....	233
Gráfico 73 – $IRL_x$ – benchmark Tábua AT-83, taxa de juros de 6% a.a., BC 60 anos .....	234
Gráfico 74 – $IRL_x$ – benchmark Tábua AT-83, taxa de juros de 6% a.a., BC 65 anos .....	234
Gráfico 75 – $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua AT-2000.....	237
Gráfico 76 – Razão $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua AT-2000 .....	237
Gráfico 77 – $IRL_x$ – benchmark Tábua AT-2000, taxa de juros de 6% a.a., BC 60 anos .....	238
Gráfico 78 – $IRL_x$ – benchmark Tábua AT-2000, taxa de juros de 6% a.a., BC 65 anos .....	238
Gráfico 79 – $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua BR-EMS-sb-2010.....	241
Gráfico 80 – Razão $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua BR-EMS-sb-2010.....	241

Gráfico 81 – $IRL_x$ – benchmark Tábua BR-EMS-sb-2010, taxa de juros de 6% a.a., BC 60 anos .....	242
Gráfico 82 – $IRL_x$ – benchmark Tábua BR-EMS-sb-2010, taxa de juros de 6% a.a., BC 65 anos .....	242
Gráfico 83 – $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua BR-EMS-sb-2015.....	245
Gráfico 84 – Razão $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua BR-EMS-sb-2015.....	245
Gráfico 85 – $IRL_x$ – benchmark Tábua EMS-sb-2015, taxa de juros de 6% a.a., BC 60 anos ....	246
Gráfico 86 – $IRL_x$ – benchmark Tábua EMS-sb-2015, taxa de juros de 6% a.a., BC 65 anos ....	246
Gráfico 87 – $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua RP-2000 proj. escala AA p/ 2019 .....	249
Gráfico 88 – Razão $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua RP-2000 proj. escala AA p/ 2019 ...	249
Gráfico 89 – $IRL_x$ – benchmark Tábua RP-2000 proj. escala AA p/ 2019, tx. juros de 6% a.a., BC 60 anos.....	250
Gráfico 90 – $IRL_x$ – benchmark Tábua RP-2000 proj. escala AA p/ 2019, tx. juros de 6% a.a., BC 65 anos.....	250
Gráfico 91 – Pirâmide Populacional da base de dados fictícia utilizada na Simulação Atuarial .	257

## LISTA DE PAINÉIS DE GRÁFICOS

Painel 1 – Brasil – Comparativo $\ln(nM_x)$ 's – Homem e Mulher – IBGE X ONU, CELADE e IHME .....	52
Painel 2 – Brasil e Grandes Regiões – Ajuste Logístico $e_0$ 's – Homem e Mulher – 1980, 1991, 2000 e 2010 .....	56
Painel 3 – Brasil – $M_x$ 's Proj. Homem – Períodos: 1950-2010 e 1980-2010 – Diversas Metodologias .....	151
Painel 4 – Brasil – $M_x$ 's Proj. Mulher – Períodos: 1950-2010 e 1980-2010 – Diversas Metodologias .....	153
Painel 5 – Brasil – Resultados método LM – Homem e Mulher.....	157
Painel 6 – Brasil – Resultados método COE – Função Produto.....	163
Painel 7 – Brasil – Resultados método COE – Função Razão .....	164
Painel 8 – Brasil – $e_0$ 's Observadas e Projetadas – Diversas Metodologias.....	166
Painel 9 – Brasil – $M_x$ 's Observadas e Projetadas – Diversas Metodologias.....	167
Painel 10 – Brasil – $M_x$ Projetadas para um ano específico – Diversas Metodologias .....	172
Painel 11 – Brasil – Distrib. Óbitos Causas Externas – Triênios 90-91-92 / 99-00-01 / 09-10-11 .....	175
Painel 12 – Brasil – Pirâmides dos Óbitos p/ Causas Externas – Triênios 90-91-92 / 99-00-01 / 09-10-11.....	176
Painel 13 – Brasil – $M_x$ 's Homem Obs. 1980 e Obs. e Ajust. 1991, 2000 e 2010 por Múltiplo-Decremento .....	180
Painel 14 – Brasil – $M_x$ 's Homem Obs. c/ Múltiplo-Decremento e Proj. pelo método de Hyndman .....	180
Painel 15 – $l_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua IBGE-2010 .....	218
Painel 16 – Impacto do Risco de Longevidade em função da taxa de juros com benchmark na Tábua IBGE-2010 – Homem, Mulher e Ambos os Sexos .....	227
Painel 17 – Impacto do Risco de Longevidade em função da taxa de juros com benchmark na Tábua IBGE-2016 – Homem, Mulher e Ambos os Sexos .....	231

Painel 18 – Impacto do Risco de Longevidade em função da taxa de juros com benchmark na Tábua AT-83 – Homem, Mulher e Ambos os Sexos .....	235
Painel 19 – Impacto do Risco de Longevidade em função da taxa de juros com benchmark na Tábua AT-2000 – Homem, Mulher e Ambos os Sexos .....	239
Painel 20 – Impacto do Risco de Longevidade em função da taxa de juros com benchmark na Tábua BR-EMS-sb-2010 – Homem, Mulher e Ambos os Sexos .....	243
Painel 21 – Impacto do Risco de Longevidade em função da taxa de juros com benchmark na Tábua EMS-sb-2015 – Homem, Mulher e Ambos os Sexos.....	247
Painel 22 – Impacto do Risco de Longevidade em função da taxa de juros com benchmark na Tábua RP-2000 proj. escala AA p/ 2019 – Homem, Mulher e Ambos os Sexos.....	251

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- ARIMA – *Autorregressive Integrated Moving Average*  
 AVAT – Avaliação Atuarial  
 BDV – método de Brouhns, Denuit & Vermunt  
 BMS – método de Booth, Maindonald & Smith  
 CD – censo demográfico  
 CELADE – Centro Latinoamericano e Caribenho de Demografia  
 CNSP – Conselho Nacional de Seguros Privados  
 COE – método coerente produto-razão de Hyndman  
 DATASUS – Departamento de Informática do Sistema Único de Saúde  
 DHS – *Demographic and Health Survey*  
 EAPC – Entidade Aberta de Previdência Complementar  
 EFA – Equilíbrio Financeiro e Atuarial  
 EFPC – Entidade Fechada de Previdência Complementar  
 $e_x$  – expectativa ou esperança de vida na idade  $x$   
 $e_0$  – expectativa ou esperança de vida ao nascer  
 FUNPRESP - Fundação de Previdência Complementar do Servidor Público Federal  
 GR – Grande Região  
 HMD – *Human Mortality Database*  
 HU – método de Hyndman & Ullah  
 $HU^{rob}$  – método de Hyndman & Ullah robusto  
 $HU^{wei}$  – método de Hyndman & Shang (HU ponderado)  
 IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística  
 IC – Intervalo de Confiança  
 IHME – *Institute for Health Metrics and Evaluation*  
 IRL – Impacto do Risco de Longevidade  
 IUSSP – *International Union for the Scientific Study of Population*  
 LC – método de Lee & Carter  
 LM – método de Lee & Miller  
 MLG – Modelos Lineares Generalizados  
 MQO – Mínimos Quadrados Ordinários  
 MS – Ministério da Saúde  
 ${}_nM_x$  ou  ${}_nm_x$  – Taxa Específica / Taxa Central de Mortalidade entre as idades  $x$  e  $x+n$   
 $M_x$  ou  $m_x$  – Taxa Específica / Taxa Central de Mortalidade entre as idades  $x$  e  $x+1$   
 NTA – Nota Técnica Atuarial  
 OLS – *Ordinary Least Squares*  
 ${}_nq_x$  – probabilidade de morte entre as idades  $x$  e  $x+n$   
 $q_x$  – probabilidade de morte entre as idades  $x$  e  $x+1$   
 ${}_1q_0$  – probabilidade de morte no primeiro ano de vida  
 OCDE – Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico  
 ONU – Organização das Nações Unidas  
 PBD – Plano de Benefício Definido

PNAD – Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios  
RC – Registro Civil  
RGPS – Regime Geral da Previdência Social  
RMBAC – Reserva Matemática de Benefícios a Conceder  
RMBC – Reserva Matemática de Benefícios Concedidos  
RPPS – Regime Próprio de Previdência Social  
RWD – *Random Walk with Drift*  
SIM – Sistema de Informação sobre Mortalidade  
SINASC – Sistema de Informações sobre Nascidos Vivos  
SOA – *Society of Actuaries*  
SUSEP – Superintendência de Seguros Privados  
SVD – *Singular Value Decomposition*  
TEM – Taxa Específica de Mortalidade  
TMI – Taxa de Mortalidade Infantil  
UF – Unidade da Federação  
UN – *United Nations*  
VPBF – Valor Presente do Benefício Futuro  
VPCF – Valor Presente da Contribuição Futura  
WPP – *World Population Prospects*

**TABELA DE CÓDIGOS E SIGLAS DAS GRANDES REGIÕES E  
UNIDADES DA FEDERAÇÃO**

<b>Código</b>	<b>Nome</b>	<b>Sigla</b>
00	Brasil	BR
01	Região Norte	NO
02	Região Nordeste	NE
03	Região Sudeste	SE
04	Região Sul	SU
05	Região Centro-Oeste	CO
11	Rondônia	RO
12	Acre	AC
13	Amazonas	AM
14	Roraima	RR
15	Pará	PA
16	Amapá	AP
17	Tocantins	TO
21	Maranhão	MA
22	Piauí	PI
23	Ceará	CE
24	Rio Grande do Norte	RN
25	Paraíba	PB
26	Pernambuco	PE
27	Alagoas	AL
28	Sergipe	SE
29	Bahia	BA
31	Minas Gerais	MG
32	Espírito Santo	ES
33	Rio de Janeiro	RJ
35	São Paulo	SP
41	Paraná	PR
42	Santa Catarina	SC
43	Rio Grande do Sul	RS
50	Mato Grosso do Sul	MS
51	Mato Grosso	MT
52	Goiás	GO
53	Distrito Federal	DF

## CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

O século XX registrou melhorias significativas nas taxas de mortalidade (Rabbi & Mazzuco, 2018; D'Amato, Piscopo, & Russolillo, 2011; Cairns, Blake, & Dowd 2008), incluindo também os países em desenvolvimento (Li, Lu, & Lyu, 2018). Nos últimos anos, o rápido envelhecimento populacional tem se mostrado um fenômeno global que traz profundas implicações não apenas para as sociedades como também para os governos (Carfora, Cutillo, & Orlando, 2017). Em muitos países desenvolvidos, as preocupações se concentram na sustentabilidade dos Sistemas de Aposentadorias e Pensões e nos cuidados para com a Saúde dos indivíduos com idades mais avançadas. Especialmente por conta do crescimento observado na longevidade de homens e mulheres, foi cunhado o termo *Risco de Longevidade*, que de forma sucinta representa o risco das pessoas viverem em média mais do que o previsto em determinada tábua de vida, de mortalidade ou sobrevivência.

Um país ou sociedade pode envelhecer sem depender da queda da mortalidade para que isso ocorra, bastando que a fecundidade caia seguidamente ao longo dos anos e que os nascimentos produzidos pelas mulheres em idades reprodutivas sejam cada vez menores em termos proporcionais com o passar do tempo. Nessa situação, proporcionalmente existirão cada vez mais indivíduos adultos e idosos, fruto de uma fecundidade maior no passado, comparados às crianças e jovens nascidos em um cenário de fecundidade declinante, acarretando em envelhecimento da população. Todavia, o aumento no número de anos vividos ou na longevidade dos indivíduos só é possível quando as taxas específicas de mortalidade decrescem ano após ano, notadamente nas idades adultas e avançadas.

Esse novo contexto demográfico de envelhecimento populacional aliado com o aumento da longevidade dos indivíduos vem despertando cada vez mais o interesse entre os formuladores de políticas públicas, em relação às projeções da mortalidade, ferramentas estas fundamentais na previsão e modelagem futura das taxas específicas de mortalidade ( ${}_nM_x$ ) e das expectativas de vida ( $e_x$ ), funções de uma tábua de vida. Com isso, a estimativa da mortalidade futura baseada em um bom modelo de projeção é de suma importância, considerando o impacto que seus resultados têm sobre os diferentes processos de planejamento de políticas sociais e econômicas de um país (Diaz, Debón, & Giner-Bosch, 2018). A questão acerca de quanto tempo em média espera-se que uma pessoa com determinada idade ainda irá sobreviver é informação básica para consubstanciar as decisões governamentais relativas à alocação de recursos atuais e futuros,

atraindo também a atenção das indústrias de seguros e previdência ao redor do mundo (Bergeron-Boucher, Canudas-Romo, Oeppen & Vaupel, 2017; Bohk-Ewald & Rau, 2017; Shang, 2012; Shang, Booth & Hyndman, 2011).

Nesse sentido, os métodos estocásticos de projeção da mortalidade desenvolvidos a partir do trabalho seminal de Lee & Carter (1992) figuram na vanguarda desse tipo de estudo. A grande vantagem das metodologias estocásticas *vis-à-vis* às suas concorrentes, é que as primeiras, além da estimativa para o valor médio da mortalidade projetada (para as  ${}_nM_x$  e  $e_x$ ), fornecem também um intervalo de confiança para os pontos futuros no tempo, associando então o grau de incerteza às projeções. Outra vantagem desse tipo de método de projeção é que as séries temporais históricas das curvas de mortalidade é que ditam o comportamento do nível e padrão futuro da mortalidade projetada, praticamente eliminando a subjetividade inerente à *expert opinion* presente em outras metodologias como as de *targeting*.

A utilização de métodos estocásticos baseados em séries temporais para a projeção da mortalidade ou mesmo como *benchmark*, tem se tornado cada vez mais comum nas projeções de população dos países divulgadas por suas agências oficiais de estatística. Segundo Girosi & King (2008), o LC é utilizado pelo *U.S. Census Bureau* como *benchmark* para suas projeções populacionais e seu uso foi recomendado em Painéis do *U.S. Social Security Technical Advisory*. Como mais exemplos, temos que o *Statistics Canada* (Bohnert et al., 2015) utiliza para a projeção da mortalidade nas províncias canadenses o método coerente proposto por Li & Lee (2005), incluindo as melhorias do modelo Lee-Carter estendido (Li, Lee & Gerland, 2013), que incorpora a evolução dos padrões etários de declínio da mortalidade. Segundo Piscopo (2011), o *National Institute of Statistics in Italy* (ISTAT) utiliza o LC para produzir as projeções oficiais de mortalidade. Já o *Statistics New Zealand* (Statistics New Zealand, 2012) utiliza o método coerente produto-razão proposto por Hyndman, Booth & Yasmeeen (2013) como método oficial de projeção da mortalidade de homens e mulheres. Por seu turno, o *Statistics Norway* (Aase, Tønnessen & Syse, 2014) utiliza os métodos coerentes de Hyndman et al. (2013) e de Li & Lee (2005) para a projeção da mortalidade, em estágios, enquanto que o *Statistics Denmark* (Statistics Denmark, 2017) utiliza uma variante do LC para projetar as taxas de mortalidade em suas projeções oficiais de população.

No Brasil, a aplicação da metodologia originalmente proposta por Lee-Carter a dados de mortalidade genuinamente nacionais não é tarefa trivial, visto a inexistência de longas séries temporais de  ${}_nM_x$ 's construídas. Nossa história mostra que, até o presente momento, já foram

conduzidos doze censos demográficos, oito deles organizados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). O primeiro censo demográfico no Brasil foi realizado ainda na época do Império, em 1872, tendo sido chamado de *Recenseamento da População do Império do Brasil*. Os censos seguintes foram feitos em 1890, 1900 e 1920. Com a criação do IBGE, em 1936, o Brasil inaugurou uma nova fase e modelagem para os censos demográficos, que passaram a ser organizados de forma mais regular e sistemática, onde na sequência ocorreram os censos de 1940, 1950, 1960, 1970, 1980, 1991, 2000 e 2010. Apesar da informação em relação à exposição ao risco de morte supostamente datar do final do século XIX no país, as informações acerca dos óbitos só são disponíveis a partir de 1974, em função das Estatísticas do Registro Civil coletadas pelo IBGE, e a partir de 1979, pelos dados do MS/SIM/DATASUS. Com isso, a construção da primeira tábua de mortalidade considerando o cálculo das  ${}_nM_x$ , *strictu sensu*, só foi possível no Brasil a partir de 1974 em função dos óbitos registrados naquele ano, e considerando uma população exposta ao risco estimada para o ano de 1974, com base nos Censos Demográficos de 1970 e 1980. Diferentemente de grande parte dos países desenvolvidos que possuem tábuas de mortalidade anuais, por idade simples, com grupos abertos normalmente em cem ou mais anos (100+), e desde o início do século XX, as tábuas de mortalidade construídas no Brasil em função do quociente óbitos/exposição datam geralmente da década de 1980, são tábuas abreviadas, pontuais nos anos censitários subsequentes e com o último grupo aberto em oitenta anos ou mais (80+), normalmente.

Apenas para passar a noção do abismo existente entre o Brasil e os países desenvolvidos em termos de histórico de dados de óbitos e exposição ao risco, numerador e denominador do cálculo das  ${}_nM_x$ 's, respectivamente, na *Human Mortality Database* (HMD) existem essas informações para a Suécia desde 1751, França desde 1816, Reino Unido desde 1922, Estados Unidos desde 1933 e Japão desde 1947, apenas para citar alguns dentre os 39 países que possuem até o momento informações com o padrão de qualidade para integrarem a HMD. Até o presente, o Chile é o único país da América do Sul com dados na HMD, sendo que suas informações mais pretéritas datam de 1992.

Em virtude da carência de séries históricas no Brasil, foram muito poucos os trabalhos realizados a partir de tábuas que retratassem experiências de mortalidade genuinamente brasileiras, gerando uma enorme lacuna a ser preenchida.

Dentre esses trabalhos, o pioneiro de todos foi aquele realizado por Fígoli (1998), que aplicou o LC original para projetar as  ${}_nM_x$ 's de homens e mulheres para o período de 1990-2040. Apesar

do pioneirismo da autora nesse tipo de aplicação, as tábuas de mortalidade que serviram de base para as projeções foram aquelas construídas de forma abreviada pelo CELADE para o Brasil, no período de 1950-1990. Depois do trabalho inicial de Fígoli (1998) para o Brasil, a projeção da mortalidade baseada na ideia proposta por LC foi aplicada para alguns sub-grupos populacionais específicos. Por exemplo, aos servidores públicos federais (Beltrão & Sugahara, 2007), Município de São Paulo (Silva, 2009), estado de Sergipe (Jesus & Oliveira, 2014), estado do Rio Grande do Sul (Moura, 2015) e Região do Semi-Árido brasileiro (Melo, 2017).

O presente trabalho possui três objetivos principais: 1) construir uma longa série temporal de curvas de mortalidade iniciando em 1950, com base nas tábuas do IBGE de 1980, 1991, 2000 e 2010, para o Brasil e suas cinco Grandes Regiões (Norte, Nordeste, Sudeste, Sul e Centro-Oeste); 2) apresentar uma discussão metodológica e de resultados, utilizando diferentes métodos estocásticos/probabilísticos de projeção da mortalidade para o contexto brasileiro, num horizonte de projeção de 100 anos, até 2110, explicitando as vantagens dessas metodologias e como elas podem auxiliar em diversas questões ; e 3) Em função das tábuas projetadas, construir uma tábua geracional para o Brasil, a ser utilizada numa aplicação atuarial para mensurar o Impacto do Risco de Longevidade nos mais diversos segmentos da previdência brasileira: EAPC's, EFPC's, RPPS's e FUNPRESP.

Os dados básicos utilizados no presente trabalho foram as populações do Brasil e Grandes Regiões dos Censos Demográficos de 1950, 1960, 1970, 1980, 1991, 2000 e 2010 e as tábuas de mortalidade construídas pelo IBGE para os anos de 1980, 1991, 2000 e 2010. As informações originais de população dos censos demográficos possuem algumas limitações, como a sub-enumeração, principalmente de crianças, problemas de dígito preferencial e de traslado de idades, dentre outros. As tábuas de mortalidade do IBGE de 1980, 1991, 2000 e 2010 também possuem as suas limitações, visto que, além de serem tábuas abreviadas com grupo aberto em 80+ ou 90+ anos, foram construídas a partir de uma mescla de métodos indiretos, seja para o cálculo da mortalidade infantil, seja para a correção do sub-registro dos óbitos para os maiores de 5 anos, que carregam intrinsecamente alguns graus de subjetividade de escolhas, além de possíveis quebras de pressupostos das metodologias utilizadas. Esses dados básicos de população e de taxas de mortalidade passaram por alguns ajustes com o objetivo de melhorar a sua qualidade (no caso dos dados de população) ou amplitude (no caso das tábuas do IBGE), antes da entrada no modelo de projeção.

Como adendo, foi feito um comparativo das tábuas de mortalidade construídas para o Brasil por instituições internacionais como ONU (UN 2017), CELADE (2004) e *Institute for Health Metrics and Evaluation* (IHME), com aquelas produzidas pelo IBGE (2005, 2013) e utilizadas como dados ou insumos básicos nesta tese, fornecendo uma discussão adequada acerca das diferenças porventura encontradas, aspectos metodológicos de sua construção, pressupostos embutidos nas técnicas indiretas utilizadas na tentativa de corrigir dos problemas existentes nas informações de óbitos e de exposição ao risco, dentre outros. O comparativo realizado demonstrou similaridade entre as diversas fontes nos anos de 1980, 1991, 2000 e 2010.

Apesar das limitações inerentes ao arcabouço metodológico adotado para a construção das tábuas de mortalidade do IBGE, a utilização das mesmas como insumos base para as projeções aqui propostas se justifica pois, além de representarem as estatísticas oficiais de mortalidade no país, a tábua de mortalidade divulgada anualmente pelo instituto é a tábua *benchmark* utilizada nos cálculos atuariais dos Regimes Próprios de Previdência Social (RPPS) brasileiros. Uma outra motivação para a utilização das tábuas do IBGE se refere ao fato de também ter sido feita uma comparação entre os resultados das projeções aqui conduzidas com aqueles do método de *targeting* (interpolatório) adotado pelo IBGE, apontando as limitações existentes e as vantagens em se utilizar os métodos aqui testados.

Como primeiro passo para a aplicação dos métodos estocásticos de projeção da mortalidade, foram construídas as séries temporais das  $M_x$ 's para o período de 1950-2010, da seguinte forma: 1) em primeiro lugar, o nível dado pela expectativa de vida ao nascer ( $e_0$ ) foi retroprojetado para 1950, 1960 e 1970, considerando uma regressão logística com base nas tábuas abreviadas de 1980, 1991, 2000 e 2010 do IBGE; 2) na sequência, o padrão da curva de 1980 foi ajustado ao nível estimado em 1950, 1960 e 1970; 3) as tábuas abreviadas foram transformadas em tábuas por idade simples (completas) em função da metodologia utilizada pelo IBGE; 4) as tábuas completas foram extrapoladas do grupo aberto 80+ para o grupo aberto 100+, pelo método de Kannisto; e 5) para finalizar, foi realizada uma interpolação log-linear das taxas, a partir dos sete pontos-base (1950, 1960, 1970, 1980, 1991, 2000 e 2010), resultando em 61 pontos no tempo e numa superfície de mortalidade para o período 1950-2010.

Uma limitação das séries temporais de  $m_x$ 's construídas, particularmente em função da etapa 5), reside no fato de que a interpolação realizada acaba por impor um padrão específico de variação nas taxas de mortalidade a cada dois pontos-base no tempo, sendo captado por cada um dos métodos de projeção aqui testados e influenciando obviamente nos resultados obtidos.

Como mais um adendo, foi realizada a parametrização de todas as curvas de  $M_x$ 's por sexo e localidade, para os anos de 1950, 1960, 1970, 1980, 1991, 2000 e 2010, pelo modelo de Heligman & Pollard (1980) – HP3, totalizando 126 curvas ( $126 = 3$  (homem, mulher, ambos)  $\times 6$  (BR e GR's)  $\times 7$  (anos)), descritas cada uma delas por nove parâmetros (A, B, C, D, E, F, G, H, K).

A partir das superfícies de mortalidade construídas, foram testadas nove metodologias diferentes de projeção estocástica/probabilística da mortalidade, dentro da linha proposta por Lee-Carter, sendo sete métodos independentes e dois coerentes. Foram realizadas então projeções da mortalidade considerando como ano-base 2010, para o período de 100 anos compreendido entre 2011 e 2110, para homens e mulheres, em nível nacional e regional.

Apesar da grande maioria dos estudos de projeção da mortalidade realizados por pesquisadores no mundo inteiro considerar normalmente horizontes mais curtos de tempo como 20 ou 50 anos, é importante destacar que o longo horizonte de 100 anos de projeção aqui utilizado se justifica, em primeiro lugar, pela necessidade do conhecimento futuro do possível (ou provável) caminho a ser percorrido por essa componente da dinâmica demográfica no Brasil e suas Grandes Regiões, como também para a construção da tábua geracional completa dos 0 aos 100+ anos de idade, que permitiu o cálculo das estimativas para o Impacto do Risco de Longevidade nas instituições previdenciárias brasileiras, mostrando a importância da incorporação das probabilidades de morte projetadas, para o cálculo das obrigações futuras nessas entidades.

Conforme será apresentado adiante neste trabalho, foram desenvolvidos diversos métodos de projeção estocástica da mortalidade ao longo do tempo, na eterna tentativa de melhorar a qualidade dos resultados obtidos (Wilson, 2018), sempre considerando as limitações existentes. Por exemplo, estudos comparativos realizados (vide Booth et al., 2005 e 2006; Shang et al., 2010 e 2011) com dados da HMD a partir de diversos métodos de componentes principais na linha do método de Lee-Carter, suas variantes e extensões, demonstraram que o método de Lee & Miller (2001) e a variante proposta por Booth, Maindonald, & Smith (2002), bem como as extensões propostas por Hyndman & Ullah (2007), Hyndman & Booth (2008) e Hyndman & Shang (2009), todos apresentaram resultados mais precisos do que o método original de Lee & Carter (1992). Cabe salientar que tanto o método original quanto suas alternativas foram desenvolvidos num contexto de países desenvolvidos com longas séries temporais de dados de qualidade e por idade simples, o que não é a realidade do Brasil. Apesar do método original de Lee & Carter (1992) ter mostrado pior performance do que suas variantes e extensões, em

estudos realizados (vide Shang et al., 2010 e 2011; Carfora et al., 2017; Booth et al., 2005 e 2006), é importante considerar a sua aplicação como *baseline* para a comparação com os outros métodos propostos, razão pela qual o mesmo não pode se desconsiderado.

Depois de diversos testes aplicados em relação à projeção da mortalidade de homens e mulheres por métodos de projeção independente para o Brasil, onde, de fato, os resultados obtidos apontaram para divergências improváveis, com o aumento do *gap* na  $e_0$  entre os sexos ao longo dos 100 anos de projeção, optou-se por utilizar os métodos coerentes, em que a citada divergência não ocorre. Além disso, como nenhum dos métodos testados de forma isolada conseguiu resultar em projeções plausíveis para o nível e o padrão das curvas até 2110, optou-se pela técnica de projeção em dois estágios, a saber: 1) em primeiro lugar, projetou-se o nível da mortalidade ( $e_0$ ) pelo método coerente proposto por Hyndman et al. (2013); e 2) em segundo lugar, projetou-se o padrão da mortalidade ( ${}_nM_x$ ) pelo método coerente de Li & Lee (2005), fazendo a rotação<sup>1</sup> nos padrões etários de declínio da mortalidade conforme sugerido por Li et al. (2013), ajustando, então, o padrão obtido nesse segundo estágio ao nível obtido no primeiro estágio da projeção. Uma característica desses métodos é que, enquanto no método proposto por Hyndman et al. (2013) as razões obtidas entre as taxas de mortalidade dos sub-grupos (p.e. as razões entre as  ${}_nM_x$ 's de homens e mulheres) podem variar, no método de Li & Lee (2005) essas razões permanecem constantes ao longo do tempo.

Como os resultados das projeções para o Brasil mostraram-se satisfatórios e factíveis, considerando os métodos coerentes utilizados nos dois estágios, adotou-se o mesmo procedimento para as Regiões Norte, Nordeste, Sudeste, Sul e Centro-Oeste.

Após a definição da forma mais adequada de se projetar a mortalidade no Brasil a partir dos métodos aqui testados, os resultados obtidos serviram de insumos para a construção das tábuas de mortalidade geracionais batizadas de BR-Geracional, que incorporam o paulatino ganho de sobrevivência dos indivíduos ano após ano, introduzindo a perspectiva de mortalidade futura de coorte.

De posse das tábuas BR-Geracional, como último objetivo, foram realizadas duas aplicações atuariais, a primeira mais teórica e a segunda prática. Na aplicação atuarial teórica, o Impacto do Risco de Longevidade nos diversos segmentos previdenciários foi mensurado em função da

---

<sup>1</sup> Conforme sugerido por Li, Lee, e Gerland (2013), rotação (*rotation*) é o termo utilizado para o fenômeno da desaceleração do declínio da mortalidade nas idades mais jovens e a aceleração do declínio da mortalidade nas idades mais avançadas.

razão entre as anuidades atuariais, calculadas com a tábua geracional, e aquelas de determinada tábua *benchmark* por segmento previdenciário específico (RPPS's, EAPC's, EFPC's e FUNPRESP). Esse procedimento foi inspirado no trabalho feito pela OCDE (Antolin, 2007; OECD, 2014), mas com algumas vantagens: 1) aqui foram construídas tábuas geracionais para homens, mulheres e ambos os sexos e não apenas para a população total, como fez a OCDE, e, conseqüentemente, o Impacto do Risco de Longevidade pôde ser medido por sexo e não apenas para a população total; 2) a série temporal aqui utilizada é maior e mais robusta do que aquela utilizada pela referida organização, que, para o caso do Brasil, utilizou as tábuas do IBGE por idade simples, para o período 1998-2011, enquanto que a série temporal estimada nesta tese cobre o período de 1950-2010; e 3) as curvas de mortalidade aqui utilizadas possuem grupo aberto em 100+ anos, enquanto que aquelas utilizadas pela OCDE possuem grupo aberto em 80+ anos. Na aplicação atuarial prática, o Risco de Longevidade foi calculado para um RPPS fictício com aproximadamente 15.000 vidas, entre segurados ativos, aposentados e pensionistas, homens e mulheres. Aqui o Impacto do Risco de Longevidade foi mensurado em função das razões de Custos e Reservas Matemáticas, calculadas a partir da tábua BR-Geracional e da tábua IBGE-2016, atual *benchmark* nesse segmento previdenciário específico.

Em função disso, estabeleceu-se e comprovou-se a tese de que é possível, mesmo no contexto de um país em desenvolvimento como o Brasil, aplicar os métodos estocásticos mais modernos de projeção da mortalidade considerando ideia original proposta por Lee-Carter, que possuem a vantagem de produzirem resultados para a média projetada e seu intervalo de confiança atrelado. A ideia de se trabalhar com uma banda de confiança com valores máximos e mínimos para os resultados possíveis, de expectativa de sobrevivência e de taxas de mortalidade, é extremamente importante para a formulação de políticas públicas com foco em previdência e saúde, pois permite que medidas possam ser previamente planejadas antes da ocorrência de um possível e indesejado cenário, dentre todos os previstos.

Fazendo uma comparação metodológica com as projeções oficiais de mortalidade realizadas pelo órgão oficial das estatísticas no país (IBGE 2018), entende-se que as metodologias aqui testadas e a proposta de projeção final em dois estágios apresentam vantagens em relação ao método de *targeting* utilizado pelo IBGE. Por exemplo, de forma bem resumida, na metodologia do IBGE aloca-se uma tábua limite por sexo disponibilizada pelo *U.S. Census Bureau* no ano de 2100, onde as curvas de mortalidade são obtidas por interpolação linear entre as  $M_x$ 's da tábua de 2010 e aquelas alocadas em 2100. Esse procedimento apresenta as seguintes limitações: 1) o padrão e o nível da tábua limite adotada pode não refletir as características

específicas da população brasileira, visto que foram construídas com base na experiência dos países mais desenvolvidos do mundo; 2) a dependência da *expert opinion* quanto à determinação do ano em que será alocada a tábua limite para a realização do procedimento interpolatório; 3) a não existência de intervalos de confiança para as estimativas médias de  $e_x$  e  $M_x$ 's projetadas, impossibilitando a criação de cenários máximo e mínimo para a mortalidade futura. Em contraposição, os métodos estocásticos de projeção da mortalidade, além da vantagem já citada de reportar a incerteza nas projeções em função dos intervalos de confiança criados, determinam o comportamento futuro das taxas projetadas em função única do seu comportamento observado no passado, dado exclusivamente por sua série temporal histórica, mitigando então a importância da *expert opinion* nos resultados finais.

Pensando, agora, um pouco nos aspectos atuariais subjacentes às projeções da mortalidade, podemos construir tábuas geracionais com os resultados obtidos, que incorporam o ganho de longevidade estimado ao longo dos anos futuros, o que não ocorre nas chamadas tábuas estáticas. Com isso, é fácil demonstrar que os cálculos atuariais realizados a partir de tábuas estáticas resultam em subestimação generalizada dos compromissos (Reservas Matemáticas) das entidades previdenciárias, visto que os valores calculados através da utilização dessas tábuas são quase sempre menores do que aqueles calculados em função de tábuas geracionais / bidimensionais (que variam com a idade  $x$  e no tempo  $t$ ). Nessas condições, uma situação aparentemente superavitária de um Plano de Benefício Definido (PBD) pode facilmente se tornar deficitária pela simples (e correta) utilização de uma tábua geracional projetada, ao invés de uma tábua de período. Da mesma forma, uma situação já ruim de déficit atuarial pode se tornar algo muito pior do que se configura *a priori*. Ignorar o *improvement* na mortalidade acarreta em sérios problemas de subestimação dos valores das Reservas Matemáticas das Instituições Previdenciárias (Liu, 2008).

O dicionário Aurélio da Língua Portuguesa define a palavra “previdência” como a qualidade ou o ato de ser previdente, a antecedência. Nesse sentido, para que as entidades previdenciárias nacionais possam efetivamente fazer valer o nome que sustentam, as mesmas devem contemplar no cálculo de suas Reservas Matemáticas o impacto referente ao Risco de Longevidade dos seus participantes, o que só seria possível pela utilização de tábuas geracionais construídas em função de projeções da mortalidade, com informações genuinamente brasileiras.

Nesse sentido, são enunciadas as seguintes hipóteses:

- Hipótese 1: Os diferentes e mais modernos métodos estocásticos de projeção da mortalidade dentro do *framework* de Lee-Carter podem ser aplicados como alternativas no caso brasileiro e fornecem resultados mais robustos e confiáveis do que os métodos tradicionais de *targeting*, que dependem em larga escala da *expert opinion*;
- Hipótese 2: Os cálculos atuariais realizados no Brasil, a partir de tábuas geracionais construídas em função da mortalidade projetada por métodos estocásticos, conduzem a resultados mais robustos para as Reservas Matemáticas e Custos do Sistema Previdenciário, quando comparados àqueles calculados com as tradicionais tábuas de período, que não incorporam o Risco de Longevidade.

Para se testar as hipóteses acima enunciadas, foram feitas as seguintes perguntas de pesquisa:

- Pergunta 1: Qual(is) seria(m) o(s) método(s) de projeção estocástica/probabilística de mortalidade dentro da ideia de Lee-Carter mais adequado(s) ao caso brasileiro?
- Pergunta 2: Respondida a pergunta 1, qual seria a mortalidade e a expectativa de vida projetada de homens e mulheres no Brasil e Grandes Regiões, nos próximos 100 anos, com uma confiança de 95%?
- Pergunta 3: Qual seria o Impacto do Risco de Longevidade (IRL) nas entidades previdenciárias brasileiras (EFPC's, EAPC's, RPPS's, FUNPRESP), quando é utilizada uma tábua geracional?

Feitas essas considerações iniciais, em virtude da grande lacuna existente no Brasil em termos da ausência de longas séries temporais de curvas de mortalidade, da reduzida pesquisa no âmbito da projeção da mortalidade com dados genuinamente nacionais, através das metodologias estocásticas mais modernas e utilizadas internacionalmente, e da estimativa do Risco de Longevidade nas instituições previdenciárias, entende-se que as principais contribuições desta tese foram: 1) a criação das longas séries temporais de 61 anos de mortalidade, construídas para o Brasil e Grandes Regiões no período 1950-2010, e que deram origem às superfícies de mortalidade criadas (vide *Gráfico 10*, *Gráfico 11* e *Gráfico 12* adiante), até então inexistentes em virtude da ausência das informações de óbitos por idade antes do ano de 1974; 2) mostrar que é possível utilizar em um país em desenvolvimento como o Brasil, métodos de projeção da mortalidade dentro da linha proposta originalmente por Lee-Carter, que possuem inúmeras vantagens, quando comparados com os métodos tradicionais de *targeting* utilizados pelo órgão oficial das estatísticas no país, o IBGE, dentre elas, a possibilidade de obtenção de intervalos de confiança para a mortalidade projetada e uma menor dependência da

*expert opinion*, que possui diversos graus de subjetividade. Os resultados das projeções aqui obtidos são úteis, inclusive para a avaliação da qualidade das projeções oficiais realizadas pelo IBGE; e 3) a tábua BR-Generacional, construída a partir das projeções da mortalidade, que pode, inclusive, ser utilizada pelas entidades previdenciárias brasileiras em seus cálculos atuariais como referencial, e que resultou na estimativa do Impacto do Risco de Longevidade nessas instituições, por segmento específico.

O produto final das projeções estocásticas de mortalidade, realizadas para o Brasil e Grandes Regiões, abre espaço, inclusive, para futuros estudos com outro foco, que não fazem parte do escopo principal proposto nesta tese, mas que poderão ser realizados *a posteriori*, como a avaliação da hipótese de convergência/divergência<sup>2</sup> da mortalidade entre as diversas localidades do país, dentre outros.

Esta tese é composta de sete capítulos, sendo, esta Introdução, o primeiro. O segundo capítulo trata da contextualização e relevância do estudo aqui apresentado. O terceiro capítulo apresenta as bases de dados utilizadas e os ajustes metodológicos preliminares realizados. O quarto capítulo trata de tábuas, modelos, leis e métodos de projeção da mortalidade. O quinto capítulo apresenta os principais resultados das projeções da mortalidade para o Brasil e Grandes Regiões. O sexto capítulo apresenta os resultados teóricos para o Impacto do Risco de Longevidade no Brasil, estimado em função da Tábua BR-Generacional construída e sua comparação com as tábuas utilizadas como *benchmark* nos diversos segmentos previdenciários existentes, além de uma simulação atuarial prática com a referida tábua geracional. O sétimo e último capítulo apresenta as conclusões e comentários finais desta tese. Fechando o documento principal, são apresentadas as referências bibliográficas.

Optou-se por criar um livro de anexos à parte, do documento principal da tese, disponibilizado apenas na versão digital, como forma de documentar os insumos básicos utilizados e todo o trabalho de pesquisa conduzido, justificado pelo grande volume de informações inerentes ao Brasil e suas cinco Grandes Regiões Norte, Nordeste, Sudeste, Sul e Centro-Oeste.

---

<sup>2</sup> Por exemplo, vide: Borges 2017; Seligman et al. 2016; Salvini et al. 2015; Norheim 2014, Wilson 2011 e 2001; Moser et al. 2007; Edwards & Tuljapurkar 2005; Vallin & Meslé 2004; Coleman 2002

## CAPÍTULO 2 - CONTEXTUALIZAÇÃO E RELEVÂNCIA

Segundo Girosi and King (2008), os estudos de projeção da mortalidade têm sido utilizados em uma ampla variedade de campos acadêmicos e para a elaboração de políticas públicas de saúde globais e nacionais, de pesquisa médica e farmacêutica, de Previdência Social e planejamento de aposentadorias e pensões. Já vem de longa data a sua aplicação voltada para a Seguridade Social (Bayó & Glanz, 1965), com constantes aprimoramentos e evoluções metodológicas nas últimas décadas, tanto para a dos Estados Unidos (Faber & Wade, 1983; Wade, 1989; Wade, 1992; Bell et al., 1992; Bell & Wade, 1996; Bell, 1997; Bell & Wade, 1998; Bell & Miller, 2002; Bell & Miller, 2005) quanto para os países da Comunidade Europeia (EC, 2008, 2009, 2011, 2012, 2014, 2015).

Apesar do ritmo de mudança na estrutura etária diferir muito entre os diversos países, dependendo do estágio da Transição Demográfica<sup>3</sup> em que se encontram, existe uma tendência mais ou menos geral: a população idosa está crescendo de forma mais rápida do que a população total em praticamente todas as regiões do mundo, e a diferença nessas taxas de crescimento vem aumentando paulatinamente. Esses países, aqui incluído o Brasil, vêm experimentando rápidas transformações, dependentes de uma série de fatores, que fazem emergir os diferenciais existentes em termos regionais e sócio econômicos para os diferentes grupos sociais existentes.

O presente capítulo contextualiza, inicialmente, a queda da mortalidade observada no Brasil e o aumento generalizado da longevidade ao redor do mundo, apresentando, também, as duas correntes de pensamento acerca da existência ou não de um limite biológico para a vida humana e destacando a importância das projeções da mortalidade como ferramentas para o planejamento de políticas públicas ligadas à Seguridade Social. Na sequência, são apresentados, de forma bem sucinta, os diferentes tipos de métodos de projeção da mortalidade, com um destaque especial para os métodos extrapolativos dentro da lógica proposta por Lee-Carter, suas variantes, extensões e os métodos coerentes, assim como os diversos países onde esses métodos foram aplicados, incluindo alguns países em desenvolvimento. A penúltima seção deste capítulo trata da importância da Projeção Estocástica/Probabilística da Mortalidade e suas vantagens em relação às metodologias tradicionais determinísticas de *targeting*, utilizadas originalmente pelas agências oficiais de estatística dos países, como o IBGE no Brasil. Finalizando o capítulo, é tratada a questão do Risco de Longevidade no Brasil e no Mundo.

---

<sup>3</sup> Para maiores detalhes ver Canning (2011), Lee (2003) e Kirk (1996).

## 2.1) Queda da Mortalidade, Aumento na Longevidade, Limites Biológicos e Projeções

Pensando em termos de um breve histórico demográfico para o Brasil, até meados da década de 1940, o país caracterizou-se pela prevalência de altas taxas de natalidade e de mortalidade. A partir desse período, com a incorporação dos avanços da medicina às políticas de saúde pública, particularmente os antibióticos recém descobertos na época e importados no pós-segunda guerra, o país experimentou a primeira fase de sua transição demográfica, caracterizada pelo início de uma queda mais acentuada nas taxas de mortalidade. Naquela década, a esperança de vida ao nascer ( $e_0$ )<sup>4</sup> para a população de ambos os sexos no Brasil era inferior aos 50 anos de idade (IBGE, 2010). Segundo Prata (1992), a taxa geral de mortalidade decresceu de 18‰ em 1940, para algo entre 6‰ a 8‰ em 1985. A expectativa de vida cresceu 20 anos no mesmo período e a mortalidade infantil decresceu de 160‰ em 1940, para 85‰ em 1980. O aumento no ritmo de crescimento populacional ocorrido entre 1940-1970 deveu-se exclusivamente ao declínio da mortalidade, com a esperança de vida ao nascer passando de 44 anos em 1940, para 54 em 1960 (Carvalho, 2004). Em 1980, a expectativa de vida ao nascer para ambos os sexos já era de 62,5 anos, crescendo para 73,8 anos em 2010, e para 74,8 anos em 2013 (IBGE, 2013b).

Uma vida mais longa significa dizer que cada vez mais e mais indivíduos, homens e mulheres, chegarão a idades avançadas, gerando uma preocupação do Estado em face ao aumento dos gastos públicos em relação à Saúde, Previdência Social e Assistência Social, políticas públicas estas que consubstanciam o chamado tripé da Seguridade Social<sup>5</sup> no Brasil. Consequentemente, tanto os legisladores quanto a população, em geral, começaram a considerar o papel da sociedade no apoio a essa população idosa em constante expansão. Num contexto demográfico novo, perguntas sobre o futuro da longevidade humana adquiriram um significado especial para as políticas públicas e o planejamento fiscal (Wilmoth, 1998), onde recente artigo da Revista Science (2016) trouxe mais uma vez à tona os pontos de vista das divergentes opiniões existentes entre a corrente de pesquisadores que não acredita na existência de um limite fixo para a vida humana (Oeppen & Vaupel, 2002) e a corrente de pesquisadores contrária a este pensamento (Olshansky et al., 2005). O primeiro grupo de pesquisadores concluiu, utilizando

---

<sup>4</sup> Por definição, a expectativa de vida ao nascer ( $e_0$ ) de uma população é a idade média à morte que seria observada em uma coorte hipotética de indivíduos, se a sua experiência de mortalidade ao longo da vida correspondesse exatamente às Taxas Específicas de Mortalidade (TEM) observadas para aquela população durante um dado ano ou período de tempo.

<sup>5</sup> Constituição Federal de 1988 – Cap. II – Da Seguridade Social (BRASIL, 1988).

o histórico das tendências e trajetórias da mortalidade por idade, que nenhum limite pode ser definido para a  $e_x$ . Eles argumentam que a mortalidade é susceptível de se nivelar após algum limite (não especificado) e, como resultado, a longevidade continuaria aumentando nas próximas décadas. No entanto, essa visão continua controversa, já que o grupo mais conservador de pesquisadores acredita em limites naturais para a vida humana e argumentam que tanto a transição epidemiológica (Omran, 1971; Olshansky & Ault, 1986; Frenk et al., 1991; Omran, 1998; Horiuchi, 1997; Caselli, Meslé, & Vallin, 2002; Vallin & Meslé, 2004; McKeown, 2009), como as reduções massivas nas taxas de mortalidade exigidas para produzirem pequenos aumentos na  $e_x$ , sugerem que os ganhos irão diminuir ou mesmo estancar (Olshansky et al. 2005). Além disso, as evidências empíricas demonstram que as curvas de probabilidade de sobrevivência tornaram-se cada vez mais retangulares ou comprimidas (Kannisto, 2000), sugerindo que existem limites para a  $e_x$ . Segundo Siegel (2005), a conhecida *a compressão da mortalidade* ou *teoria da retangularização* (Fries 1980; Wilmoth & Horiuchi, 1999) da curva de sobrevivência não é conclusiva.

Num contexto de fecundidade baixa, como é o caso do Brasil desde a virada para o século XXI (TFT de 2,39 filhos por mulher em 2000, 1,87 em 2010 e 1,70 em 2013 – IBGE 2013a), cada vez mais a componente mortalidade tem aumentado o seu peso na modelagem da estrutura etária do país. Nesse sentido, Caseli & Vallin (1990) apontam que, embora o efeito do envelhecimento causado pela queda da fecundidade seja normalmente objeto de destaque pelos estudiosos, percebe-se que, atualmente, as consequências das mudanças na mortalidade são igualmente ou até mais importantes que a própria fecundidade. Em contraste com o passado, agora o declínio da mortalidade é uma poderosa causa do envelhecimento da população (Lee & Carter, 1992), onde os ganhos porventura obtidos por grande parcela da população mundial terão, necessariamente, que se concentrar nas idades hoje consideradas avançadas, o que levaria a um aumento significativo, não apenas no quantitativo de idosos, como, também, em sua longevidade (Carvalho, 2001), e mesmo nos países desenvolvidos onde já foi detectada uma desaceleração (Wilmoth, 1998) ou mesmo uma reversão (Xu et al., 2016) nos ganhos da expectativa de vida ao nascer ( $e_0$ ), as taxas de declínio da mortalidade em idades avançadas ainda têm se mostrado elevadas (Wilmoth 2011), propiciando um paulatino aumento na sobrevivência dos indivíduos, sem mostrar sinais ou evidências da existência de um limite fixo imposto pela biologia ou outros fatores (Wilmoth 2000). Em função dessas constatações, uma pergunta natural que surge seria: “*Será que o recente ritmo de ganhos na esperança de vida e*

*na esperança de vida ativa vai se estender às próximas gerações, ou estamos nos aproximando do ponto em que os retornos serão cada vez mais decrescentes?” (Wachter 1997 p.1-2).*

Como consequência das mudanças ocorridas na mortalidade ao longo dos séculos ou mesmo décadas, a realização de projeções da mortalidade torna-se missão árdua, mas essencial em diversos campos de estudo (Tabeau et al., 2002), de forma que tanto a Estatística, quanto a Demografia, são ingredientes necessários em qualquer análise séria para a sustentabilidade dos Sistemas de Aposentadorias e Pensões e dos Sistemas de Saúde nas sociedades que passam pelo processo de envelhecimento, na avaliação da alocação de recursos de políticas públicas e na estimativa do tamanho e composição, por sexo e idade, das populações em diversos pontos no tempo (Stoeldraijer et al., 2013; Alho & Spencer, 2005).

## **2.2) Métodos de Projeção: de Lee-Carter até os coerentes**

Diversos autores propuseram métodos para a projeção da mortalidade, utilizando ou não a modelagem estatística. Esses métodos podem ser segmentados basicamente em três tipos de abordagens: extrapolação, explanação e expectativa (vide Booth et al., 2006; Booth & Tickle, 2008 para uma ampla revisão). Os métodos extrapolativos utilizam a regularidade típica observada nos padrões e tendências da mortalidade ao longo do tempo. Os métodos de explanação fazem o uso de modelos epidemiológicos ou estruturais de mortalidade em função de certas causas de morte, a partir das quais as variáveis exógenas de referência são conhecidas e podem ser medidas. Já os métodos de expectativa são baseados em opiniões subjetivas de *experts* e podem envolver diversos graus de formalidade ou mesmo subjetividade. De acordo com Stoeldraijer et al. (2013), alguns métodos específicos de projeção da mortalidade podem incluir aspectos de uma ou mais abordagens, dentre as citadas.

Os métodos extrapolativos são os mais utilizados por atuários e agências oficiais de estatística. Dentre os métodos estocásticos extrapolativos existentes, a literatura faz a distinção entre: 1) modelos baseados na projeção interdependente das  ${}_nM_x$ 's (incluindo os modelos de graduação); 2) modelos que utilizam procedimentos em função de séries temporais como o método de Lee & Carter (1992), onde é assumido que a componente dependente do tempo para o cálculo das  ${}_nM_x$ 's segue uma tendência log-linear; e 3) modelos que utilizam modelagem econométrica (p.e. modelos de *spline*) (Antolin, 2007). Considerando esses três enfoques, aquele proposto por Lee

& Carter (1992) é entendido como um divisor de águas na projeção da mortalidade, sendo considerado atualmente um *benchmark* entre todos os métodos existentes (Shang et al., 2011).

De forma resumida, a técnica proposta por LC utiliza um método de componentes principais para extrair um índice simples de variação temporal do nível das taxas de mortalidade, a partir do qual as projeções são obtidas utilizando como modelagem um passeio aleatório com tendência (*random walk with drift*), que equivale a um modelo ARIMA (0,1,0). Apesar de inicialmente o método LC ter sido designado para projeções de longo prazo, utilizando a maior série temporal disponível e modelando os óbitos totais, em virtude das diversas mudanças estruturais ocorridas nos padrões de mortalidade ao longo do século XX, as informações alocadas em um passado mais distante reduziram o seu grau de importância em termos de capacidade de previsibilidade do futuro.

Desde a sua criação em 1992 o método de LC já foi aplicado para dados dos mais diversos países do mundo, como Estados Unidos (Lee & Carter, 1992; Pedroza, 2006; Li & Chan, 2007), Canadá (Lee & Nault, 1993; Li & Chan, 2007), Chile (Lee & Rofman, 1994), China (Jiang, 1995; Zhao, 2012), Japão (Wilmoth, 1996), Finlândia (Alho, 1998; Lovász, 2011), Brasil (Fígoli, 1998), Portugal (Coelho, 2001), Áustria (Carter & Prskawetz, 2001), Austrália (Booth et al., 2001 e 2002; De Jong & Tickle, 2006), Bélgica (Brouhns et al., 2002), Noruega (Keilman et al., 2002; Basnayake & Nawarathna, 2017), Inglaterra e País de Gales (Renshaw & Haberman, 2003a), Reino Unido (Renshaw and Haberman, 2003b), Romênia (Lazar, 2004), Suécia (Lundström & Qvist, 2004; Tuljapurkar, 2005; Wang, 2007; Lovász, 2011), China e Coreia do Sul (Li, Lee, & Tuljapurkar, 2004), Itália (Haberman and Russolillo, 2005; D'Amato et al., 2011; Biffi & Clemente, 2014; Carfora et al., 2017), França (Hyndman & Ullah, 2007; Khan et al., 2016), Hungria (Baran et al., 2007), Alemanha (Härdle & Mysickova, 2009), Taiwan (Wang & Liu, 2010), Nova Zelândia (Li, 2010), Espanha (Debón et al., 2008, 2011), México (García-Guerrero & Mellado, 2012; Aburto & García-Guerrero, 2015), Argentina (Andreozzi, 2012; Belliard & Williams, 2013), Costa Rica (Fernández, 2013), Holanda (Stoeldraijer et al., 2013), Colômbia (Molina, 2015; Diaz, Debón, & Giner-Bosch, 2018), Índia (Chavhan & Shinde, 2016a, 2016b), Tailândia (Yasungnoen & Sattayatham, 2016) e Argélia (Flici, 2016). Além das aplicações pontuais do método LC para um ou dois países, o mesmo já foi utilizado em trabalhos comparativos para diversos países ao mesmo tempo. Por exemplo, Tuljapurkar et al. (2000) aplicaram a metodologia para os países membros do G7 (Alemanha, Canadá, Estados Unidos, França, Itália, Japão e Reino Unido) e identificaram um padrão universal aproximadamente linear de declínio na componente de tempo da mortalidade, para

cada um dos países analisados. Essa linearidade contribui para a simplicidade e, conseqüentemente, a comprovada popularidade do método (Lee & Miller, 2001; Carter & Prskawetz, 2001). Na sequência, Booth et al. (2005 e 2006) avaliaram a qualidade do LC, suas variantes e extensões para os dados de Austrália, Canadá, Dinamarca, Finlândia, França, Inglaterra e País de Gales, Itália, Noruega, Suécia e Suíça. Por sua vez, Koissi et al. (2006) avaliaram a performance do método LC para os dados dos países nórdicos (Dinamarca, Finlândia, Noruega e Suécia). Já Shang et al. (2010 e 2011) fizeram uma comparação acerca da performance de 10 métodos de componentes principais a partir do método original LC, utilizando os dados de Austrália, Canadá, Dinamarca, Escócia, Espanha, Finlândia, França, Inglaterra, Holanda, Islândia, Itália, Noruega e Suíça. Por seu turno, Li et al. (2013) propuseram uma extensão do método de LC para ajuste da rotação nos padrões etários de declínio da mortalidade nas projeções de longo prazo, utilizando os dados de Austrália, Áustria, Bélgica, Canadá, Dinamarca, Espanha, Finlândia, França, Holanda, Hong Kong, Irlanda, Israel, Itália, Japão, Nova Zelândia, Noruega, Reino Unido, Singapura, Suécia e Suíça. Mais recentemente, Rabbi & Mazzuco (2018) aplicaram sete diferentes variantes do método LC para nove países do Leste Europeu, considerados de alta mortalidade (Bielorrússia, Bulgária, Eslováquia, Estônia, Hungria, Letônia, Lituânia, Rússia e Ucrânia), e detectaram que o desempenho dos modelos de projeção estocástica para esses países foi menor do que o observado nos países de baixa mortalidade, como os da Europa Ocidental.

O método original LC também já passou por algumas alterações e extensões, objetivando melhorias nos resultados obtidos e/ou adequações à realidade demográfica da localidade em questão. Tanto o LC original, quanto as suas modificações, via de regra foram desenvolvidos não apenas no contexto de países com bons dados de mortalidade, como também de longas séries históricas, normalmente disponibilizadas através dos arquivos digitais da *Human Mortality Database* (HMD). Por exemplo, Tuljapurkar et al. (2000), Lee & Miller (2001) e Booth, Maindonald, & Smith (2002) propuseram algumas variantes do LC, enquanto Hyndman & Ullah (2007), Hyndman & Booth (2008) e Hyndman & Shang (2009) propuseram extensões. Importante destacar que também foram sugeridas modificações no método LC para a sua aplicação em países que não possuem longas séries temporais de  ${}_nM_x$ , e onde essas informações, quando existentes, são disponíveis apenas para alguns pontos no tempo (normalmente em anos censitários), e com intervalos não necessariamente iguais entre os pontos (vide Li et al., 2004).

As observações históricas mostram que a mortalidade para subpopulações<sup>6</sup> varia de forma mais ou menos similar ao longo do tempo, pelo fato de serem sub-grupos dentro de um conjunto maior, que tendem a compartilhar as mesmas condições de vida e possuir comportamento similar de mortalidade. Apesar do salto de qualidade em termos metodológicos introduzido no trabalho seminal de Lee & Carter (1992), quando se utiliza o método para projetar a mortalidade de subpopulações de forma independente, os resultados obtidos tendem a divergir. Essas tendências divergentes emergem da inabilidade dos diferentes modelos de projeção da mortalidade de oferecer previsões que sejam consistentes umas com as outras (Bergeron-Boucher et al., 2017; Flici, 2016; Shang & Hyndman, 2016; Hyndman et al., 2013; Oeppen, 2008). Por exemplo, quando projetamos a mortalidade de homens e mulheres, um importante resultado, ou talvez o mais desejado deles, é que essas projeções sejam consistentes entre si. Essas projeções não-divergentes entre populações similares são frequentemente referidas na literatura como projeções coerentes, termo cunhado originalmente por Li & Lee (2005).

Os modelos coerentes foram desenvolvidos mais recentemente para projetar a mortalidade de duas ou mais subpopulações de forma simultânea, de forma a garantir, no longo prazo, a consistência ou não-divergência dos resultados obtidos para as  ${}_nM_x$ 's e  $e_x$ 's desses sub-grupos populacionais (Shair et al., 2017). A ideia básica dos métodos coerentes é melhorar a qualidade dos resultados obtidos para determinado sub-grupo e vice-versa, levando em consideração a incorporação da experiência de mortalidade do outro, ou de um conjunto de sub-grupos. Como exemplos de métodos coerentes, temos o proposto por Li & Lee (2005), por Debón et al. (2011), o método produto-razão de Hyndman et al. (2013), o método poisson-fator-comum sugerido por Li (2013) e, mais recentemente, o Lee-Carter Complexo (De Jong et al., 2016).

### **2.3) A importância da Projeção Probabilística da Mortalidade**

O futuro demográfico de qualquer país é incerto, pois existe não apenas um caminho específico possível, mas muitos deles, sendo uns mais prováveis de ocorrerem do que outros. Conseqüentemente, se quisermos saber, por exemplo, qual seria a população de um país em determinado ano futuro, precisamos incluir em nossa estimativa dois elementos básicos: 1) toda a série de resultados possíveis; e 2) uma probabilidade associada a esse intervalo. Juntos, esses dois elementos formam um intervalo de confiança para a variável em questão e determinam a

---

<sup>6</sup> Por exemplo: homens e mulheres em determinada localidade, países em determinada região, diferentes regiões administrativas dentro de um mesmo país, etc.

precisão esperada da projeção populacional, em função da quantificação da incerteza associada à essa previsão (Keilman et al., 2002; Lee, 2004a).

Um primeiro problema, então, reside no fato de que, tradicionalmente, as agências de estatística dos países tratam da incerteza nas projeções populacionais através da introdução de dois ou mais cenários de fecundidade ou mortalidade e, em função dos mesmos, calculam uma amplitude para as projeções. Essa forma tradicional de tratar com a incerteza nas projeções populacionais, através de variantes alta e baixa, é insatisfatória, pois não deixa claro qual o grau de incerteza esses caminhos alternativos devem cobrir (Booth, 2004; Lutz & Scherbov, 1998; Lee & Tuljapurkar, 1994). Segundo Keilman et al. (2002), existem dois problemas conectados à abordagem tradicional. Em primeiro lugar, nenhuma probabilidade é associada aos intervalos. Em segundo, a utilização das variantes alta e baixa não é realista e é inconsistente, do ponto de vista estatístico (Lee, 1998; Alho, 1998). Esses problemas inerentes à abordagem tradicional são muito sérios e acarretam drásticos impactos no planejamento e na formação de políticas públicas. Estudos conduzidos há mais de trinta anos já demonstraram a necessidade de incorporação da incerteza às projeções populacionais, e concluíram que as projeções da mortalidade realizadas considerando a abordagem tradicional dos cenários alto, médio e baixo conduzem a resultados subestimados tanto nas expectativas de vida futuras de homens e mulheres, quanto no quantitativo dos idosos (Keilman, 1997; Lee & Tuljapurkar, 2000, 1998a, 1998b).

Como instituição oficial e responsável pela produção de grande parte das estatísticas econômicas, sociais e demográficas do Brasil, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE também realiza, desde a virada do século, as projeções de população do país (IBGE, 2000, 2004, 2008, 2013a), tendo realizado uma retroprojeção populacional em 2016 (IBGE, 2016a) e, mais recentemente, a última revisão da projeção de população (IBGE, 2018). Tanto para a população em si, como no caso das componentes da dinâmica demográfica, fecundidade e mortalidade, a projeção oficial não é feita de forma probabilística, impossibilitando o cálculo de intervalos de confiança e a associação da incerteza em relação aos resultados obtidos.

Em relação, especificamente, à projeção da mortalidade realizada pelo IBGE na última Revisão em 2018 (IBGE, 2018), a hipótese adotada pelo Instituto, para o comportamento futuro da variável, foi a de continuidade da queda, chegando ao nível e ao padrão limite, dado pela tábua

limite de mortalidade disponibilizada pelo *U.S. Census Bureau*<sup>7</sup>, tendo a componente mortalidade permanecido sem alterações em relação à revisão anterior, de 2013. Na prática, as tábuas limite de homens e mulheres foram alocadas em 2100, sendo realizada uma interpolação linear das  ${}_nM_x$ 's entre 2010-2100, obtendo então as tábuas de mortalidade para todos os anos dentro do horizonte da projeção para o Brasil, este de 2010-2060.

Já vem de longa data a tradição do IBGE na divulgação dos principais indicadores associados à mortalidade dos brasileiros. Em particular, a tábua de mortalidade, tábua de vida ou tábua de sobrevivência é um modelo demográfico que expressa a incidência da mortalidade ao longo das idades, e produz, como resultado, as taxas de mortalidade por idade e a esperança ou expectativa de vida a partir de qualquer idade. Indicadores de especial interesse, associados às condições de saúde da população, acesso aos serviços de saneamento e às políticas educacionais, são representados pela taxa de mortalidade infantil (TMI) e a esperança de vida ao nascimento ( $e_0$ ) (IBGE, 2015). Como principais referências desse tipo de trabalho divulgado pelo IBGE, temos as tábuas de mortalidade de 1980, 1991 e 2000 (IBGE, 2005) e de 2010 (IBGE, 2013b) para o Brasil, Grandes Regiões e Unidades da Federação, de homens, mulheres e para a população de ambos os sexos combinados.

Importante destacar também que, em cumprimento ao disposto no Art. 2º do Decreto nº 3.266 de 29/11/1999, o IBGE divulga anualmente, até o dia primeiro de dezembro de cada ano, a Tábua Completa de Mortalidade para o total da população brasileira referente ao ano anterior, tábua esta gerada através do processo interpolatório adotado pelo instituto. Essa informação subsidia o cálculo do chamado fator previdenciário<sup>8</sup> para fins das aposentadorias dos segurandos vinculados ao Regime Geral da Previdência Social (RGPS), administrado pelo Instituto Nacional do Seguro Social (INSS).

Nesse momento, algumas importantes questões surgem de forma natural: 1) será que o padrão e o nível embutido nas tábuas limite do *U.S. Census Bureau* seria o mais adequado para o caso brasileiro e sua aplicação nas Grandes Regiões e Unidades da Federação?; 2) será que o ano de 2100 seria o mais adequado para a alocação das tábuas limite para todas as localidades do Brasil?; 3) baseado nessa metodologia interpolativa, qual a chance das expectativas de vida futuras de homens e mulheres estarem subestimadas?; 4) caso a projeção da mortalidade fosse

---

<sup>7</sup> Essas tábuas limite foram criadas em 07/05/2001 no *U.S. Census Bureau* norteamericano e representavam, à época, o padrão e o nível de mortalidade dos países mais desenvolvidos do mundo.

<sup>8</sup> Vide Lei nº 9.876, de 26/11/1999.

feita de forma probabilística, as  $e_x$ 's e  ${}_nM_x$ 's calculadas de forma determinística pelo método interpolativo estariam dentro do intervalo de confiança calculado?; 5) a projeção da mortalidade realizada de forma estocástica em função da extrapolação de séries temporais conduziria a resultados mais confiáveis do que aqueles obtidos de forma determinística, baseados em métodos de *targeting* e na *expert opinion*?

Conforme citado anteriormente, as projeções da mortalidade realizadas de forma determinística não fornecem uma indicação adequada para a incerteza embutida nas previsões, pois não levam em consideração a variabilidade nos processos demográficos, nem indicam a amplitude dos possíveis resultados, o que só ocorre no caso de projeções probabilísticas (Raftery et al., 2014; Keilman et al., 2002). Segundo Tuljapurkar & Boe (1998), diferentemente das projeções realizadas de forma determinística, as projeções estocásticas podem ser geradas a partir de especificações das mudanças no tempo durante o horizonte da projeção, alterando de forma aleatória e dinâmica as hipóteses e equações utilizadas, de forma que a incerteza é propagada dinamicamente no tempo, eliminando o problema de consistência nos resultados obtidos. Os autores descrevem de forma sucinta a projeção estocástica como sendo um valor médio e um par de valores extremos (limite inferior e superior) que incluem a maioria dos possíveis resultados e definem um intervalo de confiança em termos de probabilidade (p.e. 80, 90, 95%).

A grande vantagem da projeção estocástica em relação à projeção determinística é que, através da primeira, é possível se preparar para prováveis crescimentos acima ou abaixo do valor médio esperado, e modelar as políticas públicas em função, agora, de um conjunto de possibilidades, ao invés de um número fixo e determinado, que não necessariamente será aquele observado no futuro. No caso da projeção estocástica da mortalidade, pode ser previsto, por exemplo, além do número médio de aposentados (indivíduos acima de 60 ou 70 anos) em determinada época futura, uma amplitude para esse quantitativo de indivíduos em determinado ponto no tempo e qual seria, ainda, a sobrevivência mínima, média ou máxima desses indivíduos (p.e. quantos anos a mais seriam previstos, no mínimo e no máximo, para o pagamento de benefícios de prestação continuada, como as aposentadorias e pensões), informação essa fundamental para o planejamento estratégico da Seguridade Social do país.

Por exemplo, Lee & Miller (2001) mostraram que a *Social Security Administration* dos Estados Unidos subestimou em todos os estudos realizados na segunda metade do século XX a expectativa de vida ao nascer ( $e_0$ ) projetada para a virada do século, em 2000. Os autores aplicaram a variante Lee & Miller (2001) para o método proposto originalmente por Lee &

Carter (1992) e concluíram que não apenas os valores de  $e_0$  projetados de forma estocástica eram muito mais próximos dos valores efetivamente observados nos anos 2000, do que aqueles projetados pelo referido órgão governamental americano, mas, também, que os valores observados faziam parte das bandas de confiança (inferior e superior) geradas pela metodologia, na grande maioria dos cenários de projeção trabalhados.

## **2.4) A Questão do Risco de Longevidade no Brasil e no Mundo**

No contexto das aplicações específicas para os estudos de projeção da mortalidade, um dos maiores e menos compreendidos riscos que as empresas de seguros e resseguros, patrocinadores de fundos de pensão e governos estão expostos é o chamado Risco de Longevidade (Crawford et al., 2008).

De forma resumida, o Risco de Longevidade é o risco de que, em média, as pessoas vivam mais do que o esperado. De forma mais ampla, um empregador que organiza um PBD faz uma promessa de pagar periodicamente uma certa soma de capital para cada um dos seus empregados, do momento imediatamente posterior à concessão do benefício de aposentadoria, até a morte do segurado. Tanto o empregador quanto o empregado financiam o pagamento das contribuições durante a sua vida laborativa. Qualquer deficiência de fundos no futuro é de responsabilidade da coletividade (participantes e patrocinador do plano), considerando o princípio do mutualismo que norteia os planos de benefício definido. Consequentemente, é essencial para o empregador ser capaz de prever com um alto grau de confiança qual seria o montante<sup>9</sup> total suficiente para cumprir com as suas obrigações futuras para com os seus assistidos. Se os aumentos na  $e_x$  são previsíveis e levados em consideração nas avaliações atuariais, as chamadas Reservas Matemáticas contemplariam essas variações e o Risco de Longevidade poderia ser mitigado (Boyer et al., 2011).

Do ponto de vista dos indivíduos, menores taxas de mortalidade observadas representam aspectos positivos. No entanto, para os sistemas de aposentadorias e pensões que administram planos na modalidade de Benefício Definido (PBD), a boa notícia da queda das taxas de mortalidade não representa necessariamente uma boa nova, visto que o aumento da longevidade das pessoas faz com que os benefícios contratados sejam pagos durante um período mais longo

---

<sup>9</sup> No jargão atuarial esse montante é chamado de Reserva Matemática de Benefícios a Conceder (RMBAC), enquanto o participante for ativo, e Reserva Matemática de Benefícios Concedidos (RMBC), enquanto o participante for assistido, inativo ou aposentado.

de tempo, fazendo com que essas instituições estejam obrigatoriamente preparadas para essas mudanças (Kisser et al., 2012, 2013; Antolin, 2007; OECD, 2014). Nesse contexto, os modelos de projeção da mortalidade desempenham um papel fundamental na avaliação do Risco de Longevidade por demógrafos e atuários, e a sua *performance* depende fortemente dos diferentes padrões de mortalidade observados nos mais diversos países (Carfora et al., 2017).

Por exemplo, a Seguradora AON divide o Risco de Longevidade (Aon Hewitt, 2016) em três categorias distintas: 1) Risco de *Improvement*: risco das tendências de melhorias futuras na longevidade serem diferentes das esperadas; 2) Risco de Tábua Base: risco dos níveis atuais de mortalidade não terem sido estimados de forma precisa; e 3) Risco por participante: risco de que, mesmo que se conheça a probabilidade de morte de cada um dos participantes (*likelihood*), ainda assim haverá uma variação aleatória; Já Brcic & Brisebois (2010) sugerem classificar os tipos de Risco de Longevidade em: 1) Risco Sistemático: no qual a hipótese de mortalidade utilizada está incorreta como um todo; e 2) Risco Específico: de que certos indivíduos vivam mais do que o esperado (volatilidade acerca da hipótese de mortalidade). No presente trabalho foi quantificado o Risco de Longevidade referente às categorias 1) *Improvement* ou 2) Específico, da 1ª e 2ª classificações acima propostas, respectivamente, o qual representa, na prática, o maior dos riscos citados.

Compete a qualquer Entidade Previdenciária gerir os planos de benefícios de forma profissional e eficiente, identificando de forma oportuna os possíveis desvios nas estimativas obtidas no cálculo atuarial. Nesse sentido, a Avaliação Atuarial (AVAT) é o relatório técnico norteador dos Planos de Benefícios oferecidos pelas entidades previdenciárias. Esse documento é desenvolvido pelo atuário, e tem como objetivo principal determinar os fluxos de recursos necessários para fazer face aos compromissos assumidos quanto ao pagamento das aposentadorias e pensões. Normalmente a Avaliação Atuarial é acompanhada de um segundo documento intitulado Nota Técnica Atuarial (NTA). A NTA apresenta toda a formulação matemática utilizada pelo atuário em seus cálculos, bem como todas as premissas e hipóteses adotadas, tais como a taxa de juros ou de desconto atuarial, a taxa de crescimento salarial e de benefícios, o fator de capacidade dos benefícios (calculado a partir de uma perspectiva de inflação) e as tábuas biométricas, dentre elas as tábuas de mortalidade e sobrevivência, de entrada em invalidez, de mortalidade de inválidos, de morbidade e de rotatividade de segurados.

Em relação, especificamente, às tábuas de mortalidade/sobrevivência, a grande maioria das EFPC's e EAPC's do Brasil utiliza, nos cálculos atuariais de seus planos de benefícios, tábuas

estáticas ou de período, normalmente baseadas em experiências internacionais dos Estados Unidos ou Inglaterra. Essa situação observada faz emergir dois problemas básicos: 1) as experiências internacionais de mortalidade não refletem nem o padrão, nem o nível da mortalidade dos participantes de planos de previdência complementar no Brasil<sup>10</sup>; e 2) o Risco de Longevidade não é contemplado, visto que essas tábuas não foram construídas de forma geracional, considerando a projeção da mortalidade brasileira por um método probabilístico/estocástico.

Cabe ressaltar que, mesmo quando os conhecidos testes de aderência de tábuas (p.e. Qui-Quadrado, Kolmogorov-Smirnov, Exato de Fisher, Viés de Tendência, etc) apontam que determinada tábua de mortalidade, internacional ou não, seria adequada para determinada massa de segurados naquele momento específico do tempo, com certeza absoluta a mesma não será adequada ao cenário futuro de médio e longo prazos, por não ter sido construída de forma geracional, e com isso não incorporando os contínuos ganhos na  $e_x$  observados no passado recente e previstos para o futuro. Além disso, apesar da utilização das antigas e conhecidas escalas de fatores de *improvement* das taxas de mortalidade (p.e. escalas A, B, C, D, E, G, X, Y, Z, H, I, J, AA, BB) ou mesmo das mais recentes *Mortality Improvement Scales* de 2014, 2015 e 2016 propostas pela *Society of Actuaries* (SOA, 2014, 2015 e 2016), de alguma forma promoverem a redução nas taxas de mortalidade ao longo dos anos, os resultados obtidos continuam sendo baseados em experiências internacionais, no caso norte-americanas, e que não representam a realidade brasileira, deixando uma lacuna, em termos de estudos genuinamente nacionais, que necessita ser preenchida.

Essas situações acabam por gerar uma grande incerteza em relação aos corretos (ou mais prováveis) valores das Reservas Matemáticas necessárias ao tão almejado Equilíbrio Financeiro e Atuarial (EFA) das entidades previdenciárias no país, e coloca em risco a liquidez e a solvência dos seus planos de benefícios, podendo comprometer toda uma coletividade de indivíduos, visto que, por determinação legal, o déficit porventura encontrado nos Planos de Benefício Definido, pelo princípio do mutualismo que alicerça esses planos, deve ser equacionado por patrocinadores, participantes e assistidos. Nesse sentido, compete ao atuário a decisão de qual forma projetar a mortalidade, baseada em sua análise e julgamento de como as

---

<sup>10</sup> O padrão brasileiro de mortalidade é muito peculiar, notadamente pelo excesso de mortalidade ocasionado pelas chamadas causas externas, muito superior àquele observado nas tábuas internacionais.

tendências futuras de ganhos de longevidade irão interagir com o modelo atuarial referente ao plano de benefícios em questão (Kessler, 2006).

A incerteza futura em relação à trajetória da mortalidade no Brasil e suas sub-populações, aliada ao Risco de Longevidade, juntos, esses dois fatores constituem um sério problema que afeta de forma significativa o Equilíbrio Financeiro e Atuarial (EFA) das Entidades Fechadas (EFPC) ou Abertas (EAPC) de Previdência Complementar e, no caso específico do Brasil, também dos Regimes Próprios de Previdência Social (RPPS) da União, dos Estados e Municípios, e da FUNPRESP, fundação responsável pela administração do plano de previdência complementar do servidor público federal brasileiro.

A Resolução CNSP nº 131, de 2005, alterou e consolidou as regras de funcionamento e os critérios para operação da cobertura por sobrevivência oferecida em planos de Entidades Abertas de Previdência Complementar (EAPC). A referida resolução estabelece em seu Art. 11 que a tábua de mortalidade *AT-1983 Male* deve ser considerada como o limite mínimo de sobrevivência (ou máximo de mortalidade) a ser adotado no cálculo atuarial das EAPC's. Convém salientar que, apesar do § 1º do Art 11 da citada resolução facultar às EAPC's utilizar uma tábua com atualização durante o período de diferimento, essa situação não mitiga totalmente o potencial risco do aumento da  $e_x$  na fase de percepção de benefícios (Silva, 2010). No caso de déficit apurado em Plano de Benefício Definido (PBD) e de Contribuição Variável (CV) nas entidades abertas, a responsabilidade pela cobertura desse passivo atuarial descoberto é da própria EAPC, por meio de provisão matemática específica para essa finalidade (arts. 15 e 16 da Res. CNSP nº 131/2005). Mais recentemente por meio da Circular SUSEP nº 402, de 18/03/2010, foram aprovados os critérios de elaboração e atualização das tábuas biométricas BR-EMS 2010 (Oliveira et al., 2012), que foram construídas em função da experiência própria mais recente do mercado segurador brasileiro, e já foram, inclusive, atualizadas para as tábuas biométricas BR-EMS 2015 (Oliveira et al., 2016).

A Resolução CGPC nº 18 de 28/03/2006 estabeleceu os parâmetros técnico-atuariais para estruturação dos planos de benefícios das Entidades Fechadas de Previdência Complementar (EFPC). A citada resolução também prevê a utilização da tábua AT-83 como limite mínimo<sup>11</sup> de sobrevivência por idade (item 2 do Regulamento Anexo à norma) e autoriza desagravamentos ou reduções nas  ${}_nM_x$ 's ou  ${}_nq_x$ 's, desde que feitos de forma uniforme ao longo

---

<sup>11</sup> *United States Individual Annuity Mortality Table* (vide [www.soa.org.br](http://www.soa.org.br)). A tábua utilizada anteriormente como limite inferior de sobrevivência era a AT-49, definida na Resolução CGPC nº 11 de 21/08/2002.

de todas as idades (item 2.2 do Regulamento Anexo), o que equivale a reduzir a curva apenas em nível, mantendo o seu padrão constante ao longo dos anos. Merece destaque também o item 2.3 do Regulamento Anexo da Resolução CGPC nº 18/2006, que determinou que todas as EFPC's atualizassem até 31/12/2008 as suas Reservas Matemáticas com a nova tábua limite mínimo de sobrevivência. Isso significou na prática trocar a antiga tábua AT-49 (definida pela Resolução CGPC nº 11 de 21/08/2002) pela tábua AT-83, resultando em relevantes déficits atuariais apurados à época, visto o maior período estimado para o recebimento dos benefícios previdenciários. No caso de existência de déficit atuarial em Plano de Benefício Definido de EFPC, a responsabilidade pelo seu equacionamento será dos patrocinadores, participantes e assistidos, na proporção existente entre as suas contribuições (art. 21 da Lei Complementar nº 109 de 29/05/2001).

A Fundação de Previdência Complementar do Servidor Público Federal – FUNPRESP utiliza na Avaliação Atuarial do seu plano de benefícios, a tábua de mortalidade RP2000 (SOA, 2000), com aplicação dos fatores de *improvement* da escala AA (SOA, 1995), na tentativa de incorporação da tendência esperada de redução da mortalidade futura de seus participantes (FUNPRESP, 2017).

Em relação aos Regimes Próprios de Previdência Social (RPPS), a Portaria MPS nº 403 de 10/12/2008 determina que suas avaliações atuariais sejam concebidas levando em consideração a utilização da Tábua de Mortalidade para a população de ambos os sexos combinados (taxas mínimas de sobrevivência - art. 6º, inciso I), elaborada anualmente pelo IBGE. Apesar da tábua divulgada todo dia 1º de dezembro pelo IBGE ser uma tábua genuinamente nacional, a mesma não é geracional e, portanto, não incorpora o dito Risco de Longevidade. Ainda no âmbito dos RPPS, o art. 18 da Portaria MPS nº 403/2008 prevê que, no caso da avaliação atuarial indicar déficit em dado exercício específico, deverá ser apresentado no Parecer Atuarial um plano de amortização para o seu equacionamento. Normalmente, os patrocinadores dos RPPS, que são os próprios governos municipais, estaduais e federal, acabam por assumir a responsabilidade quanto ao pagamento do passivo atuarial descoberto, numa eterna *rolagem de dívida*. Já existem casos de RPPS em que os próprios servidores tiveram as suas alíquotas de contribuição majoradas para ajudar no financiamento dessa dívida. Por exemplo, o terceiro maior RPPS do país<sup>12</sup>, o Fundo Único de Previdência Social do estado do Rio de Janeiro – RIOPREVIDÊNCIA,

---

<sup>12</sup> O maior RPPS do país é o dos servidores da União, seguido pelo RPPS do estado de São Paulo, o São Paulo Previdência (SPPREV).

teve a alíquota de todos os seus servidores ativos e inativos aumentada de 11% para 14%, e a alíquota do patrocinador aumentada de 11% para 28% no plano financeiro e para 22% no plano previdenciário, em 29/05/2017 (Lei Estadual do Rio de Janeiro nº 7.606 de 26 de maio de 2017). Essa situação ocorrida no RIOPREVIDÊNCIA parece direcionar para uma tendência generalizada de aumento nas alíquotas previdenciárias de servidores e patrocinadores públicos, visto a recente movimentação nesse sentido no RPPS da União e nos RPPS de diversas outras Unidades da Federação (UF).

Em suma, todas as instituições previdenciárias brasileiras, sejam elas Entidades Abertas (EAPC) ou Fechadas (EFPC) de Previdência Complementar, incluindo também os Regimes Próprios de Previdência Social (RPPS) e a Fundação de Previdência Complementar do Servidor Público Federal (FUNPRESP), possuem uma deficiência comum, e que pode acarretar em déficits sem precedentes para essas instituições: o cálculo das suas responsabilidades não é realizado com uma tábua geracional construída com dados genuinamente nacionais, partindo de projeções da mortalidade com métodos estocásticos.

Kisser et al. (2012), em um estudo conduzido nos Estados Unidos, demonstraram que cada ano adicional na expectativa de vida acarreta em um aumento de 3% a 4% nas Reservas Matemáticas. Segundo os autores, esse efeito não foi apenas estatisticamente significativo, como também economicamente, pois para cada ano adicional na  $e_x$ , as Reservas Matemáticas dos Planos Previdenciários Privados americanos aumentariam em, aproximadamente, US\$ 84 bilhões. Ainda em relação aos Estados Unidos, um artigo publicado na Revista Science (2011) relatou que cada ano de expectativa de vida custa ao *U.S Social Security Administration* aproximadamente US\$ 50 bilhões. Já Boyer et al. (2011), em um estudo realizado no Canadá, concluíram que, para compensar o Risco de Longevidade por si só, os Fundos de Pensão canadenses deveriam aumentar as suas provisões matemáticas em aproximadamente 4%. Além disso, para o governo de Québec, a reserva matemática infundada do *Régie des rentes du Québec* seria de US\$ 172 bilhões, enquanto que o déficit infundado dos vários Fundos de Pensão de empregados governamentais chegaria a US\$ 53 bilhões, por conta do Risco de Longevidade. Por seu turno, Antolin (2007), em uma simulação realizada com dados de mortalidade dos países membros da OCDE, concluiu que o *gap* existente no Valor Presente do Benefício Futuro (VPBF) atuarial, quando se leva ou não em consideração as melhorias na mortalidade e na expectativa de vida, é inversamente proporcional à idade dos participantes do Fundo de Pensão. No caso particular do estudo do autor, os resultados apontaram que a expectativa de vida ao nascimento e à idade de 65 anos aumentariam em 1,2 e 0,8 anos por

década, respectivamente. Caso fossem considerados esses *improvements* na mortalidade, os benefícios pagos a um participante de 25 anos de idade em 2005 aumentariam em quase  $\frac{1}{4}$ , quando comparados com a não inclusão dessas melhorias nos cálculos. Esse aumento no pagamento do benefício cairia para 3,3% para um participante de 65 anos. Essa relação inversa decorre do fato de que a exposição do Fundo de Pensão aos *improvements* na expectativa de vida são tão maiores, quanto mais jovens forem os seus participantes.

O estudo mais recente conduzido pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico para diversos países do mundo (OECD, 2014) que sucedeu o trabalho de Antolin (2007), concluiu, especificamente para o Brasil, que a falta de incorporação do *improvement* na mortalidade para a avaliação de passivos atuariais resultou em uma significativa insuficiência nas Reservas ou Provisões Matemáticas dos Planos Previdenciários dos mais diversos segmentos, expondo suas entidades a um grande Risco de Longevidade, situação essa agravada pelo fato de ser prática comum no país utilizar tabelas desatualizadas e baseadas na mortalidade da população dos Estados Unidos. Por exemplo, segundo o referido estudo da OECD, utilizando a tábua AT-83, foi calculada uma subestimação dos passivos da ordem de 12-15%, em média, valores estes reduzidos para 7-11% quando da utilização da tábua AT-2000, sendo ainda maiores para as mulheres. Dado o histórico uso de tabelas desatualizadas com base na experiência dos Estados Unidos, a criação da tábua BR-EMS 2010 (Oliveira et al., 2012), com base na experiência do mercado segurador brasileiro, apesar de não incorporar as melhorias futuras na mortalidade, representou uma iniciativa louvável, tendo reduzido significativamente a subestimação do passivo atuarial para um patamar em torno de 3% a 5%. De forma sintética, o estudo da OECD (2014) concluiu que as tábuas de mortalidade: 1) deveriam incluir, em sua construção, as expectativas de melhorias futuras; 2) deveriam ser regularmente atualizadas para refletirem, adequadamente, a experiência mais recente de mortalidade, de forma a evitar aumentos significativos nas Reservas Matemáticas calculadas; e 3) deveriam ser baseadas na experiência de mortalidade de populações robustas. Esse mesmo relatório da OCDE classificou, como sério (de 10-20%), o Risco de Longevidade esperado para os Fundos de Pensão brasileiros e Entidades Privadas que comercializam o produto previdência.

Infelizmente, a grande maioria dos Fundos de Pensão e entidades previdenciárias não considera, ou considera apenas em parte, as futuras melhorias na mortalidade e na expectativa de vida (Antolin, 2007). Nessa linha, Santos (2007) destaca que, apesar das tábuas geracionais já serem utilizadas em maior escala nos países desenvolvidos, o seu uso no Brasil ainda é muito pouco difundido e utilizado de forma insipiente nas Avaliações Atuariais dos planos de previdência nacionais.

## **CAPÍTULO 3 - BASES DE DADOS, AJUSTES METODOLÓGICOS PRELIMINARES E A SUPERFÍCIE DE MORTALIDADE**

Neste capítulo são apresentadas as bases de dados de população e as tábuas de mortalidade originais do IBGE para os anos de 1980, 1991, 2000 e 2010 para homens, mulheres e ambos os sexos, bem como um breve histórico acerca dessas tábuas, a metodologia utilizada pelo Instituto para a sua construção, suas limitações e comparativos com as tábuas construídas para o Brasil por instituições internacionais como a ONU, CELADE e IHME. Além disso, são apresentados os ajustes preliminares realizados nos dados de população e de mortalidade, metodologias utilizadas para os referidos ajustes, estimativas das tábuas de mortalidade para os anos de 1950, 1960 e 1970 e construção da superfície de mortalidade para o Brasil e Grandes Regiões.

Para a construção das tábuas de mortalidade geracionais necessitamos que as tábuas projetadas sejam tábuas completas de mortalidade. Por esta razão, trabalhou-se com dados por idade simples (de população e taxas de mortalidade). Além disso, como é sabido, as informações para idades muito avançadas, como aquelas acima dos 100 anos, além de serem muito rarefeitas em países em desenvolvimento, como é o caso no Brasil, possuem qualidade duvidosa em função dos diversos tipos de erros a que estão sujeitas<sup>13</sup>. Com isso, optou-se por trabalhar com os dados por idade simples de 0 até o grupo aberto 100+ anos, fechando neste ponto as tábuas de mortalidade utilizadas no trabalho.

### **3.1) Exposição ao Risco / Populações Base**

Por definição, a chamada Taxa Central de Mortalidade na idade  $x$  ( $M_x$ ) é o quociente entre os óbitos observados na idade  $x$ , em determinado ano calendário específico, e a população exposta ao risco de morte, com a mesma idade, normalmente aproximada pela população no meio do ano calendário específico (em 01/07), ou seja,  $M_x = \text{obitos}_x / \text{população}_x^{(01/07)}$ .

Em um primeiro momento, não seria necessário a coleta de dados de população dos censos demográficos (denominador do cálculo das  $M_x$ 's), visto que já possuímos as taxas de mortalidade oriundas das tábuas de vida do IBGE de 1980, 1991, 2000 e 2010. Acontece que

---

<sup>13</sup> Por exemplo, a exposição ao risco, denominador do cálculo da  $M_x$ , é oriunda do censo demográfico onde, por sua vez, a idade do indivíduo é "auto-declarada". Essa autodeclaração de idade pode viesar a informação em função do conhecido erro de translado de idade, que acontece principalmente no caso dos indivíduos mais idosos, que tendem a aumentar a sua idade quando perguntada na operação censitária, prejudicando então as estatísticas geradas a partir dos dados das pessoas principalmente acima dos 90 ou 100 anos de idade.

alguns métodos de projeção da mortalidade utilizados no presente trabalho modelam o total dos óbitos (p.e. Lee & Carter, 1992) ou a distribuição dos óbitos (p.e. Booth, Maindonald, & Smith, 2002), o que justifica a necessidade de utilização da distribuição da população, por sexo e idade, oriunda das operações censitárias. No caso, o cálculo da estimativa dos óbitos é feito através do produto entre a população, em determinada idade  $x$  (por sexo), e a taxa específica de mortalidade, para determinado ano calendário.

Com isso foram coletadas as informações de população oriundas dos Censos Demográficos de 1950, 1960, 1970, 1980, 1991, 2000 e 2010. O ANEXO 1, constante no livro de anexos digital que acompanha o presente documento apresenta, para o Brasil e GR's, tabelas com as populações ajustadas por idade simples de 0 até 100+ anos, para homens, mulheres e ambos os sexos, além das pirâmides populacionais construídas, tabelas com as taxas de crescimento intercensitário calculadas por grupos quinquenais e gráficos apresentando diversas estatísticas demográficas calculadas, tais como: razão de sexo, índices de envelhecimento, razões de dependência, distribuição percentual de crianças, adultos e idosos, razão crianças-mulher e taxa de crescimento geométrico por sexo e total.

### **3.1.1) População dos censos demográficos**

Os censos demográficos realizados no Brasil a cada dez anos, permitem à sociedade conhecer melhor a evolução da distribuição territorial da população do país e as principais características socioeconômicas das pessoas e dos seus domicílios. Essas informações são imprescindíveis para a definição de importantes políticas públicas regionais, para a tomada de decisões de investimentos públicos e privados, e contribuem para o planejamento adequado e o uso sustentável dos recursos (IBGE, 2011).

As populações, por sexo e idade simples, dos Censos Demográficos de 1950, 1960 e 1970 foram obtidas nas publicações em papel, digitalizadas pelo IBGE e disponíveis em <https://biblioteca.ibge.gov.br/>. Nesse sentido, foram digitadas, tabuladas e conferidas as populações por sexo e idade simples de cada uma das unidades da federação existentes quando da operação censitária. As Grandes Regiões foram obtidas pela soma das UF's e o Brasil pela soma das Grandes Regiões.

Já as populações por sexo e idade simples oriundas dos CD's de 1980, 1991, 2000 e 2010 foram coletadas no Banco Multidimensional de Estatísticas (BME), disponível no *site* do IBGE. Da

mesma forma, foram geradas as informações por cada UF. As Grandes Regiões foram obtidas por soma das UF's e o Brasil por soma das GR's.

### **3.1.2) Ajustes nos Dados Populacionais**

A realização de testes de precisão nas informações de idade é necessária, não apenas porque tais dados são de fundamental importância para as estimativas populacionais e análises demográficas, mas, também, porque os erros nessas estatísticas são frequentemente indicativos de deficiências na contagem da população ou nos registros das estatísticas vitais. As informações classificadas por faixa etária podem ser afetadas tanto por erros no reporte das idades, quanto por variações na completude da enumeração nas diferentes faixas etárias (UN, 1955a).

Já vem de longa data a preocupação dos pesquisadores em relação à qualidade da informação acerca da distribuição por sexo e idade dos indivíduos, tanto em países desenvolvidos (Myers, 1954), quanto em países em desenvolvimento (Seng, 1959), inclusive em relação à sua utilização como denominador no cálculo das taxas específicas de mortalidade (Coale & Kisker, 1986; Preston, Elo, & Stewart, 1999).

De forma resumida, então, existem basicamente dois tipos de erros nas distribuições por sexo e idade oriundas dos censos demográficos: erro de enumeração/cobertura e erro de declaração de idade.

Os erros de enumeração ocorrem em virtude da operação censitária nunca conseguir atingir 100% de cobertura total, ainda mais num país em desenvolvimento, de dimensões continentais e com grandes desigualdades regionais e sociais como o Brasil. Normalmente, são erros por omissão de pessoas, todavia podem ocorrer situações em que um indivíduo seja contado mais de uma vez, situação essa menos comum que a primeira. Por exemplo, o quantitativo de indivíduos com 0 ano de idade é sempre subreportado nos censos demográficos, seja pelo fato do respondente entender que zero não é uma idade, ou mesmo pelo fato de alguns pais entenderem que os recém-nascidos ainda não sejam membros regulares do domicílio.

Já os erros de declaração de idade ocorrem devido à declaração ser feita de forma errada ou mesmo omitida. No caso dos censos brasileiros, a informação básica solicitada ao respondente é a data de nascimento do indivíduo ou a sua idade presumida, de preferência a primeira.

Independentemente da forma em que a idade é declarada (data de nascimento X idade presumida), o erro pode se dar por problemas de memória do informante em relação à data de nascimento, ou, a que idade presumida reportar. Quando não se sabe nada acerca da variável, a mesma é omitida por desconhecimento, ou, quando não existe a plena certeza por parte dos informantes, os mesmos tendem a declarar datas de nascimento (principalmente o ano de nascimento) ou idades, terminando nos chamados dígitos preferenciais “0” ou “5”. Esse tipo de erro é chamado de “Erro de Dígito Preferencial”. Obviamente, os erros de declaração de idade são diferenciais por sexo e afetam de forma distinta as diversas idades. Por exemplo, por questões culturais, mulheres até determinada idade, tendem a diminuir a sua idade quando perguntadas. Por outro lado, pessoas mais idosas tendem a declarar uma idade maior do que a real, por provavelmente presumirem que configura status social ser uma pessoa com idade avançada, num país em desenvolvimento e altamente desigual, onde poucos chegam a idades acima dos 90 ou mesmo 100 anos.

Existe a tendência dos tipos de erros existentes na declaração das idades se compensarem de alguma forma, todavia o tamanho dessa compensação dependerá não apenas da natureza e da magnitude dos erros, mas também da forma em que os dados são agrupados, situação essa que pode contornar parte dos problemas existentes (Hobbs, 2004).

Com o objetivo de tentar contornar parte dos problemas existentes nos dados por idade simples obtidos diretamente dos sete censos demográficos utilizados, optou-se, em primeiro lugar, por agrupar os dados em grupos quinquenais e, na sequência, aplicar um método de graduação matemática para, decompor os grupos quinquenais criados, em idade simples, novamente, corrigindo, assim, parte dos erros presentes nos dados originais. Segundo Hobbs (2004), os métodos de graduação matemática / osculatórios podem ser aplicados para “abrir” grupos quinquenais em idade simples. O que esses métodos essencialmente fazem é ajustar diferentes curvas aos totais observados nos grupos quinquenais de idade, criando, então, novas distribuições por idade simples e eliminando os erros de preferência de dígito da distribuição original. Dentre os principais métodos de graduação podem ser citados: método Razão de Carrier-Farrag, Karup-King-Newton Interpolação Quadrática, Interpolação Cubic Spline, Sprague, Beers Ordinary e Beers Modified (Siegel & Swanson, 2004). No presente trabalho optou-se pela utilização do método de Beers Ordinary (Beers, 1944)<sup>14</sup>.

---

<sup>14</sup> Foram testados outros multiplicadores como Sprague e Karup-King, todavia os resultados obtidos ficaram muito próximos aos do Beers Ordinary, razão pela qual optou-se por utilizar este último. Os multiplicadores de Beers

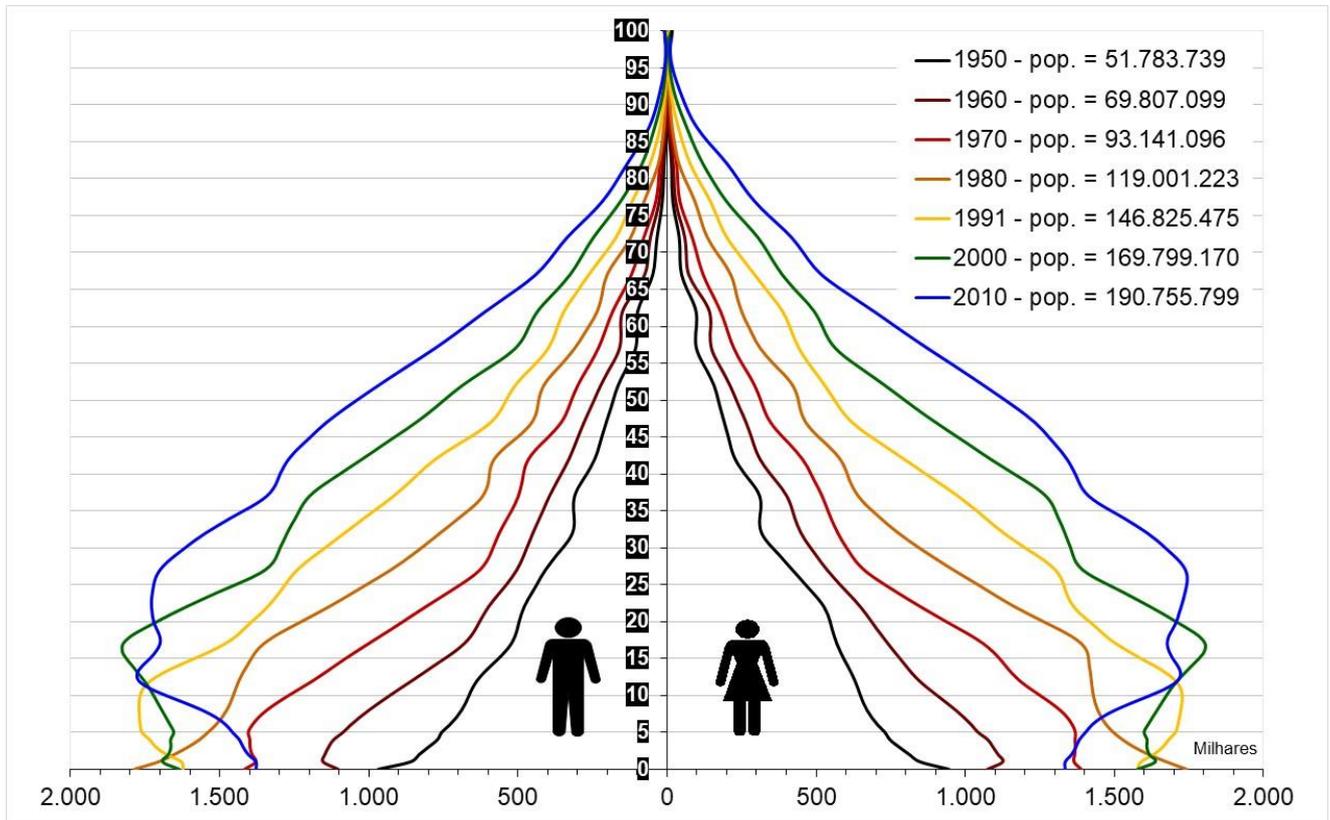
Na maioria dos trabalhos de interpolação, o interesse maior está nos próprios pontos interpolados, e um procedimento que produz tendências suaves é logicamente mais robusto do que um que força um número especificado de derivações a ser igual nos pontos de junção (nós). Com isso, as duas curvas sobrepostas podem ser ajustadas de maneira a minimizar os quadrados de uma certa ordem de diferenças, dentro da faixa de interpolação. Beers (1944) fez isso considerando a minimização das quintas diferenças para uma fórmula de seis termos. O método de Beers geralmente produz resultados mais suaves do que aqueles obtidos a partir das habituais fórmulas de interpolação osculatória. Nesse método, o somatório da população por idade ajustada é equivalente ao total de pessoas do grupo etário quinquenal original do censo demográfico.

O *Gráfico 1* apresenta as pirâmides populacionais ajustadas sobrepostas para o Brasil, para os sete censos demográficos de 1950 até 2010. Esse tipo de gráfico permite uma visualização conjunta da evolução das coortes de indivíduos ao longo dos anos e alterações nas componentes mortalidade, fecundidade e migração. Percebe-se claramente o aumento considerável do volume populacional brasileiro no período 1950-2010, onde a população passou de 51.783.739 de indivíduos em 1950, para 190.755.799 em 2010, quase que quadruplicando o seu valor em sessenta anos de história. Até o ano de 1980, a estrutura populacional era de uma pirâmide clássica (base larga e cume estreito), com cada grupo etário posterior com menor número de indivíduos quando comparado ao grupo etário anterior, resultado da alta fecundidade das mulheres brasileiras de mais de seis filhos por mulher, em média, até o início da década de 1960, declinando até valores um pouco acima do nível de reposição, de 2,1 filhos por mulher, já na virada do século, no ano de 2000 (TFT de 2,39 filhos por mulher – IBGE, 2013a). A partir de 1991, observa-se um estreitamento da base da pirâmide populacional, ocorrido em função da queda da fecundidade, que atingiu patamares abaixo do nível de reposição no Censo Demográfico de 2010 (TFT de 1,87 filhos por mulher – IBGE, 2013a). O *Gráfico 1* mostra, também, tanto o envelhecimento populacional ocorrido no Brasil em função de um número proporcionalmente cada vez menor de crianças e jovens *vis-à-vis* adultos e idosos, notadamente depois do Censo Demográfico de 1991, como também o aumento na longevidade de homens e mulheres, com uma proporção crescente de indivíduos de cada coorte chegando às idades consideradas avançadas.

---

Modified apesar de terem a propriedade de suavizarem mais os dados originais, removendo a maioria das ondulações, tem o custo de não replicar os totais populacionais no grupo etário quinquenal.

Gráfico 1 – Brasil – Pirâmides Populacionais Ajustadas Sobrepostas – 1950-2010  
(números absolutos – em milhares de pessoas)



Fonte: IBGE - Censos Demográficos de 1950, 1960, 1970, 1980, 1981, 2000 e 2010

Para a aplicação dos métodos de projeção da mortalidade apresentados no capítulo 4, a população por sexo e idade simples (0 até 100+) em 1º de julho de cada ano, no período 1950-2010, para BR e GR's, foi estimada via interpolação log-linear das suas correspondentes em dois CD's consecutivos, considerando as respectivas datas-base dos mesmos (vide *Tabela 2*).

### 3.2) Tábuas de Mortalidade do IBGE

Os insumos base para todo o trabalho desenvolvido ao longo desta tese foram as  ${}_nM_x$ 's oriundas das tábuas abreviadas construídas pelo IBGE, para os anos de 1980, 1991, 2000 e 2010. Importante nesse tópico apresentar, também, um pouco da história da construção dessas tábuas, as metodologias utilizadas pelo Instituto, bem como compará-las com aquelas construídas para o Brasil por instituições de renome internacional, como a ONU, CELADE e IHME.

### 3.2.1) Um breve histórico sobre as tábuas de mortalidade do IBGE

O IBGE possui tradição histórica de longa data na construção de tábuas de mortalidade, com estudos que vêm desde a época do estatístico, demógrafo e economista italiano Giorgio Mortara (Mortara,1947), passando pelas importantes contribuições Luiz Armando de Medeiros Frias (Frias,1974) e sua parceria com Valéria da Motta Leite em Frias & Leite (1974), dentre outros.

Conforme é sabido, a construção das tábuas de mortalidade parte do cálculo das Taxas Específicas de Mortalidade ( ${}_nM_x$ ), que dependem de dois insumos básicos: o numerador do cálculo da taxa, que são os óbitos, e o denominador do cálculo da taxa, que é a população exposta ao risco de morte, normalmente aproximada pela população no meio do ano (em 1º de julho). No Brasil, existem duas fontes básicas das informações sobre óbitos<sup>15</sup>: 1) as Estatísticas do Registro Civil administradas pelo IBGE via coleta de dados nos cartórios de todo o país e disponibilizadas desde 1974; e 2) o Sistema de Informação sobre Mortalidade (SIM), administrado pelo Ministério da Saúde e disponível desde 1979. Já em relação à população exposta ao risco de morte, as informações são obtidas nos próprios censos demográficos.

Aqui cabe as ressalvas de que tanto o numerador quanto o denominador do cálculo das  ${}_nM_x$ 's, além de serem oriundos de fontes distintas, o que por si só já configura uma primeira limitação, visto que a qualidade dessas informações não é necessariamente a mesma, possuem também limitações relacionadas à sua cobertura incompleta (sub-registro dos óbitos e subenumeração censitária, inclusive diferencial por idade, sexo e localidade), bem como problemas ligados à própria declaração da idade nos censos demográficos (dígito preferencial, translado e omissão das idades).

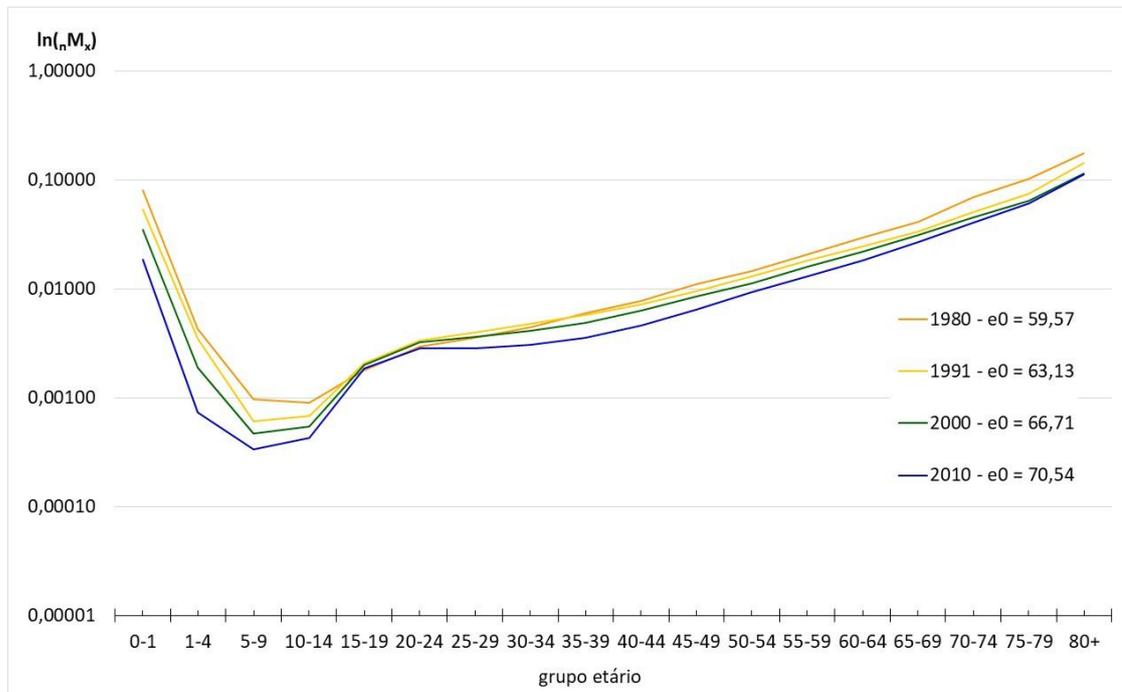
Com o advento da coleta das informações de óbitos de forma sistematizada, trabalhos mais robustos foram realizados pelo IBGE com a publicação das *Tábuas-Modelo de Mortalidade* para o Brasil em 1981, de autoria de Luiz Armando de Medeiros Frias e Paulo Rodrigues (IBGE, 1981), bem como trabalhos mais recentes, como o publicado em 2005 (IBGE, 2005), onde o Instituto além de construir as tábuas para o Brasil, Grandes Regiões e Unidades da Federação, para o ano de 2000, fez uma revisão completa das tábuas de mortalidade de 1980 e 1991, obtendo uma compatibilidade geral, além do trabalho publicado em 2013 (IBGE, 2013b), onde foram construídas as tábuas para o Censo Demográfico de 2010.

---

<sup>15</sup> Ainda que, por exemplo, no Censo Demográfico de 1980 tivesse sido feita, no questionário da amostra, a pergunta se houve óbito no domicílio (e a idade do falecido) e no Censo Demográfico de 2010 essa mesma indagação fora feita no questionário do universo, não é de praxe esse tipo de indagação, o que impossibilita a construção de uma série histórica, podendo as análises e comparações serem feitas apenas de forma pontual.

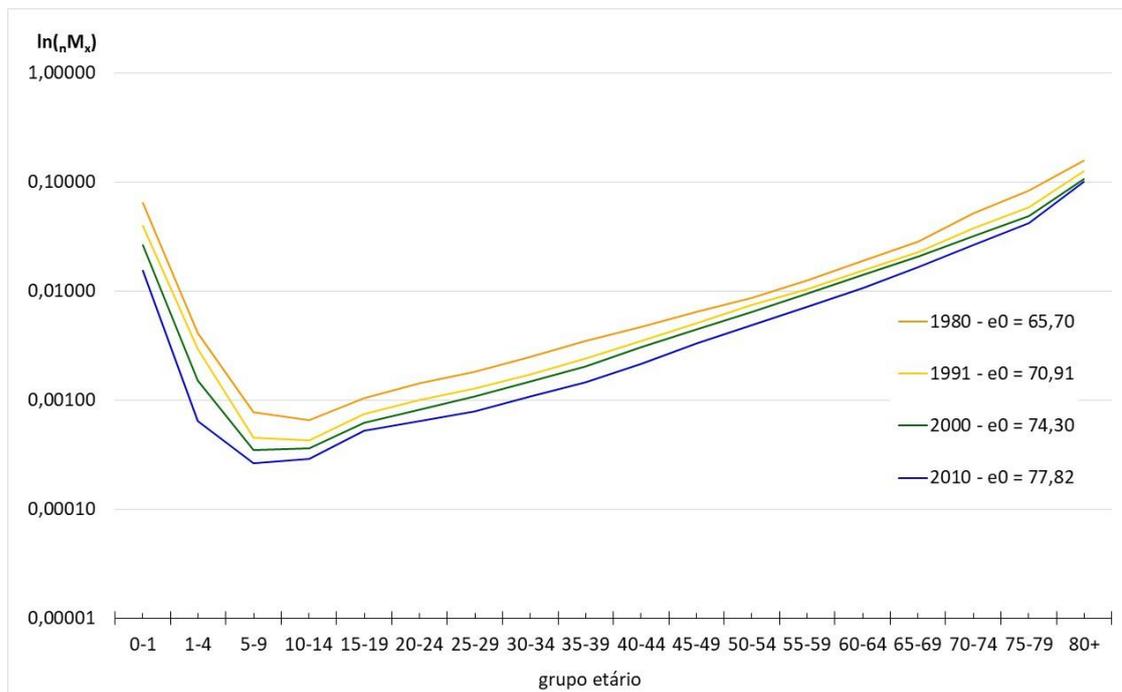
Essas duas últimas publicações do IBGE representam os dados básicos a serem utilizados no trabalho aqui proposto. O *Gráfico 2* e o *Gráfico 3*, a seguir, apresentam para homens e mulheres, respectivamente, as  ${}_nM_x$ 's (em escala ln) do Brasil em 1980, 1991, 2000 e 2010 e as respectivas  $e_0$  subjacentes às referidas tábuas abreviadas.

Gráfico 2 – Brasil – Taxas Centrais de Mortalidade ( ${}_nM_x$ 's – escala ln) – Homem



Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade de 1980, 1991, 2000 e 2010

Gráfico 3 – Brasil – Taxas Centrais de Mortalidade ( ${}_nM_x$ 's – escala ln) – Mulher



Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade de 1980, 1991, 2000 e 2010

Analisando as taxas masculinas, percebe-se o aumento das  $nM_x$ 's no período intercensitário 1980-1991, para os grupos etários de 15-19, 20-24, 25-29 e 30-34 (variação média de 1,06% para cima), sendo as taxas decrescentes para todos os outros grupos. Para os períodos 1991-2000 e 2000-2010 as taxas masculinas são sempre decrescentes, para todos os grupos etários<sup>16</sup>, todavia o *accident hump* acaba ficando mais proeminente, visto que a taxa de variação para baixo, relativa à mortalidade dos grupos etários destes adultos jovens (de 15-34 anos) foi bem menor no período 1991-2000, quando comparada às quedas observadas nos outros grupos etários, situação essa mantida no período subsequente de 2000-2010.

Em relação às mulheres, as taxas são sempre decrescentes para todos os grupos etários nos três períodos intercensitários 1980-1991, 1991-2000 e 2000-2010, indicando uma melhoria geral na mortalidade feminina.

Finalizando este tópico, merece destaque o documento divulgado recentemente pelo IBGE: “*O Centro Brasileiro de Estudos Demográficos – Uma trajetória de estudos populacionais no IBGE*” (IBGE, 2017), que registra de forma muito interessante parte da história do Instituto no estudo da demografia e suas componentes mortalidade, fecundidade e migração, com importantes contribuições de pesquisadores que trabalharam por muitos anos com afinco e dedicação em prol do desenvolvimento da demografia no país.

### **3.2.2) Aspectos metodológicos da construção das tábuas de mortalidade do IBGE**

Para ficarem claros os passos tomados pelo IBGE na construção de suas tábuas de mortalidade, a ideia proposta neste tópico é apresentar os critérios metodológicos, em separado, para as publicações de 2005 (tábuas de 1980, 1991 e 2000) e 2013 (tábuas de 2010), indicando aquilo que fora feito pelo Instituto, tanto para o Brasil, quanto para as Grandes Regiões e Unidades da Federação (UF's), nas referidas publicações. Parte das técnicas aplicadas pelo Instituto na construção de suas tábuas de mortalidade encontra-se disponível no Manual X das Nações Unidas (UN, 1983) e no livro mais atualizado *Ferramentas para Estimativas Demográficas* (Moultrie et al., 2013), publicado pela *International Union for the Scientific Study of Population* (IUSSP).

---

<sup>16</sup> Na verdade, a variação da taxa de mortalidade do grupo aberto 80+ fora ligeiramente positiva em 0,27% para o período de 2000-2010. Todavia essa pequena variação deveu-se, basicamente, à transformação do grupo aberto 90+ da tábua de 2010 para grupo aberto 80+, de forma a torná-la compatível com as tábuas de 1980, 1991 e 2000.

Cabe a observação de que, apesar da qualidade das informações necessárias para a construção de tábuas de mortalidade ter evoluído muito no Brasil desde 1980, diversas técnicas para a correção dos problemas existentes nos dados básicos ainda necessitam ser utilizadas. Essas metodologias carregam consigo determinados pressupostos que não necessariamente se cumpriram no Brasil ao longo do período de 1980-2010.

Para a publicação de 2005, as Tábuas de Mortalidade resultaram de uma ampla discussão durante o oficina de trabalho entre técnicos da Coordenação de População e Indicadores Sociais (COPIS/DPE/IBGE) e do Centro Latinoamericano y Caribeño de Demografía (CELADE/CEPAL/Nações Unidas), realizada entre 24 e 28 de março de 2003, em Santiago do Chile (IBGE, 2005).

O problema do não registro de óbitos existente nos países em vias de desenvolvimento faz com que surja a necessidade de obtenção de um fator de correção para ser aplicado à distribuição das mortes, a fim de torná-la o mais próximo possível da realidade. A correção perfeita em parte das vezes nem sempre é possível, dadas as limitações e pressupostos embutidos nas metodologias, que podem não se comprovar na prática.

Para a correção dos óbitos acima das idades dos 5 anos no caso do Brasil, o IBGE optou por utilizar a metodologia do *Growth Balance*, proposta originalmente por William Brass (Brass, 1975; UN, 1983). O referido método tem como principais pressupostos: 1) a necessidade da estabilidade populacional<sup>17</sup>; 2) a população deve ser fechada; 3) o grau de cobertura das mortes deve ser constante para toda a estrutura de óbitos observada (fator K invariável); 4) a cobertura censitária deve ser equivalente em dois censos consecutivos; e 5) não devem existir erros na declaração de idade dos óbitos.

Segundo o IBGE (2005), durante as discussões em Santiago do Chile, foi consensual ser muito provável o não cumprimento, em situações reais, do pressuposto de Brass relativo à invariabilidade do fator K para a população de 5 anos ou mais, bem como a estabilidade populacional. Além disso, não se espera que a cobertura dos óbitos perca qualidade ao longo do período 1980-2000, o que ocorreu nas estimativas preliminares do grau de cobertura dos óbitos<sup>18</sup>. Partindo dessas premissas, foram aplicadas reduções nos fatores de correção K em

---

<sup>17</sup> Situação resultante quando as componentes da dinâmica demográfica, mortalidade e fecundidade, são constantes ao longo do tempo.

<sup>18</sup> Vide a tabela 1 da publicação de 2005.

1991 e 2000<sup>19</sup>, a fim de considerar a melhor qualidade do registro de óbitos da população adulta e idosa *vis-à-vis* a população jovem e adulta jovem, até porque, não raramente, existem direitos a serem horizontalmente ou verticalmente transmitidos aos beneficiários quando da morte da pessoa<sup>20</sup>, gerando a necessidade da família possuir um documento comprobatório que ateste o falecimento do indivíduo.

Como o subregistro dos óbitos para os menores de 5 anos de idade é muito superior ao da população de 5 ou mais anos, o que inviabiliza a aplicação de metodologias como o *Brass Growth Balance*, a alternativa utilizada pelo IBGE foi aplicar o método Indireto dos *Filhos Sobreviventes* proposto por Brass (Brass et al., 1968; Moultrie et al., 2013), variante sugerida por Trussell (1975), que possui como pressupostos básicos: 1) os padrões etários de fecundidade e mortalidade infantil da população são adequadamente representados pelos padrões do modelo, utilizados no desenvolvimento do método; 2) em qualquer período de tempo, a mortalidade infantil não varia em função do grupo etário em que a mãe se encontra; 3) não existe correlação entre o risco de mortalidade de crianças e a sobrevivência das mães, migrantes ou não migrantes, na população; 4) qualquer mudança ocorrida na mortalidade infantil no passado recente foi gradual e unidirecional; e 5) os números médios de crianças nascidas por idade materna, no período (ou pela duração do casamento ou tempo desde o primeiro nascimento), refletem adequadamente os padrões de nascimentos das coortes das mães.

Segundo o IBGE (2005), a variante de Trussell foi aplicada às informações provenientes dos Censos Demográficos de 1980, 1991 e 2000, e das PNAD's de 1972, 1973, 1976, 1977, 1978, 1984, 1986, 1992, 1993, 1995, 1997, 1998, 1999 e 2001, da DHS de 1996 e das Estatísticas Vitais do RC, de 1984 a 1997, formando um conjunto de estimativas de  ${}_1q_0$  relativas ao período 1960-2000, para a população de ambos os sexos combinados (meninos e meninas). Tais estimativas foram suavizadas através de médias móveis, de maneira a eliminar possíveis flutuações derivadas da má declaração quanto ao número de *Filhos Tidos Nascidos Vivos* (FTNV) e *Filhos Sobreviventes* (FS). Em seguida, foi ajustada uma função logística. Para a decomposição por sexo em separado, foram localizados na família Oeste das tábuas-modelo de Ansley Coale & Paul Demeny (Coale & Demeny, 1966) os níveis correspondentes à função  $l_1$  (nº de sobreviventes à idade exata de 1 ano), para ambos os sexos, a partir de onde foram verificados os valores de  $l_1$ , para homens e mulheres. A obtenção das estimativas de  ${}_4q_1$  seguiu

---

<sup>19</sup> Vide a tabela 2 da publicação de 2005.

<sup>20</sup> Como seguros de vida e acidentes pessoais, pensões previdenciárias, etc.

procedimento análogo, ou seja, considerando  ${}_1q_0$ , foi realizada uma interpolação linear na família Oeste para a obtenção das  ${}_4q_1$  de ambos os sexos, de homens e mulheres<sup>21</sup>.

Os fatores de correção de óbitos resultantes do método do *Growth Balance* possibilitaram o cálculo das taxas específicas de mortalidade ( ${}_nM_x$ ) corrigidas, para as idades acima dos 5 anos, por grupos quinquenais até o grupo aberto 80+. Essas  ${}_nM_x$ 's foram convertidas, então, em probabilidades de morte a partir da transformação sugerida por Reed & Merrel (1939), onde

$${}_5q_x = e^{(-5 \cdot {}_5M_x - 0,008 \cdot 5^3 \cdot {}_5M_x^2)}.$$

Como nos primeiros anos de idade (0-1 e 1-4) a hipótese da distribuição uniforme dos óbitos não se cumpre, o Instituto optou por utilizar os fatores de separação dos óbitos em função das relações sugeridas por Coale & Demeny (1966), e também descritas em IBGE (2005).

De posse das probabilidades de morte na infância  ${}_1q_0$  e  ${}_4q_1$  e daquelas obtidas pela citada transformação sugerida por Reed & Merrel (1939), foram construídas para o Brasil as tábuas de mortalidade de homens, mulheres e ambos os sexos para os anos de 1980, 1991 e 2000<sup>22</sup>, até o grupo aberto 80+.

Em relação às GR's e UF's, foram geradas as distribuições das populações por sexo e grupos de idade (exposição ao risco de morte) considerando os Censos Demográficos de 1980, 1991 e 2000 e para os óbitos para os triênios de 1979-1980-1981, 1990-1991-1992 e 1999-2000-2001, em função das Estatísticas do RC. Segundo o IBGE (2005), não foram distribuídos os indivíduos com idade ignorada, da população declarada do Censo Demográfico de 1980, e nem dos óbitos com idade ignorada, em nenhum dos triênios utilizados. Outro detalhe a ser mencionado é que, apesar de comumente ser utilizada a população no meio do ano (ou seja, em 01/07), o IBGE optou por trabalhar com os dados efetivamente observados nas datas de referência dos Censos Demográficos de 1980 (em 01/08/1980), de 1991 (em 01/09/1991) e de 2000 (em 01/08/2000), o que, em linhas gerais, não acarreta em diferenças significativas nas tábuas construídas, caso todas as populações fossem posicionadas em 1º de julho.

No caso das UF's e GR's existem diferenciais significativos em relação ao sub-registro dos óbitos, bem como à drástica mudança ocorrida no padrão da curva de mortalidade, em grande parte dessas localidades, no período 1980-1991-2000, em função do aumento da mortalidade

<sup>21</sup> Vide os resultados na tabela 4 da publicação de 2005.

<sup>22</sup> Disponíveis no anexo da publicação.

pelas chamadas causas externas<sup>23</sup>, ocorrida no processo de urbanização e metropolização das cidades. Nesse período, não ocorreu a necessária e obrigatória contrapartida de políticas públicas por parte do Estado com o foco no bem-estar (*welfare*) e na segurança da população, acabando por gerar um calombo (*accident hump*) na função de mortalidade, principalmente entre os homens adultos jovens (geralmente de 15-39 anos). Com isso, diferentemente do caso do Brasil como um todo, em que foi aplicada uma metodologia única (*Growth Balance*) para a correção do sub-registro dos óbitos nas idades acima dos 5 anos, no caso das UF's e GR's, o IBGE optou por utilizar, além do método do *Growth Balance* (GB) (Brass, 1975; UN, 1983), o método de Preston & Coale (Preston et al., 1980), que é baseado nos mesmos pressupostos do GB descritos anteriormente, e o método de Courbage & Fargues (1979), que é baseado nos seguintes pressupostos: 1) da existência de uma certa idade a partir da qual a taxa de subregistro de óbitos não varia significativamente; e 2) da existência de uma família de tábuas-modelo, à qual esses óbitos estão relacionados (e, neste caso, não tendo como pressuposto a necessidade de estabilidade populacional). Segundo o IBGE (2005), várias simulações foram realizadas para decidir o fator que melhor se adequava a cada localidade, sendo que o critério de escolha do método e fatores de correção para cada GR<sup>24</sup> foi feito levando-se em consideração, tanto os fatores obtidos em nível nacional para os anos de 1980, 1991 e 2000 (valores balizadores), como os fatores de redução para os grupos de idades acima dos 35 anos, conforme o mesmo procedimento realizado para o Brasil.

Cabe ressaltar que, conforme esperado, como os fatores de correção para cada GR foram obtidos de forma independente, a soma dos óbitos corrigidos não reproduzia, na íntegra, os óbitos gerados para o Brasil, de forma independente. Neste caso, o IBGE procedeu a uma compatibilização destes óbitos em consonância com os óbitos já estimados a nível nacional<sup>25</sup>. Para chegar ao fator final de correção de óbitos de forma compatibilizada, foi calculada então a razão entre o total de óbitos compatibilizados e o total de óbitos observados em cada GR<sup>26</sup>, sendo que para as 27 UF's o procedimento realizado foi análogo.

Em relação ao cálculo da mortalidade infantil ( $1q_0$ ) para as GR's e UF's, tal qual em nível nacional, foi aplicado o método dos *Filhos Sobreviventes* de Brass (Brass et al., 1968; Moultrie et al., 2013), variante sugerida por Trussell (1975), sendo adotado, também, um procedimento

---

<sup>23</sup> Principalmente homicídios, acidentes de trânsito, suicídios, etc.

<sup>24</sup> Vide a tabela 5 da publicação de 2005.

<sup>25</sup> Vide a tabela 7 da publicação de 2005.

<sup>26</sup> Vide a tabela 8 da publicação de 2005.

para a compatibilização dos totais de óbitos gerados, de forma que a soma das partes fosse equivalente ao todo, ou seja, a soma dos óbitos infantis nas UF's fosse igual ao total dos óbitos nas GR's em que a UF estivesse localizada, que, por sua vez, fosse igual à soma dos óbitos do Brasil, nos anos de 1980, 1991 e 2000. Já para as probabilidades de morte entre 1 e 5 anos ( ${}_4q_1$ ), segundo o IBGE (2005), as mesmas foram calculadas em função da relação  ${}_4q_1 = ({}_5q_0 - {}_1q_0) / {}_1p_0$ , considerando as probabilidades de morte na infância,  ${}_5q_0$ , calculadas nos trabalhos do demógrafo Celso Simões para os anos de 1980, 1991 e 2000, utilizando os procedimentos de compatibilização, de forma que a soma das partes também equivalesse ao todo, tal qual para a mortalidade infantil.

Mais uma vez, calculadas as probabilidades de morte na infância  ${}_1q_0$  e  ${}_4q_1$  e aquelas a partir dos 5 anos de idade, obtidas a partir da transformação sugerida por Reed & Merrel (1939), foram construídas para as GR's e UF's as tábuas de mortalidade de homens, mulheres e ambos os sexos, para os anos de 1980, 1991 e 2000, até o grupo aberto 80+<sup>27</sup>.

Para a publicação de 2013 do IBGE, algumas inovações foram feitas pelo Instituto para a construção das tábuas de mortalidade de 2010, como a utilização dos dados de óbitos tanto do RC, quanto do SIM/MS, além da expansão para o grupo aberto 90+. Segundo o IBGE (2013b), o Censo Demográfico de 2010 inovou, ao introduzir no questionário do universo a investigação sobre a ocorrência de óbitos no domicílio, indagação feita até então apenas no Censo Demográfico de 1980, no questionário da amostra. Em 2010, o quesito teve como objetivos principais permitir a comparação com as informações de óbitos oriundas do RC e do SIM, e contribuir na construção de Tábuas de Mortalidade desagregadas por situação do domicílio e, se fosse o caso, por outras variáveis de natureza demográfica e socioeconômica.

Para a construção da tábua de mortalidade do Brasil em 2010, foram investigadas as três fontes disponíveis da informação sobre a distribuição dos óbitos por sexo e grupos de idade (RC, SIM e CD) e, depois de várias análises, optou-se pela utilização dos óbitos oriundos do SIM, cabendo destacar que o procedimento realizado nas tábuas anteriores de 1980, 1991 e 2000, de utilizar a média dos óbitos ocorridos no triênio, não pode ser realizado, pois as informações do RC e do SIM de 2011 ainda não tinham sido disponibilizadas à época, de forma que foram utilizadas apenas as informações de óbitos do próprio ano de 2010.

---

<sup>27</sup> Vide o anexo da publicação de 2005.

Em relação à correção necessária do sub-registro dos óbitos, utilizou-se, também para o Brasil, o método do *Growth Balance* de Brass, sendo que, diferentemente das tábuas construídas para os anos de 1980, 1991 e 2000, a idade além da qual o IBGE considerou o sub-registro constante passou para 1, e não mais 5 anos. Segundo o IBGE (2013b), esta mudança se justificou pela melhoria significativa da cobertura de óbitos das crianças de 1 a 4 anos. Além disso, diferentemente da construção das tábuas anteriores, em que foram aplicadas reduções nos fatores de correção (K) dos óbitos para idades acima de 35 anos, pelas razões já expostas, para 2010, a aplicação destes fatores deixou de ser necessária, já que os óbitos de muitas UF's, principalmente aquelas das Regiões Sudeste e Sul do país, não sofreram qualquer tipo de correção, aceitando-se como completa a informação proveniente do SIM<sup>28</sup>.

Em relação à correção do sub-registro das crianças de 0-1 ano (mortalidade infantil), aqui, mais uma vez, para a população de ambos os sexos (meninos e meninas), foi aplicado o método dos *Filhos Sobreviventes* de Brass, Variante de Trussell.

Tal qual feito anteriormente em 2005 (IBGE, 2005), a técnica de Trussell (1975) foi aplicada às informações provenientes dos CD's de 1980, 1991, 2000 e 2010, das PNAD's realizadas em 1972, 1973, 1976, 1977, 1978, 1984, 1986, 1992, 1993, 1995, 1997, 1998, 1999, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008 e 2009, da DHS realizada em 1996, e do RC no período de 1984 a 1997, formando, mais uma vez, um conjunto de estimativas de  ${}_1q_0$  referentes ao período 1960-2010. Seguindo o mesmo procedimento descrito na publicação de 2005, tais estimativas foram suavizadas pela aplicação de médias móveis, de maneira a eliminar possíveis flutuações derivadas da má declaração quanto ao número de *Filhos Tidos Nascidos Vivos* (FTNV) e *Filhos Sobreviventes* (FS), insumos básicos para a aplicação da técnica indireta, tendo sido ajustada mais uma vez uma função logística. Segundo o IBGE (2013b), após esse procedimento, pouca variabilidade foi encontrada entre os valores observados e ajustados ao longo do período considerado, proporcionando uma estimativa bastante satisfatória para as  ${}_1q_0$ , e possibilitando o cálculo dos seus valores para os anos censitários<sup>29</sup>.

Como a  ${}_1q_0$  fora obtida para a população de ambos os sexos combinados, o procedimento óbvio na sequência seria aplicar a mesma metodologia para meninos e meninas. No entanto os resultados obtidos pela aplicação da Variante de Trussell (1975) apontaram para uma

---

<sup>28</sup> Vide a tabela 2 da publicação de 2013 com os fatores de correção calculados para o Brasil em 2010, para homens e mulheres.

<sup>29</sup> Vide o gráfico 2 da publicação de 2013 com o ajuste logístico realizado.

mortalidade infantil de meninos menor do que a de meninas, situação esta pouco provável de ser verídica, já que, historicamente, no Brasil a mortalidade infantil sempre foi maior para os meninos. Em função do inesperado resultado encontrado através da aplicação da Variante de Trussell (1975) por sexo<sup>30</sup>, o IBGE utilizou o seguinte procedimento para a desagregação da mortalidade infantil de meninos e meninas: 1) foi calculado o quociente entre as informações de 2010 de óbitos de menores de 1 ano oriundas do SIM e dos nascidos vivos oriundas do SINASC, ambas disponibilizadas pelo MS, para ambos os sexos ( $TMI^{ambos} = \frac{Óbitos_{0-1}^{ambos}}{Nascidos\ Vivos^{ambos}}$ ), meninos ( $TMI^{meninos} = \frac{Óbitos_{0-1}^{meninos}}{Nascidos\ Vivos^{meninos}}$ ) e meninas ( $TMI^{meninas} = \frac{Óbitos_{0-1}^{meninas}}{Nascidos\ Vivos^{meninas}}$ ), fornecendo uma estimativa acerca da Taxa de Mortalidade Infantil para estes três grupos distintos; 2) foram calculados os quocientes  $TMI^{meninos}/TMI^{ambos}$  e  $TMI^{meninas}/TMI^{ambos}$ ; e 3) os resultados obtidos no passo anterior, foram aplicados à Taxa de Mortalidade Infantil para ambos os sexos obtida em função do ajuste logístico descrito, resultando, assim, nas TMI's de meninos e meninas para o Brasil em 2010<sup>31</sup>.

De posse das TMI's ( ${}_1q_0$ ) calculadas e daquelas obtidas em função do procedimento sugerido por Reed & Merrel (1939), aplicado nas TEM's ( ${}_nM_x$ ) corrigidas e transformando as mesmas em probabilidades de morte ( ${}_nq_x$ ), foram construídas para o Brasil as tábuas de mortalidade de homens, mulheres e ambos os sexos para o ano de 2010, até o grupo aberto 90+<sup>32</sup>.

Cabe ressaltar que, tal qual para as tábuas construídas anteriormente para o Brasil, GR's e UF's em 1980, 1991 e 2000, o denominador para o cálculo das  ${}_nM_x$ 's foi a população observada na própria data de referência do Censo Demográfico de 2010, 01/08/2010, não tendo sido deslocada para o meio do ano (01/07), o que não acarreta em diferenças significativas nas tábuas construídas.

Conforme já citado, a cobertura do registro dos óbitos no Brasil melhorou muito de 1980 a 2010 e, com isso, para determinadas UF's o IBGE calculou em 2010 as TEM's ( ${}_nM_x$ ) de forma direta, considerando o quociente entre os óbitos e a população exposta ao risco, inclusive para os menores de 1 ano de idade.

---

<sup>30</sup> O resultado inesperado muito provavelmente foi causado por problemas nos dados básicos e/ou pela quebra dos pressupostos inerentes à técnica.

<sup>31</sup> Vide a tabela 3 da publicação de 2013 com as TMI's calculadas.

<sup>32</sup> Vide o anexo 1 da publicação de 2013.

Em relação às GR's e UF's em 2010, depois de vários estudos e análises realizadas a partir dos dados básicos que consubstanciam a construção das tábuas de mortalidade, o IBGE optou por dar um tratamento diferenciado, cuja explicação segue na sequência.

Para a correção do sub-registro dos óbitos para os indivíduos maiores de 1 ano de idade (quando utilizada em determinada UF), depois de vários testes, optou-se apenas pela metodologia do *Growth Balance* de Brass, a única a apresentar resultados mais compatíveis com a realidade brasileira.

Para as Regiões Sul, Sudeste e Centro-Oeste, a fonte dos dados de óbitos selecionada pelo IBGE foi o SIM, enquanto que para as Regiões Norte e Nordeste foi utilizado o RC.

Dentro da Região Sudeste, os estados de SP e RJ não sofreram qualquer tipo de correção, nem para os menores de 1 ano de idade, nem para os maiores, tanto para homens, quanto para mulheres, sendo suas  ${}_nM_x$ 's calculadas de forma direta. Para MG e ES, os fatores de correção para os óbitos de menores de 1 ano de idade foram obtidos pelo mesmo procedimento utilizado em nível nacional e já descrito anteriormente. No caso de MG foram corrigidos os óbitos dos maiores de 1 ano para homens e mulheres. Já para o ES essa correção foi feita apenas para o sexo feminino.

Em relação à Região Sul, os óbitos computados no RS, SC e PR não sofreram qualquer tipo de correção, tendo a estrutura proveniente do SIM sido aceita na íntegra, e, nesse caso, as suas  ${}_nM_x$ 's foram também calculadas de forma direta, tal qual no RJ e SP.

Na Região Centro-Oeste, o estado de MS e o DF não tiveram qualquer tipo de correção para os óbitos de maiores de 1 ano de idade, sendo aceita em sua plenitude a estrutura proveniente do SIM. Para os óbitos dos menores de 1 ano de idade no estado do MS, foi utilizado o mesmo tipo de ajuste logístico realizado para o Brasil, sendo que para o DF, como o resultado do ajuste foi considerado elevado pelos técnicos do IBGE, optou-se pelo cálculo direto das TMI's. Este cálculo, feito de forma direta, resultou em fatores de correção menores que 1, significando dizer que no caso do DF foi adotado pelo Instituto a palatável hipótese do *sobregistro de óbitos*<sup>33</sup>, que seriam provenientes das localidades no entorno de Brasília. Para os estados de MT e GO, os homens e mulheres, maiores e menores de 1 ano de idade, tiveram correção no efetivo de óbitos observados, através das mesmas metodologias utilizadas para o Brasil.

---

<sup>33</sup> Ocasionado pelo fenômeno conhecido como "invasão de óbitos".

Com isso, para as Regiões Sul, Sudeste e Centro-Oeste, os óbitos por sexo e grupo de idade foram obtidos pela soma dos óbitos corrigidos (ou não, dependendo da UF) de suas UF's componentes, possibilitando, então, a construção de todas as tábuas de mortalidade referentes às unidades em tela.

Segundo o IBGE (2013b), as Tábuas de Mortalidade para as Regiões Norte e Nordeste tiveram tratamento diferente das demais, tendo sido construídas de forma independente, diferentemente do que fora feito para as Regiões Sul, Sudeste e Centro-Oeste.

Para as Regiões Norte e Nordeste, populações de homens e mulheres e indivíduos com idade acima e abaixo de 1 ano de idade, foram seguidos os mesmos passos metodológicos realizados para o Brasil, lembrando, mais uma vez, que no país como um todo foram utilizados os dados de óbitos do SIM, enquanto que para as duas regiões menos desenvolvidas do país, os dados de óbitos foram aqueles provenientes do RC.

De posse dos óbitos corrigidos (ou não, dependendo da UF e GR) foi feita uma compatibilização dos mesmos, de forma que a soma dos óbitos de todas as Grandes Regiões (Norte e Nordeste – de forma independente, e Sul, Sudeste e Centro-Oeste – por soma dos óbitos das UF's) equivalesse à soma dos óbitos no Brasil (de forma independente).

Em relação às UF's pertencentes às Regiões Norte e Nordeste, os procedimentos utilizados para a correção dos óbitos de homens e mulheres, para idades acima e abaixo de 1 ano, foram os mesmos citados anteriormente para o Brasil de forma independente, sendo realizada também a compatibilização dos mesmos, de forma que a soma das mortes nas UF's equivalesse aos totais obtidos em suas GR's, calculadas de forma independente.

Depois de realizados todos os ajustes e aplicações metodológicas descritas anteriormente e compatibilizados os óbitos de forma que a soma das partes equivalesse ao todo, foram construídas todas as tábuas de mortalidade para 2010.

### **3.2.3) Comparação das Tábuas de Mortalidade do IBGE com aquelas construídas para o Brasil por Instituições Internacionais**

Nessa seção é apresentada uma análise comparativa das tábuas de mortalidade oficiais, por sexo, construídas pelo IBGE (2005, 2013), que serviram de insumo base para o trabalho aqui

realizado, com aquelas desenvolvidas para o Brasil por instituições internacionais, como as Nações Unidas (UN, 2017), o CELADE (2004) e o IHME.

O *World Population Prospects* é o documento, produzido no *Department of Economic and Social Affairs* da ONU, que fornece uma análise abrangente das tendências demográficas globais e perspectivas para o futuro, de todos os países do mundo, inclusive o Brasil. O WPP apresenta diversas informações acerca da população do país, além de estatísticas básicas e derivadas referentes às três componentes da dinâmica demográfica (mortalidade, fecundidade e migração). A informação disponibilizada no WPP é essencial para orientar as políticas destinadas a alcançar os novos objetivos de desenvolvimento sustentável nas mais diversas localidades, e fundamental para diversos países em desenvolvimento, que não possuem informações básicas confiáveis de sua população. As revisões do WPP ocorrem normalmente a cada dois anos. A última foi a de 2017 (UN, 2017), cujas tábuas de mortalidade abreviadas (grupo aberto 85+) para o Brasil (vide <https://esa.un.org/unpd/wpp/>) foram as utilizadas no presente comparativo.

O Centro Latino-Americano e Caribenho de Demografia (CELADE), Divisão de População da Comissão Econômica para a América Latina e o Caribe (CEPAL), é o órgão que conduz diversos estudos demográficos no âmbito da América Latina e Caribe. O referido centro tem, como alguns de seus objetivos, fornecer treinamento avançado na aplicação da demografia, estabelecer dados demográficos e metodologias uniformes a fim de assegurar a comparabilidade entre países, e gerar um sistema para o intercâmbio de informações sobre questões populacionais. Um dos principais produtos oferecidos pelo CELADE são as estimativas e projeções de população para a América Latina, elaboradas para o período 1950-2100, que permitem que os países sejam alocados nos diferentes estágios da transição demográfica, além de possibilitar a análise das tendências demográficas e os impactos futuros dessas mudanças na estrutura por sexo e idade da população. A mais recente revisão das projeções do CELADE para a América Latina é a de 2017, contemplando 20 países<sup>34</sup> (CELADE, 2017). Todavia, a última versão disponível em termos de relatório foi a de 2016 (CELADE, 2016). Outro estudo conduzido pelo CELADE diz respeito à construção de tábuas de mortalidade (grupo aberto 80+) para os países contemplados na projeção. As últimas tabelas

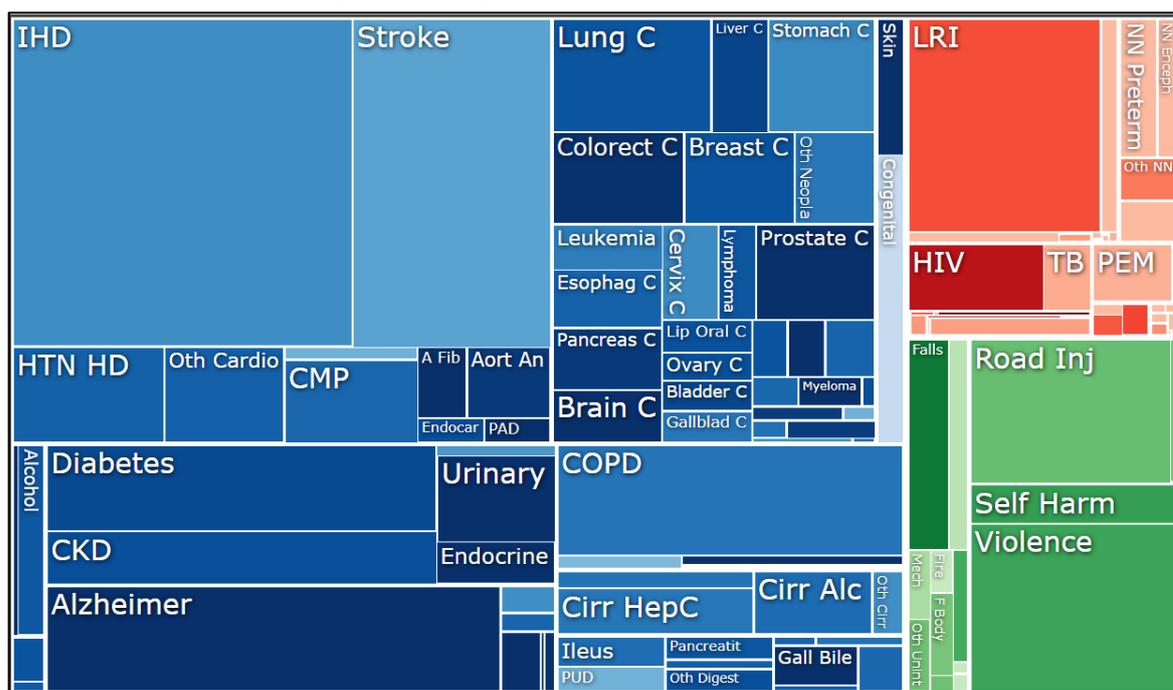
---

<sup>34</sup> São eles: Argentina, Bolívia, Brasil, Chile, Colômbia, Costa Rica, Cuba, Equador, El Salvador, Guatemala, Haiti, Honduras, México, Nicarágua, Panamá, Paraguai, Peru, República Dominicana, Uruguai e Venezuela.

para o Brasil disponíveis, datam de junho de 2004 (CELADE, 2004), quando da divulgação do Boletim Demográfico nº 74, tábuas estas utilizadas no comparativo desta seção.

O *Institute for Health Metrics and Evaluation* (IHME) é um instituto de pesquisa independente, com base na *University of Washington*, em Seattle, estado de Washington, Estados Unidos. O IHME trabalha na área de estatísticas globais de saúde e de avaliação do impacto da carga de doenças a que está sujeita uma sociedade. Segundo o próprio IHME cita em seu *site*, o instituto é guiado por cinco princípios básicos: excelência científica, relevância da política pública, imparcialidade, colaboração e compartilhamento do conhecimento. Um dos mais interessantes produtos oferecidos pelo IHME é o *Global Burden Diseases (GBD) Compare / Viz Hub* (<https://vizhub.healthdata.org/gbd-compare/>) que disponibiliza, dentre outras ferramentas gráficas, o *Treemap (causes)*, um *pie chart* retangular que apresenta, de forma iterativa, a carga de doenças, onde o tamanho de cada retângulo (*box*) é proporcional à carga da doença em referência. A hierarquia das causas de morte pode ser acessada por níveis. Quando o nível aumenta, os *boxes* permanecem no mesmo lugar no gráfico, mas são subdivididos para refletir o detalhamento. A ferramenta pode também apresentar o fator de risco e sua atribuição às causas de morte. O IHME disponibiliza na referida ferramenta a visualização para o Brasil e todas as UF's, com informações desde 1990. Por exemplo, o *Gráfico 4*, a seguir, mostra os óbitos em função da carga de doenças para a população total do Brasil, no ano de 2016.

Gráfico 4 – Brasil – Carga de Doenças – Ambos os Sexos, Todas as Idades, 2016, Mortes



Fonte: IHME

Além disso, na própria ferramenta *Viz Hub*, o IHME também disponibiliza tábuas de mortalidade anuais abreviadas para o Brasil (grupo aberto 90+) desde 1970 (<https://vizhub.healthdata.org/mortality/lifetables>), tábuas estas utilizadas no comparativo desta seção.

Para uniformizar a apresentação dos gráficos, o grupo aberto das  ${}_nM_x$ 's nas fontes de dados (IBGE, ONU, CELADE e IHME) foi uniformizado em 80+ (oitenta ou mais)<sup>35</sup> anos. O comparativo das  ${}_nM_x$ 's foi realizado para os anos censitários de 1980, 1991, 2000 e 2010, para homens e mulheres. Como as tábuas para o Brasil elaboradas pela ONU e pelo CELADE são disponibilizadas por período (1975-1980, 1980-1985,....., 1990-1995, 1995-2000, 2000-2005, 2005-2010, 2010-2015, etc), as mesmas foram alocadas nos pontos médios do intervalo (p.e. 2010-2015 equivale ao ponto 2012,5), a partir dos quais foi realizada uma interpolação log-linear das  ${}_nM_x$ 's, criando assim as estimativas nos anos de 1980, 1991, 2000 e 2010.

A seguir, será apresentado, pela primeira vez nesta tese, o modelo de gráficos em painel, que conjuga diversos gráficos ao mesmo tempo, normalmente diferenciados por algum tipo de variável (tempo, período, ano, índice, estatística, sexo, etc), modelo este que será muito utilizado no decorrer do presente trabalho por facilitar a visualização dos resultados de forma ampla e temporal, em um formato compacto.

O *Painel 1*, a seguir, apresenta as  ${}_nM_x$ 's (em escala ln) para o Brasil, nos anos de 1980, 1991, 2000 e 2010 e respectivas  $e_0$ , para homens (coluna 1) e mulheres (coluna 2), oriundas das quatro fontes de dados.

Para os homens em 1980, em linhas gerais o padrão das curvas é bem parecido com o formato clássico de “J”, mas já demonstrando aparecer de forma suave o *accident hump*. Os níveis são um pouco mais baixos na maioria dos grupos etários para o CELADE e IHME, nesta ordem, comparados ao nível muito próximo das curvas do IBGE e WPP2017. Essas ligeiras diferenças resultam em  $e_0$  praticamente iguais para IBGE (59,6 anos) e WPP2017 (59,8 anos), sendo quase um ano maior para o CELADE (60,8 anos) e dois anos maior para o IHME (61,8 anos), por conta dos níveis mais baixos de suas curvas.

---

<sup>35</sup> As tábuas do IBGE de 1980, 1991 e 2000 já foram construídas, originalmente, com o grupo 80+. As tábuas do IBGE de 2010, construídas com grupo 90+, foram convertidas em 80+, considerando as relações matemáticas existentes numa tábua de vida. As tábuas do CELADE para o Brasil já foram construídas com grupo aberto 80+. As tábuas da ONU para o Brasil, construídas com grupo aberto 85+, foram convertidas em 80+. As tábuas do IHME para o Brasil, construídas com grupo aberto 90+, foram convertidas em 80+.

Para as mulheres em 1980, o padrão das curvas também é muito parecido para todas as fontes de dados, sendo que o nível das curvas do IBGE, WPP2017 e CELADE é bem próximo, resultando em  $e_0$ 's com média na casa dos 66 anos, sendo que o nível da curva do IHME é bem inferior, destoando das demais fontes e resultando numa  $e_0$  de três anos a mais (69 anos), em comparação.

Para os homens em 1991, o *accident hump* já fica bem mais nítido, principalmente nas curvas do IBGE e CELADE. As  $e_0$ 's do IBGE e WPP2017 são bem parecidas, média de 63 anos, enquanto que para as curvas do CELADE e IHME a  $e_0$  é em média de 64 anos, ou seja, 1 ano maior. Em termos de padrão de curvas, se assemelham em pares as do IBGE e CELADE (muito parecidas) e WPP2017 e IHME (um pouco parecidas). Os *crossovers* das curvas nos diversos grupos etários resultam nas diferenças de  $e_0$ 's apuradas.

Para as mulheres em 1991, o formato clássico de “J” continua em todas as curvas. As  $e_0$ 's do IBGE e WPP2017 são próximas, média de 70,7 anos, enquanto que para a curva do CELADE a  $e_0$  é de 71,4 anos e a do IHME é de 72,2 anos, praticamente 1 ano e meio maior que nas duas primeiras fontes. Em termos de padrão de curvas, também se assemelham em pares as do IBGE e CELADE (muito parecidas) e WPP2017 e IHME (um pouco parecidas). O nível mais baixo da curva do IHME resulta numa maior  $e_0$ , comparada às demais fontes.

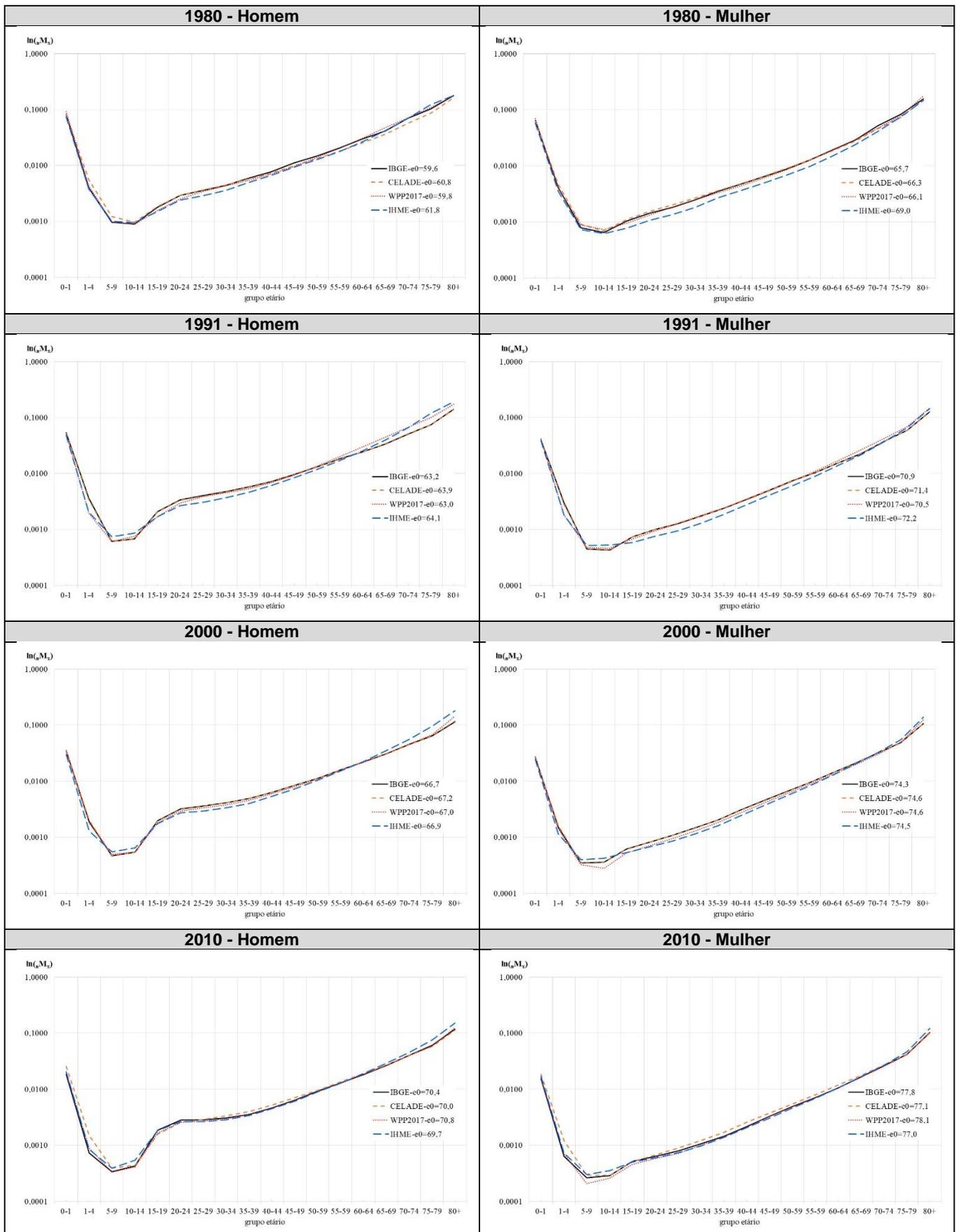
Para os homens em 2000, o *accident hump* já é proeminente em todas as curvas. O padrão das curvas do IBGE, WPP2017 e CELADE é praticamente idêntico. O padrão do IHME é muito parecido com o das demais fontes, todavia sua curva resulta em *crossovers* com as demais nos grupos etários 5-9, 15-19 e 60-64, inclusive apresentando taxas mais elevadas que as demais, a partir deste último *crossover*. A  $e_0$  é próxima para todas as fontes de dados, em média 67 anos.

Para as mulheres em 2000, o formato clássico de “J” persiste em todas as curvas. As  $e_0$ 's de todas as fontes situam-se na casa dos 74,5 anos, em média. Em termos de padrão de curvas, são praticamente idênticas as curvas nos pares IBGE e CELADE, WPP2017 e IHME, sendo que para este último par o nível das curvas diverge apenas nos grupos etários 5-9 e 10-14.

Para os homens em 2010, o *accident hump* continua proeminente, em todas as curvas. O padrão das curvas é praticamente o mesmo. A  $e_0$  também é próxima para todas as fontes de dados, variando um pouco mais de 1 ano da menor (IHME  $e_0$  de 69,7 anos) para a maior (WPP2017  $e_0$  de 70,8 anos).

Para as mulheres em 2010, mais uma vez o formato clássico de “J” persiste em todas as curvas. As  $e_0$ 's do CELADE e IHME situam-se na casa dos 77 anos, em média, enquanto que para IBGE e WPP2017 essa média é de 78 anos, ou seja, 1 ano a mais. Em termos de padrão de curvas, todas são muito parecidas, divergindo em nível, principalmente nos grupos etários 1-4, 5-9 e 10-14.

Em linhas gerais, pelo menos no aspecto visual, considerando o padrão das curvas e estatística resumo de nível geral da mortalidade,  $e_0$ , pode-se dizer que as  ${}_nM_x$ 's construídas pelo IBGE para os anos de 1980, 1991, 2000 e 2010 aparentam-se consistentes com as demais fontes internacionais de dados, o que corrobora e chancela a qualidade dos insumos base utilizados nesta tese.

Painel 1 – Brasil – Comparativo  $\ln(M_x)$ 's – Homem e Mulher – IBGE X ONU, CELADE e IHME

Fonte: IBGE, ONU, CELADE e IHME

### **3.3) Ajustes realizados nas Tábuas e Estimativas para 1950, 1960 e 1970**

As tábuas do IBGE de 1980, 1991 e 2000 são abreviadas por grupos quinquenais (0-1, 1-4, 5-9, 10-14,....., 80+), enquanto que nas tábuas de 2010, o grupo aberto é 90+. Para a projeção da mortalidade, em primeiro lugar, as tábuas de 2010 foram recalculadas para o grupo aberto 80+, para ficarem compatíveis com as de 1980, 1991 e 2000. Com o objetivo de aumentar a série histórica de dados para o modelo de projeção estocástica, foram feitas estimativas para as tábuas de mortalidade do Brasil e GR's para os anos censitários de 1950, 1960 e 1970. Posteriormente as tábuas foram convertidas em idade simples e depois extrapoladas para a idade de 100+ anos. A seguir são descritos os métodos utilizados.

#### **3.3.1) Estimativa das Tábuas de Mortalidade para os anos de 1950, 1960 e 1970, para o Brasil e Grandes Regiões**

Os métodos estocásticos de projeção da mortalidade pressupõem a utilização de longas séries históricas e anuais (p.e. 50, 60, 100 anos) de dados das  $M_x$ 's, inexistentes no caso do Brasil, visto que as informações de óbitos mais pretéritas no país datam de 1974, nas Estatísticas do Registro Civil. No caso das tábuas do IBGE, a mais antiga é a baseada no CD de 1980, o que resultaria numa série temporal de apenas quatro pontos no tempo (1980-1991-2000-2010), num horizonte de trinta anos. Esses poucos pontos, num curto intervalo de tempo, poderiam comprometer os resultados das projeções executadas, visto o longo horizonte de projeção de 100 anos adotado, de 2011 até 2110.

Como solução para aumentar o quantitativo de pontos no tempo, foram estimadas as tábuas de mortalidade para os anos censitários de 1950, 1960 e 1970, cujos procedimentos seguem descritos na sequência.

##### **3.3.1.1) Ajuste logístico do nível da mortalidade ( $e_0$ ) para os anos de 1950, 1960 e 1970**

Considerando o nível da mortalidade dado pela  $e_0$  de homens e mulheres das tábuas de 1980, 1991, 2000 e 2010, para o Brasil e GR's, foram ajustadas diversas funções logísticas, que resultaram nas estimativas dos níveis de mortalidade para os anos de 1950, 1960 e 1970.

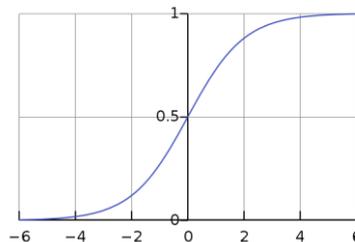
Uma das curvas de crescimento mais conhecidas na demografia é a curva logística<sup>36</sup> ou sigmoide (em formato de “S”). Proposta originalmente por Pierre François Verhulst, por volta do ano de 1838, a função logística foi redescoberta e popularizada por Pearl & Reed, por volta de 1920 (Perz, 2004).

Algumas espécies de animais e culturas de bactérias foram observadas crescer rapidamente no início, quando colocados em um ambiente limitado, com condições ideais de fornecimento de alimentos e espaço para os seus primeiros números, e, depois, crescer lentamente, à medida que a população experimenta uma pronunciada escassez de recursos, em função do aumento no número de indivíduos. Existe um limite superior do número de indivíduos que podem ser mantidos no sistema, a partir do qual a população deixa de crescer e se estabiliza. Como outras curvas de crescimento, a função logística é utilizada tanto para projetar o crescimento populacional, como para descrever o seu curso passado. Por exemplo, seja “ $Y_c$ ” a variável população e “ $k$ ” a capacidade de carga de uma região (medida pelo número máximo de indivíduos que podem ser suportados por unidade de área), então, uma equação da curva logística é dada pela fórmula a seguir:

$$Y_c = \frac{k}{1 + e^{a+bx}} \quad (1)$$

Um outro exemplo de equação matemática para representar a função logística segue na sequência, onde “ $x_0$ ” é o ponto médio da curva, “ $L$ ” é o valor máximo da curva e “ $k$ ” é a inclinação da curva, incluindo um modelo gráfico para  $L=1$ ,  $k=1$  e  $x_0 = 0$ :

$$f(x) = \frac{L}{1 + e^{-k(x-x_0)}} \quad (2)$$



A função logística também se ajusta adequadamente à evolução de determinadas estatísticas-resumo de nível de mortalidade na demografia, como TMI e  $e_0$ , sendo esta última o objeto de ajuste apresentado nesta seção.

<sup>36</sup> A curva logística é muito semelhante à curva de Gompertz. A diferença básica é que os incrementos no crescimento da curva logística são simétricos, assemelhando-se à conhecida curva normal, enquanto que para a curva de Gompertz esses incrementos são assimétricos. Na curva logística, as diferenças entre os recíprocos dos valores da população declinam com base num percentual constante.

Seja então a função logística dada pela seguinte equação matemática, onde “ $k_1$ ” é a assíntota inferior, “ $k_2$ ” é a diferença entre a assíntota superior e a assíntota inferior da curva, e “ $a$ ” e “ $b$ ” os seus parâmetros ajustados:

$$f(x) = k_1 + \frac{k_2}{1 + e^{a+bx}} \quad (3)$$

O problema que surge neste momento é a determinação de quais seriam os limites superior e inferior da  $e_0$  para homens e mulheres no BR e GR's, limitação clássica desse tipo de ajuste, pois depende, dentre outras coisas, da *expert opinion*. Com isso foi adotado o seguinte critério arbitrário, e etapas para a determinação das assíntotas do modelo: 1) para a  $e_0$  dos homens no Brasil considerou-se como assíntota inferior a idade de 35 anos e superior a idade de 85 anos; 2) para a  $e_0$  das mulheres no Brasil, suas assíntotas foram calculadas como sendo 5 anos maiores que as dos homens, ou seja, considerou-se como assíntota inferior a idade de 40 anos e superior a idade de 90 anos; 3) para o ano de 1980 apurou-se as diferenças entre a  $e_0$  do Brasil e a  $e_0$  de cada uma das GR's, para homens e mulheres; 4) a diferença obtida no item 3) anterior, para cada uma das GR's, foi somada às assíntotas convencionadas para o Brasil, para homens e mulheres, obtendo-se assim as assíntotas inferior e superior para todas as curvas ajustadas. A *Tabela 1*, a seguir, apresenta as assíntotas calculadas e parâmetros estimados da curva logística, para o Brasil e cada uma de suas Grandes Regiões:

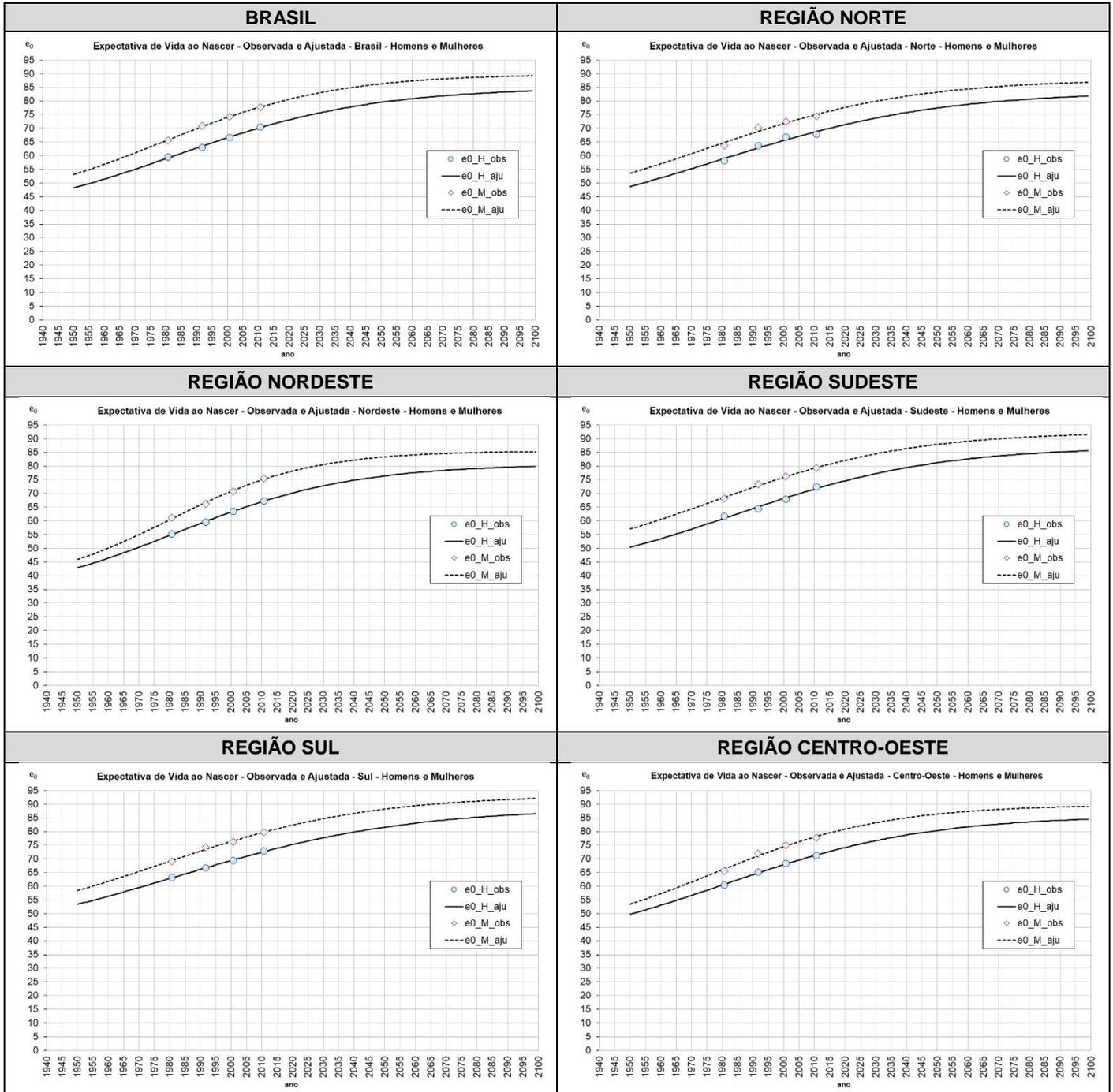
Tabela 1 – Parâmetros ajustados da Função Logística – BR e GR's – Homem e Mulher

HOMEM						
Parâmetro	BR	NO	NE	SE	SU	CO
$e_0$ 1980 (em anos)	<b>59,57</b>	58,12	55,27	61,68	63,26	60,45
Dif. $e_0$ 1980 (em anos)	<b>0,00</b>	1,45	4,29	-2,12	-3,70	-0,89
$A^{INF}$ (em anos)	<b>35,00</b>	33,55	30,71	37,12	38,70	35,89
$A^{SUP}$ (em anos)	<b>85,00</b>	83,55	80,71	87,12	88,70	85,89
k1	<b>35,00</b>	33,55	30,71	37,12	38,70	35,89
k2	<b>50,00</b>	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00
a	-61,995	-55,462	-69,544	-60,227	-53,108	-60,522
b	0,031269	0,028021	0,035085	0,030363	0,026789	0,030550
MULHER						
Parâmetro	BR	NO	NE	SE	SU	CO
$e_0$ 1980 (em anos)	<b>40,00</b>	38,05	35,59	42,54	43,37	39,91
Dif. $e_0$ 1980 (em anos)	<b>0,00</b>	1,95	4,41	-2,54	-3,37	0,09
$A^{INF}$ (em anos)	<b>40,00</b>	38,05	35,59	42,54	43,37	39,91
$A^{SUP}$ (em anos)	<b>90,00</b>	88,05	85,59	92,54	93,37	89,91
k1	<b>40,00</b>	38,05	35,59	42,54	43,37	39,91
k2	<b>50,00</b>	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00
a	-70,701	-60,199	-87,488	-62,888	-59,484	-70,778
b	0,035730	0,030466	0,044180	0,031794	0,030076	0,035792

Fonte: IBGE, *Tábuas de Mortalidade de 1980, 1991, 2000 e 2010*

Na sequência, o *Painel 2* de gráficos apresenta os ajustes logísticos realizados para o BR e GR's.

Painel 2 – Brasil e Grandes Regiões – Ajuste Logístico  $e_0$ 's – Homem e Mulher – 1980, 1991, 2000 e 2010



Fonte: IBGE, *Tábuas de Mortalidade de 1980, 1991, 2000 e 2010*

Como resultados finais obtidos, a *Tabela 2*, a seguir, apresenta as  $e_0$  ajustadas para os anos de 1950, 1960 e 1970, além daquelas oriundas das tábuas do IBGE de 1980, 1991, 2000 e 2010, para o Brasil e Regiões Norte, Nordeste, Sudeste, Sul e Centro-Oeste.

Tabela 2 – Brasil e Grandes Regiões – Expectativa de Vida ao Nascer Ajustada (1950, 1960 e 1970) e Observada (1980, 1991, 2000 e 2010) – Homem e Mulher

e <sub>0</sub> - HOMEM							
DATA REF.	DATA	BR	NO	NE	SE	SU	CO
1º agosto de 1950	1950,67	48,46	49,02	43,15	50,57	53,65	50,04
1º setembro de 1960	1960,75	51,77	52,19	46,74	53,78	56,62	53,36
1º agosto de 1970	1970,67	55,38	55,53	50,74	57,28	59,78	56,94
1º agosto de 1980	1980,67	59,57	58,12	55,27	61,68	63,26	60,45
1º setembro de 1991	1991,75	63,13	63,68	59,54	64,46	66,68	65,23
1º agosto de 2000	2000,67	66,71	66,81	63,55	67,90	69,39	68,37
1º agosto de 2010	2010,67	70,54	67,99	67,36	72,42	72,92	71,25
e <sub>0</sub> - MULHER							
DATA REF.	DATA	BR	NO	NE	SE	SU	CO
1º agosto de 1950	1950,67	53,40	53,88	46,23	57,32	58,69	53,77
1º setembro de 1960	1960,75	57,21	57,37	50,44	60,86	62,09	57,65
1º agosto de 1970	1970,67	61,40	61,05	55,37	64,64	65,69	61,89
1º agosto de 1980	1980,67	65,70	63,74	61,28	68,23	69,07	65,61
1º setembro de 1991	1991,75	70,91	70,32	66,30	73,43	74,28	72,04
1º agosto de 2000	2000,67	74,30	72,54	70,82	76,27	76,29	75,12
1º agosto de 2010	2010,67	77,82	74,45	75,54	79,27	79,78	77,76

Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade de 1980, 1991, 2000 e 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

### 3.3.1.2) Ajuste do padrão da mortalidade ( ${}_nM_x$ ) para os anos de 1950, 1960 e 1970

Depois de ajustado o nível da mortalidade para 1950, 1960 e 1970, o próximo passo refere-se à escolha de qual padrão seria o mais adequado para se ajustar ao nível estimado no passo anterior. Uma escolha, costumeiramente adotada quando não se conhece o formato da curva de mortalidade, é tomar emprestado o padrão do modelo Oeste (Coale & Demeny, 1983), que representa uma espécie de média geral de diversos países. Todavia, no caso específico do Brasil e suas Grandes Regiões, uma opção mais razoável seria manter o próprio padrão observado nas curvas de mortalidade de 1980, e ajustá-lo ao nível de 1950, 1960 e 1970. Corrobora essa escolha o fato do padrão embutido das curvas de mortalidade de 1980, ainda não apresentar o notório *accident hump* que alterou significativamente o padrão das curvas de 1991, 2000 e 2010, principalmente para a população masculina.

Utilizando a ferramenta *solver* do software excel, ajustou-se o padrão das  ${}_nM_x$ 's de 1980 aos níveis equivalentes de  $e_0$  de 1950, 1960 e 1970 estimados via função logística, criando, assim, as tábuas de mortalidade para esses anos específicos, para o BR e GR's, de homens e mulheres. A Tabela 3 apresenta os fatores de ajuste nas  ${}_nM_x$ 's de 1980, de forma a replicar a  $e_0$  estimada nos anos de 1950, 1960 e 1970. O resultado, por construção, implica em curvas de mortalidade idênticas às de 1980, como será observado adiante nos gráficos, só que em níveis superiores.

Tabela 3 – Brasil e Grandes Regiões – Fatores de Ajuste do padrão 1980 ao nível  $e_0$  de 1950, 1960 e 1970 – Homem e Mulher

HOMEM						
ANO	BR	NO	NE	SE	SU	CO
1950	1,791492	1,592169	1,786212	1,848268	1,765213	1,770547
1960	1,511822	1,357901	1,511565	1,552594	1,486175	1,479390
1970	1,251422	1,143980	1,249435	1,280817	1,233134	1,215526
MULHER						
ANO	BR	NO	NE	SE	SU	CO
1950	1,983912	1,720065	2,124057	1,913680	1,917921	2,013262
1960	1,619412	1,429094	1,740725	1,559339	1,557723	1,610437
1970	1,282338	1,166042	1,363886	1,243541	1,240865	1,252007

Fonte: IBGE, *Tábuas de Mortalidade de 1980, 1991, 2000 e 2010*

### 3.3.2) Método para a transformação de tábuas abreviadas em tábuas completas

Existem algumas formas de transformar uma tábua abreviada numa tábua completa. Como os insumos-base da tese são as próprias tábuas do IBGE de 1980, 1991, 2000 e 2010, optou-se por trabalhar com a mesma metodologia utilizada pelo Instituto (IBGE, 2016b) para a divulgação anual da Tábua Completa de Mortalidade, correspondente à população do Brasil, com data de referência em 1º de julho do ano anterior. Essa divulgação tem sido realizada desde 1999 em cumprimento ao Artigo 2º do Decreto Presidencial nº 3.266, de 29/11/1999 (BRASIL, 1999).

Uma das grandes vantagens da metodologia proposta pelo Instituto é que a lógica do procedimento de abertura de tábuas garante que a soma dos óbitos gerados em cada idade simples seja equivalente àqueles no respectivo grupo etário quinquenal, garantindo uma equivalência nas  $e_0$  (tábua abreviada X tábua completa), a menos de erros de arredondamento nos cálculos.

Para tanto, utilizaram-se, basicamente, duas funções da tábua de mortalidade:  $l_x$ , que representa o número de sobreviventes na idade exata  $x$ , e  ${}_n d_x$ , que representa o número de óbitos entre as idades  $x$  e  $x+n$ . Todas as outras funções da tábua podem ser calculadas em função das duas anteriores, através das relações matemáticas existentes entre elas<sup>37</sup>.

<sup>37</sup> A literatura que contempla as funções da tábua de mortalidade é vasta. Uma ampla descrição pode ser obtida em: Anderson (2015), Benjamin & Pollard (1980), Brown (1997), Chiang (1984), Halli & Rao (1992), Hinde (1998), Keyfitz & Caswell (2005), Le Brass (2008), Lundquist, Anderton & Yaukey (2015), Murdock & Ellis (1991), Namboodiri & Suchindran (1987), Namboodiri (1996), Newell (1988), Ortega (1987), Palmore & Gardner

O procedimento de abertura dessas tábuas, por idade simples, consiste em três etapas: 1) abertura da mortalidade para os menores de 5 anos; 2) abertura da mortalidade para as idades de 5 até 80 anos; e 3) correção da descontinuidade gerada na curva de mortalidade entre as idades de 5-14 anos, via concatenação das curvas das etapas 1) e 2).

Para a obtenção dos sobreviventes ( $l_x$ ) nas idades simples de 1, 2, 3 e 4 anos na etapa 1), foi seguido aquilo o que preconiza a literatura, considerando que, ao longo dessas idades, a mortalidade decresce de forma hiperbólica. Com isso, ajustou-se uma hipérbole, passando por três pontos específicos balizadores, a saber:  $l_0$ ,  $l_1$  e  $l_5$ . A expressão analítica básica e suas derivadas para o cálculo dos parâmetros (A, B e C) são as seguintes:

$$(4) \quad l_x = \frac{Ax + B}{x + C} \quad (5) \quad A = (l_1 + C * l_1) - B \quad (6) \quad B = C * l_0 \quad (7) \quad C = \frac{5 * (l_5 - l_1)}{5l_1 - 4l_0 - l_5}$$

Para a abertura dos óbitos dos grupos etários quinquenais, dos 5 aos 79 anos, na etapa 2), optou-se, tal qual fora feito nos dados de população, por utilizar o procedimento de interpolação osculatória de *Beers Ordinary* (Beers, 1944), que permite obter os valores intermediários em função dos pontos balizadores conhecidos. O procedimento em tela utiliza o grupo etário quinquenal que se deseja abrir em idades individuais, tendo como pontos de apoio os dois grupos etários quinquenais anteriores e posteriores, com exceção dos grupos etários 5-9 anos (utiliza os quatro grupos etários posteriores) e 10-14 anos (utiliza o grupo etário anterior e os três grupos etários posteriores). Essa técnica consegue reproduzir, por idade simples, na íntegra, os óbitos do correspondente grupo etário quinquenal da tábua abreviada de mortalidade.

Em relação aos dois últimos grupos etários quinquenais, de 70-74 e 75-79 anos, precisamos calcular dois pontos de apoio. Para o penúltimo é preciso estimar o quantitativo de óbitos no intervalo de 80-84 anos. Em relação ao grupo etário 75-79 anos, precisamos dos óbitos estimados para os grupos de 80-84 e 85-89 anos. Nessa situação, a literatura aponta que uma das alternativas para ajuste do  $l_x$  nesses dois pontos, seria utilizar uma Curva de *Gompertz* (Gompertz, 1825).

---

(1994), Pollard, Yusuf, & Pollard (1990), Poston Jr. & Bouvier (2010), Pressat (2009), Preston, Heuveline, & Guillot (2001), Rowland (2003), Siegel & Swanson (2004), Smith (1992), Srinivasan (1998), Wachter (2014), Weeks (2016), Weinstein & Pillai (2016), Wunsch, Mouchart, & Duchêne (2002) e Yusuf, Martins & Swanson (2014), dentre muitos outros.

A Função de Gompertz é muito utilizada para modelar fenômenos da natureza em que, no primeiro momento, as mudanças (taxa de variação) são muito lentas, a partir de determinado ponto a taxa de variação acelera e cresce até atingir um máximo, quando, então, desacelera até se anular, no limite. Os fenômenos com essa característica são descritos por meio de curvas de saturação<sup>38</sup>, dentre as quais estão a Função de Gompertz (IBGE, 2016b). A expressão analítica básica e suas derivadas para o cálculo dos parâmetros (a, b e K) são as seguintes:

$$(8) l_x = Ka^{bx} \quad (9) b = \frac{(\ln l_{80} - \ln l_{75})}{(\ln l_{75} - \ln l_{70})} \quad (10) \ln a = \frac{(\ln l_{75} - \ln l_{70})^2}{(\ln l_{80} - 2\ln l_{75} + \ln l_{70})} \quad (11) \ln K = \frac{(\ln l_{70} * \ln l_{80}) - (\ln l_{75})^2}{(\ln l_{80} - 2\ln l_{75} + \ln l_{70})}$$

Como terceira e última etapa do procedimento de abertura das tábuas abreviadas em tábuas completas de mortalidade, necessitamos corrigir a descontinuidade que aparece na curva da função  ${}_nq_x$  entre as idades de 5-14 anos, quando é feita a concatenação da curva gerada através do ajuste da hipérbole na etapa 1), com a curva gerada pela aplicação do método osculatório na etapa 2). Para solucionar esse problema, optou-se por ajustar a curva de mortalidade entre as idades de 5-14 anos, pelo modelo de oito parâmetros proposto originalmente por Heligman & Pollard (1980). Segundo os autores, a razão de mortalidade pode ser descrita como uma função paramétrica da idade  $x$ , conforme expressão a seguir:

$$\frac{q_x}{p_x} = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln(x)-\ln(F))^2} + GH^x \quad (12)$$

A fórmula matemática contém três componentes, cada uma representando uma fase distinta da mortalidade, a saber: mortalidade infantil, mortalidade por causas externas e mortalidade por senescência. Essa curva básica é contínua e aplicável para toda idade  $x$ , tal que  $0 \leq x \leq \infty$ , e permite, para os valores adequados dos parâmetros, que  $q_x$  assuma apenas valores entre 0 e 1, como deve ser uma função de probabilidade. Apesar de se ter que estimar oito parâmetros, cada um com sua interpretação demográfica, esse processo é muito mais prático do que se estimar individualmente cada um dos  $q_x$ 's nas  $\omega+1$  idades diferentes<sup>39</sup>.

Com isso, foram obtidas as  $M_x$ 's de 0 até o grupo aberto 80+, para BR e GR's, de homens e mulheres. Considerando então as funções  $d_x$  e  $L_x$  das tábuas de mortalidade masculinas e femininas, foram construídas as tábuas de mortalidade para a população de ambos os sexos, em função das relações matemáticas existentes numa tábua de vida.

<sup>38</sup> A conhecida Função Logística também possui essa característica.

<sup>39</sup>  $\omega$  (ômega), a última idade da tábua de mortalidade.

### 3.3.3) Método utilizado para a extrapolação de tábuas de mortalidade do grupo aberto 80+ para o grupo aberto 100+

Como última etapa de ajuste nos dados básicos das  $M_x$ 's, foi realizada a extrapolação das tábuas com grupo aberto 80+ para o grupo aberto 100+.

Thatcher, Kannisto, & Vaupel (1998) testaram diversos modelos matemáticos (Gompertz, Weibull, Helligman & Pollard, Quadrático, Logístico e Kannisto) para ajustar a função de mortalidade nas idades mais avançadas de 80-120 anos. Os autores utilizaram consistentes dados de mortalidade para as idades de 80-98 anos de treze países de grande longevidade mundial (Alemanha Ocidental, Áustria, Dinamarca, Finlândia, França, Inglaterra e País de Gales, Islândia, Itália, Japão, Noruega, Suécia e Suíça) e concluíram que os modelos Logístico e de Kannisto (1994) seriam os mais adequados para ajustar o final da curva de mortalidade, com uma ligeira vantagem para o modelo de Kannisto, que, por ser um caso especial do modelo logístico, acaba sendo mais restritivo.

Optou-se, no trabalho aqui realizado, por também utilizar o modelo de Kannisto (1994), para extrapolar as tábuas existentes até a idade de 100+ anos. Para tanto, foi utilizado o pacote “*Mortality Laws*” (Pascariu, 2018) do R, para ajustar o modelo de Kannisto nos anos de 1950, 1960, 1970, 1980, 1991, 2000 e 2010, para as  $M_x$ 's do BR e GR's, de homens e mulheres, utilizando, como pontos-base para o ajuste, as idades simples de 50-79 anos.

#### 3.3.3.1) Ajuste pelo modelo de Kannisto

O modelo de Kannisto é amplamente utilizado por pesquisadores no mundo inteiro para ajustar a mortalidade nas idades avançadas. É um fato notável que os dados contemporâneos de mortalidade para idades consideradas avançadas estão muito próximos de uma das formas mais simples do modelo logístico, no qual a função logito ( $M_x$ ) (Brass, 1971) é linear na idade  $x$ . Segundo Thatcher et al. (1998) isso foi percebido inicialmente por Kannisto (1992). Foi usado, de forma independente, também por Himes, Preston, & Condran (1994).

Apesar de Kannisto não ter proposto uma nova lei geral de mortalidade, pois simplesmente observou uma descoberta empírica, o modelo acabou sendo batizado com o seu nome. A fórmula do modelo de Kannisto é a seguinte, sendo “ $a$ ” e “ $b$ ” os seus parâmetros e “ $x$ ” a idade:

$$\mu_x = \frac{ae^{bx}}{1+ae^{bx}} \quad (13)$$

Em um primeiro momento, as estimativas dos parâmetros “a” e “b” da função de Kannisto, para homens e mulheres de forma independente, resultou para a grande maioria das tábuas extrapoladas (para os anos de 1950, 1960, 1970, 1980, 1991, 2000 e 2010 e para BR e GR’s) em *crossovers* das  $M_x$ ’s de homens e mulheres em algum ponto entre 80 e 99 anos, situação esta improvável de ocorrer, visto que, historicamente, no Brasil as taxas de mortalidade femininas são sempre inferiores às taxas masculinas, em todas as idades e/ou grupos etários. Como solução, adotou-se o seguinte procedimento, que garantiu a coerência desejada nos resultados obtidos: 1) foram calculados os parâmetros “a” e “b” da função de Kannisto para a população de ambos os sexos combinados, utilizando como base as  $M_x$ ’s no intervalo etário de 50-79 anos, resultando nas taxas de mortalidade por idade simples de 80 até 100+ (cem anos ou mais); 2) Para algumas tábuas, o  $M_x$  ajustado pelo modelo de Kannisto resultou numa descontinuidade entre  $m_{79}$  e  $m_{80}$ . Essa descontinuidade foi corrigida, calculando-se o incremento dado por  $(m_{85}-m_{79})/6$ , e somando esse incremento uniforme à  $m_{79}$  para gerar uma nova  $m_{80}$ , e assim sucessivamente, até gerar uma nova  $m_{84}$ , deixando, então, as curvas resultantes das  $M_x$ ’s estimadas, monotônicas e crescentes, como devem ser as funções de mortalidade a partir de determinada idade; 3) uma vez ajustada a curva para ambos os sexos, foram calculadas as seguintes diferenças:  $\text{logito}(M_{79}^{\text{ambos}}) - \text{logito}(M_{79}^{\text{homens}})$  e  $\text{logito}(M_{79}^{\text{ambos}}) - \text{logito}(M_{79}^{\text{mulheres}})$ . Essas diferenças constantes (para os homens diferenças negativas e para as mulheres positivas) foram então somadas ao  $\text{logito}(M_x^{\text{ambos}})$  nas idades de 80 até 100+ anos, resultando no que seriam, então, os valores do  $\text{logito}(M_x^{\text{homens}})$  e  $\text{logito}(M_x^{\text{mulheres}})$ , nas idades de 80 até 100+ anos; 4) por fim, aplicada a função inversa do logito, foram então obtidas as  $M_x$ ’s de homens e mulheres, para as idades dos 80 até 100+ anos.

Apenas para referenciar a função logito, William Brass descobriu que, tomando os logitos das probabilidades de morte entre duas tábuas, criava-se uma relação linear entre os correspondentes valores gerados (Brass, 1971). Com isso, a transformação logital da probabilidade de morte  $q_x$  foi definida originalmente por Brass como sendo<sup>40</sup>:

$$\text{logito}(q_x) = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{q_x}{1 - q_x} \right] \quad (14)$$

---

<sup>40</sup> Essa foi a transformação logito proposta originalmente por Brass. Hoje em dia, na maioria dos livros, o fator  $\frac{1}{2}$  não aparece na definição do logito (p.e. ver Preston et al. (2001), p.210)

Segundo Preston et al. (2001), a vantagem da transformação proposta por Brass é que, como  $q_x$  varia entre 0 e 1, o logito de  $q_x$  varia entre  $-\infty$  e  $+\infty$ . Desta forma, qualquer valor calculado para o logito de  $q_x$  entre  $-\infty$  e  $+\infty$ , implicará, obrigatoriamente, em um valor de  $q_x$  entre 0 e 1. Se podemos, então, calcular o logito de  $q_x$ , denotado por  $Y_{(x)}$ , podemos transformar  $Y_{(x)}$  de volta e estimar a probabilidade de morte  $q_x$ , da seguinte forma:

$$\hat{q}_x = \frac{\exp(2 * \hat{Y}_{(x)})}{1 + \exp(2 * \hat{Y}_{(x)})} \quad (15)$$

A Tabela 4, a seguir, apresenta os parâmetros “a” e “b” do referido modelo de Kannisto, para os sete pontos-base no tempo, da população de ambos os sexos no BR e GR’s.

Tabela 4 – Parâmetros do modelo de Kannisto 1950, 1960, 1970, 1980, 1991, 2000 e 2010 – BR e GR’s – Ambos os sexos

AMBOS OS SEXOS							
ANO	PARAM.	BR	NO	NE	SE	SU	CO
1950	a	0,000169	0,000199	0,000181	0,000181	0,000146	0,000234
	b	0,091630	0,087103	0,092614	0,089684	0,092471	0,088278
1960	a	0,000158	0,000182	0,000172	0,000166	0,000135	0,000217
	b	0,089549	0,085610	0,090268	0,087858	0,090562	0,085897
1970	a	0,000142	0,000162	0,000154	0,000147	0,000120	0,000190
	b	0,087747	0,084365	0,088296	0,086371	0,089009	0,084260
1980	a	0,000121	0,000157	0,000133	0,000121	0,000103	0,000173
	b	0,086586	0,082881	0,086399	0,085934	0,088234	0,082564
1991	a	0,000181	0,000153	0,000212	0,000186	0,000132	0,000245
	b	0,076663	0,078761	0,075338	0,075841	0,080793	0,071949
2000	a	0,000166	0,000147	0,000237	0,000156	0,000114	0,000184
	b	0,075884	0,078549	0,072091	0,076087	0,080995	0,073985
2010	a	0,000102	0,000125	0,000145	0,000096	0,000066	0,000081
	b	0,080524	0,080048	0,076896	0,080523	0,085627	0,083973

Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade de 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

### 3.4) Tábuas Finais e a Superfície de Mortalidade

Nessa seção são apresentadas as tábuas finais completas de 0 até 100+ anos, para o Brasil, de homens, mulheres e ambos os sexos, que consubstanciaram as projeções da mortalidade.

O ANEXO 2, constante no livro de anexos digital, apresenta para o Brasil e GR’s, diversas tabelas e gráficos com as  $M_x$ ’s ajustadas de 0 até 100+ anos, para 1950, 1960, 1970, 1980, 1991, 2000 e 2010, para homens, mulheres e ambos os sexos combinados, além do cálculo da variação média da taxa no período, por idade simples. São apresentados, também, gráficos da evolução das  $M_x$ ’s (1950-2010) para idades específicas (0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 e 100+ anos),

do número de sobreviventes ( $l_x$ ), expectativa de vida ( $e_x$ ), variação média da  $e_x$ , gráficos 3D da Superfície da Mortalidade 1950-2010 e gráficos 2D das  $M_x$ 's no período 1950-2010. Para todas as curvas de mortalidade, por idade simples, grupo aberto 100+, BR e GR's, de homens e mulheres e nos sete pontos no tempo (1950, 1960, 1970, 1980, 1991, 2000 e 2010), foi feita uma parametrização das curvas de mortalidade considerando o modelo de Heligman & Pollard (1980) (HP3). As tabelas com os nove parâmetros (A, B, C, D, E, F, G, H e K) do modelo ajustado, bem como os gráficos de ajuste (valores observados X valores ajustados) e resíduos, também são disponibilizados no referido anexo, além de gráficos comparativos das  $M_x$ 's por sexo e ano específico, sobremortalidade masculina, percentual de sobrevivência feminina maior de masculina, e tabelas comparativas da  $e_x$  das tábuas abreviadas 80+ X tábuas completas 100+.

Em geral, as tábuas completas 100+ apresentaram  $e_x$  muito próximas daquelas calculadas para as tábuas originais abreviadas 80+, em média, com poucos meses de diferença entre elas, corroborando a qualidade dos ajustes e estimativas aqui realizadas.

Conforme já citado anteriormente, infelizmente o Brasil não possui longas séries temporais de taxas de mortalidade, sendo as informações existentes apenas pontuais e referentes aos anos censitários, quando existentes.

Para a construção dos intervalos de confiança para a mortalidade e  $e_x$  projetada, quanto maior o número de pontos a serem utilizados nas séries temporais históricas, melhor, pois as bandas de confiança (IC) tendem a ficar mais estreitas ao redor da média projetada, principalmente no caso de projeções com longos horizontes, como aquelas aqui realizadas (2011-2110). A solução adotada foi aumentar o quantitativo de pontos a serem utilizados nos modelos de projeção, através de uma interpolação log-linear das  $M_x$ 's para os anos intercensitários. Ao se adotar esse procedimento, saímos de uma série temporal de sete pontos (1950, 1960, 1970, 1980, 1991, 2000 e 2010) para 61 pontos no tempo, criando uma superfície de evolução da mortalidade ao longo dos anos observados, a ser apresentada na sequência.

Cabe ressaltar que o procedimento interpolatório tem as suas limitações e pressupostos embutidos. Um pressuposto forte é que, obviamente, a cada dois pontos-base da interpolação (1950-1960, ....., 2000-2010), a variação anual das taxas será constante para cada uma das idades de 0 até 100+ anos<sup>41</sup>, o que pode não ocorrer na prática. Quando executamos a interpolação, o pressuposto assumido faz com que as taxas observadas em determinado censo 1

---

<sup>41</sup> Isso implica dizer que as taxas de mortalidade decrescerão ou crescerão linearmente no período intercensitário.

convirjam de forma uniforme para as taxas observadas no censo 2, impondo a sua regra de variação. Na prática, o que se observa geralmente no Brasil (e em diversos outros países do mundo) é uma tendência de queda no nível das taxas de mortalidade. Contudo, determinada idade “x” específica ou grupo etário podem ter variação positiva entre um ano ou outro, o que seria inclusive muito natural, dentro da ideia de passeio aleatório com tendência, sugerida por Lee-Carter.

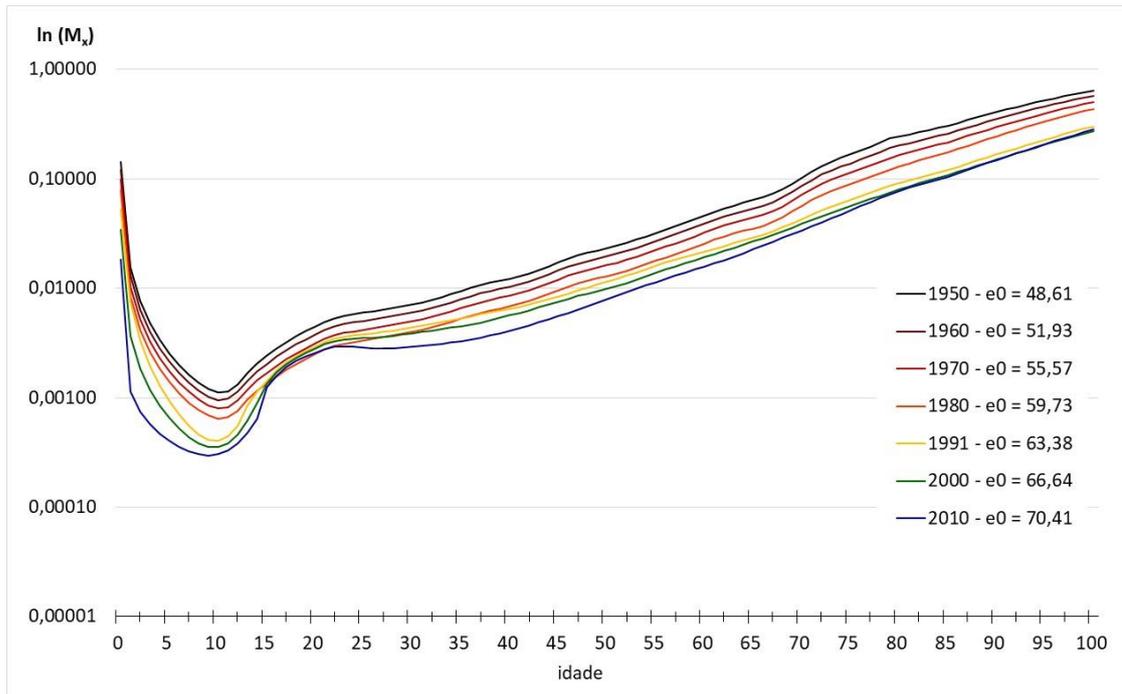
Ciente das limitações existentes, o aspecto positivo dessa proposta é a garantia de que as taxas percorrerão os caminhos intermediários existentes entre os dois pontos-base da interpolação. Além disso, conforme já mencionado, o considerável aumento no quantitativo de pontos a serem utilizados nas projeções da mortalidade tende a melhorar muito a qualidade do ajuste, principalmente no que compete aos IC’s calculados para o  $k_t$  do modelo LC, e, conseqüentemente, as  ${}_nM_x$ ’s e  $e_x$ ’s projetadas.

### **3.4.1) Tábuas Completas de 1950, 1960, 1970, 1980, 1991, 2000 e 2010 – grupo aberto 100+**

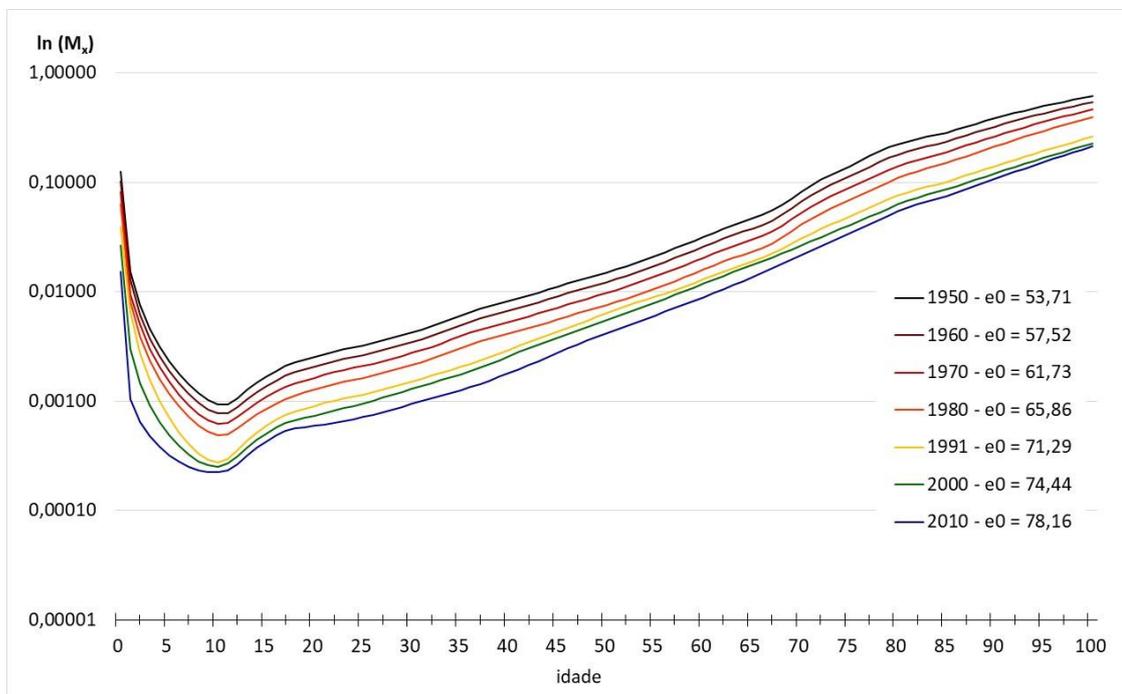
Apenas para recordar, todos os procedimentos realizados, métodos utilizados e ajustes necessários para a construção das tábuas completas de mortalidade com grupo aberto 100+, para a população masculina, feminina e total do Brasil e suas Grandes Regiões, e para os anos de 1950, 1960, 1970, 1980, 1991, 2000 e 2010, tiveram como principal objetivo gerar taxas por idade simples para entrarem no modelo de projeção da mortalidade, que resultariam em tábuas projetadas, também por idade simples, necessárias para a construção das chamadas tábuas geracionais, que, por sua vez, seriam utilizadas no cálculo do Risco de Longevidade no país.

Não fosse o último objetivo desta tese, bastaria converter as tábuas abreviadas com grupo aberto em 80+, em tábuas abreviadas 100+, através da metodologia extrapolatória adotada, e executar as projeções da mortalidade, ciente de que, se as entradas no modelo de projeção forem tábuas abreviadas em determinada formatação específica (p.e. 0-1, 1-4, 5-9,....., 95-99, 100+ anos), as saídas também terão as mesmas características.

O *Gráfico 5* e o *Gráfico 6*, a seguir, apresentam, para homens e mulheres, respectivamente, as  $M_x$ ’s (em escala ln), do Brasil, nos sete pontos-base no tempo, ou seja, 1950, 1960, 1970, 1980, 1991, 2000 e 2010, até o grupo aberto 100+ anos.

Gráfico 5 – Brasil – Taxas Centrais de Mortalidade ( $M_x$ 's – escala ln) – Homem

Fonte: IBGE, Tábua de Mortalidade de 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

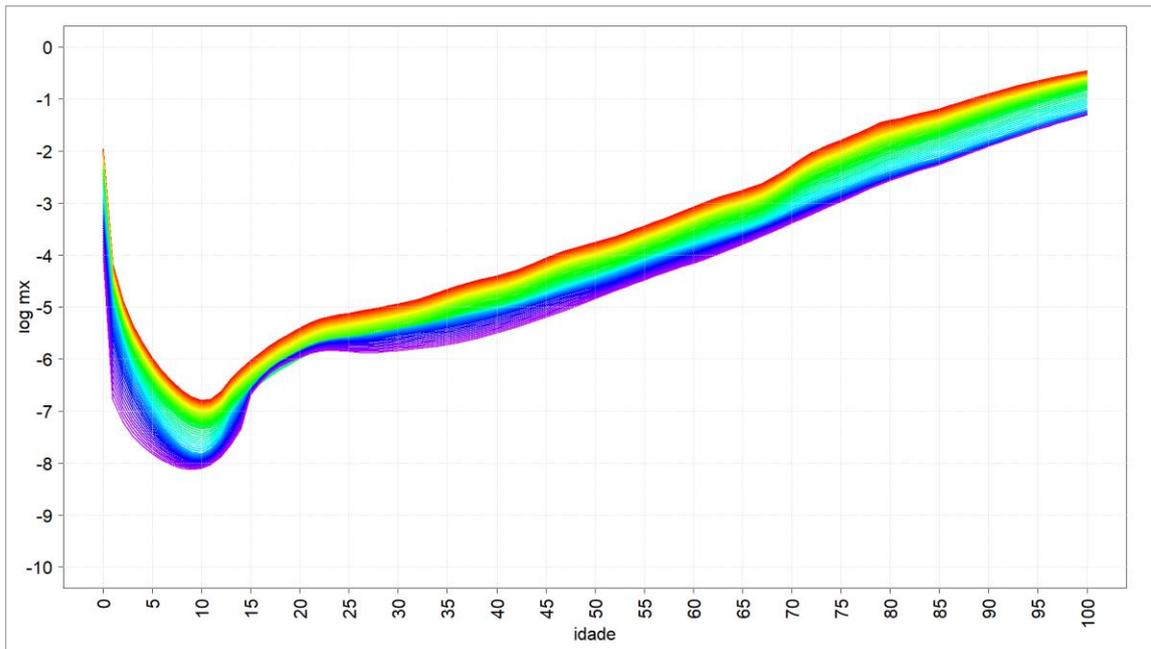
Gráfico 6 – Brasil – Taxas Centrais de Mortalidade ( $M_x$ 's – escala ln) – Mulher

Fonte: IBGE, Tábua de Mortalidade de 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

### 3.4.2) Interpolação das $M_x$ 's para o período intercensitário

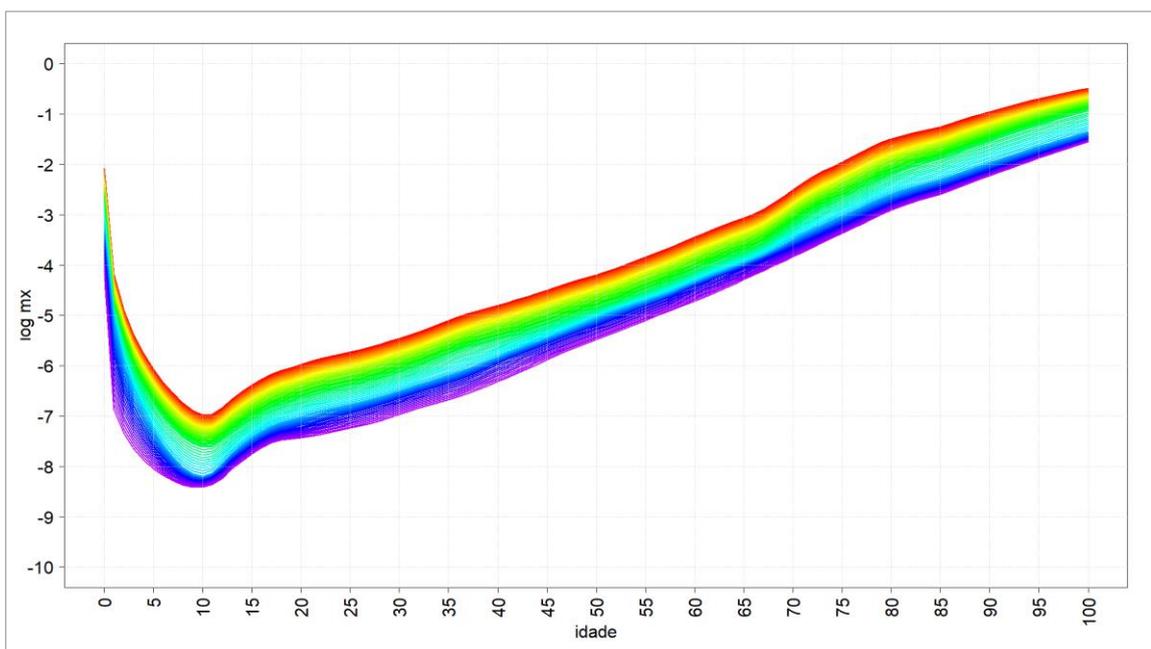
O Gráfico 7, o Gráfico 8 e o Gráfico 9, na sequência, apresentam para o Brasil, as  $M_x$ 's interpoladas log-linearmente no período 1950-2010, para homens, mulheres e ambos os sexos, respectivamente. Para uma melhor visualização das taxas interpoladas, foi utilizado o pacote *Rainbow* do R (Hyndman & Shang, 2010).

Gráfico 7 – Brasil –  $M_x$ 's interpoladas (2D) – Homem – 1950-2010

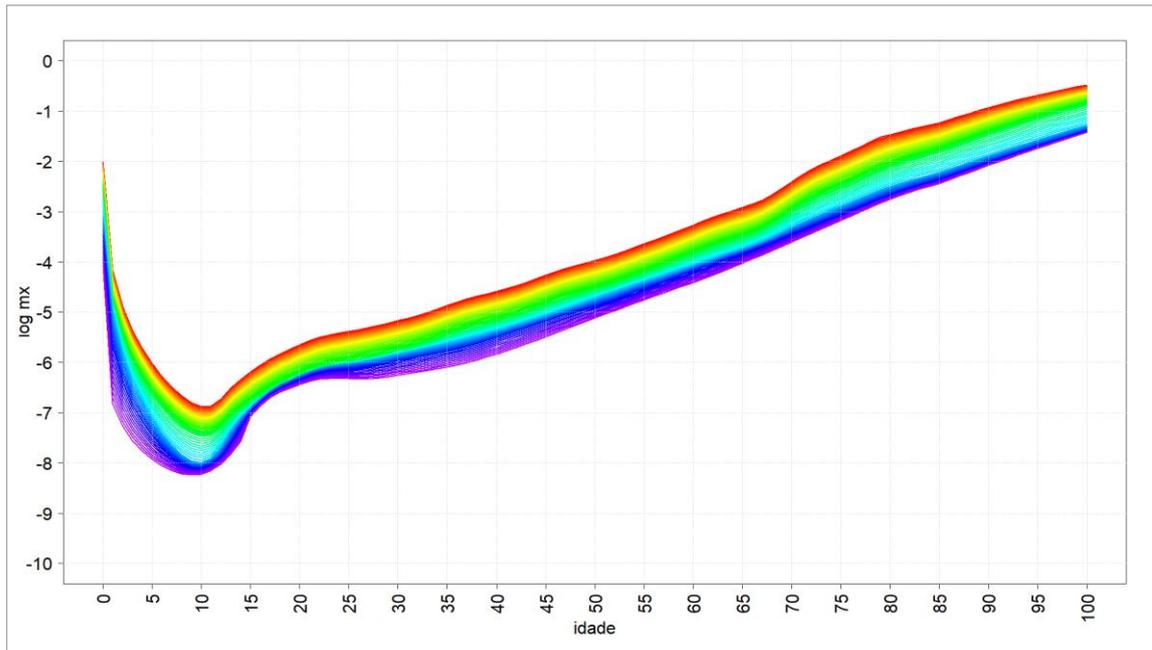


Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade de 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 8 – Brasil –  $M_x$ 's interpoladas (2D) – Mulher – 1950-2010



Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade de 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 9 – Brasil –  $M_x$ 's interpoladas (2D) – Ambos – 1950-2010

Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade de 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Obs: no pacote rainbow os primeiros anos são mostrados em vermelho, seguido por laranja, amarelo, verde, verde-água, azul e azul marinho, com os últimos anos mostrados em violeta.

### 3.4.3) A Superfície de Mortalidade para o Brasil - 1950-2010

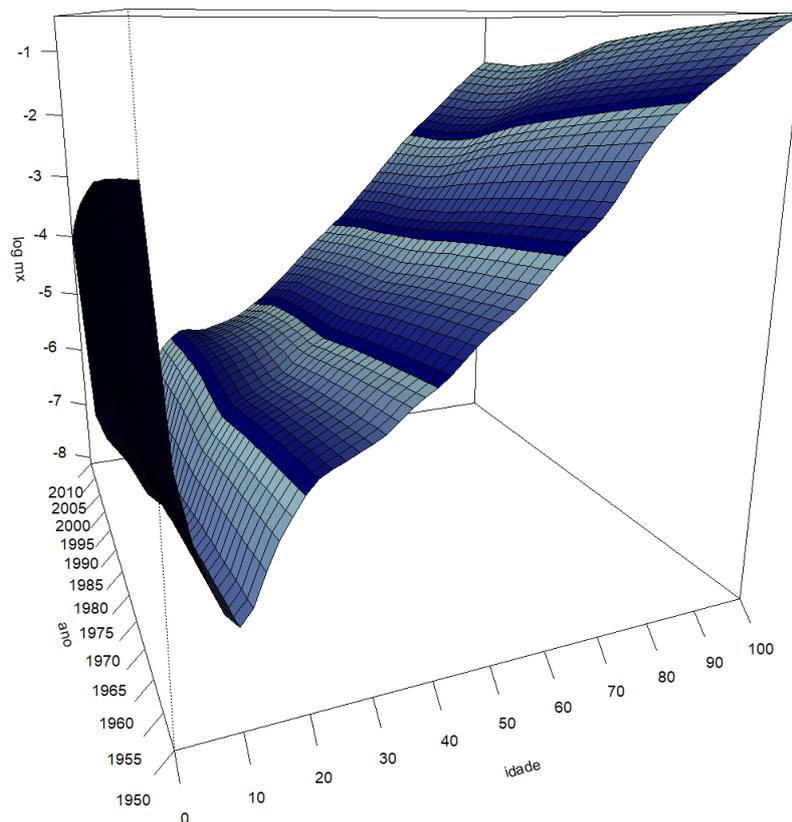
Uma visualização gráfica muito interessante, obtida em função das  $M_x$ 's apresentadas na seção anterior, é o gráfico de superfície da mortalidade. Primeiramente, as referidas  $M_x$ 's passaram por um processo de suavização com base em *p-splines*, também chamados de *penalized B-splines* (Currie & Durban, 2002; Currie, Durban, & Eilers, 2003, 2004 e 2006; Eilers & Marx, 1996; Camarda, 2012; Wang, 2011; Wood, 1994, 2003 e 2017).

Na matemática, um *spline* é uma curva definida em partes por polinômios, considerando dois ou mais pontos de controle, chamados de nós. Os demais pontos definem a tangente à curva em seus respectivos nós. Na ciência da computação, o termo *spline* refere-se, mais frequentemente, a uma curva paramétrica polinomial por partes. Os *splines* são curvas populares, devido à simplicidade de sua construção, sua facilidade e precisão de avaliação e sua capacidade de ajustar formas complexas, por meio de ajustes de curvas e *design* de curvas interativas.

O Gráfico 10, o Gráfico 11 e o Gráfico 12, apresentados na sequência, definem a superfície de mortalidade no Brasil para os 61 pontos no tempo, de 1950 até 2010, para homens, mulheres e ambos os sexos, respectivamente.

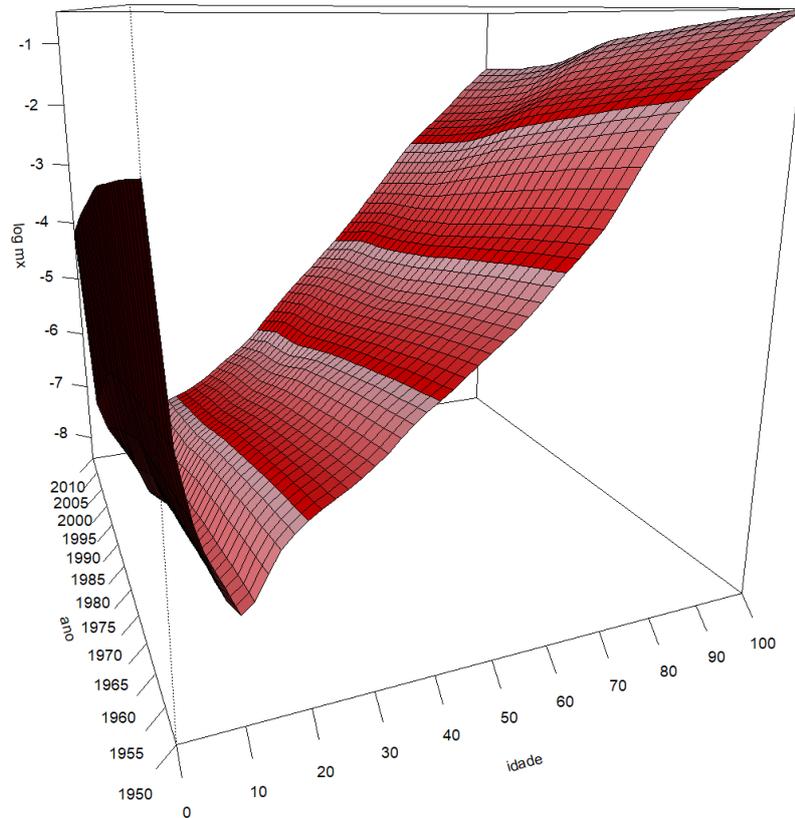
Em linhas gerais, observa-se uma redução generalizada nas taxas de mortalidade em todas as idades, desde 1950, com exceção do calombo (*accident hump*) surgido na superfície dos homens, a partir da década de 1990 (c/ impacto para ambos os sexos), em virtude da ascensão das causas externas de mortalidade no Brasil, notadamente as mortes violentas ocasionadas por acidentes de trânsito, homicídios e suicídios, dentre outras causas. O referido calombo também pode ser observado na superfície feminina, ainda que em intensidade muito menor, quando comparada à masculina.

Gráfico 10 – Brasil – Superfície de Mortalidade (3D) – Homem – 1950-2010



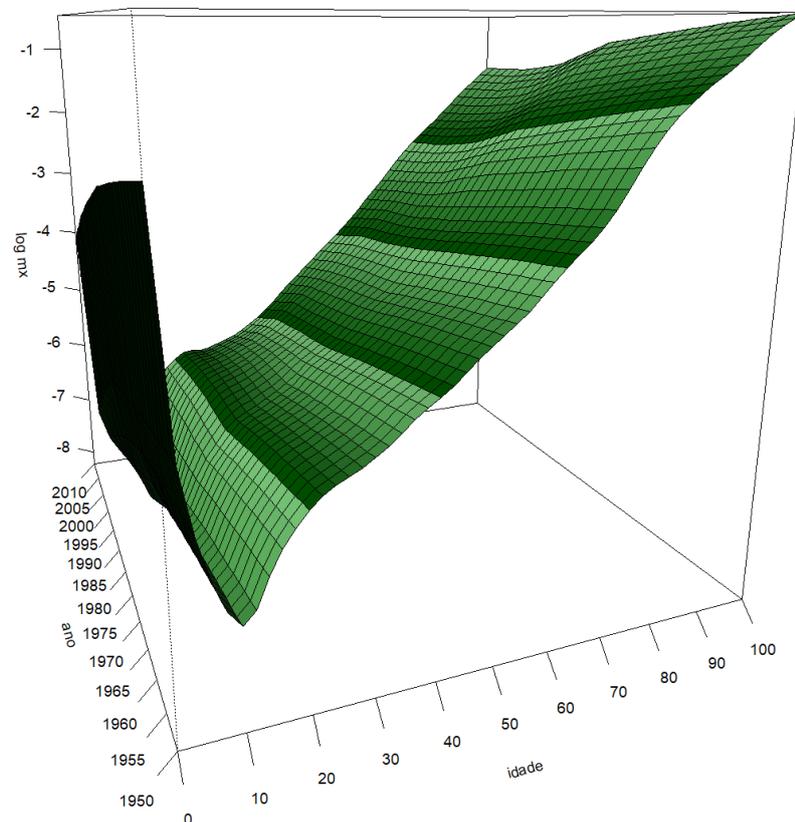
Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade de 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 11 – Brasil – Superfície de Mortalidade (3D) – Mulher – 1950-2010



Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade de 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 12 – Brasil – Superfície de Mortalidade (3D) – Ambos – 1950-2010



Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade de 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

As projeções executadas no capítulo 5 utilizaram, como dados-base, as superfícies de mortalidade 1950-2010, por sexo, apresentadas nos gráficos anteriores. Apesar de visualmente interessantes e passarem a noção de volume da mortalidade no tempo, nunca é demais ressaltar as limitações existentes nas matrizes de  $M_x$ 's que consubstanciaram as superfícies construídas:

1) as tábuas-base do IBGE de 1980, 1991, 2000, 2010, ponto de partida do trabalho, foram construídas de forma abreviada (0-1, 1-4, 5-9, 10-14, ..., 70-74, 75-79, 80+ anos) e considerando metodologias indiretas, como o método dos *Filhos Sobreviventes* de Brass (Brass et al. 1968; Moultrie et al. 2013), para o cálculo da mortalidade infantil, e diversos métodos para correção do sub-registro de óbitos, para as idades acima dos 5 anos. Esses métodos possuem alguns pressupostos, que não necessariamente se cumpriram no caso do Brasil e Grandes Regiões, para determinado período histórico em específico. Além disso, sua aplicação pressupõe alguns graus de subjetividade de escolhas por parte do pesquisador (*expert opinion*);

2) as tábuas de 1950, 1960 e 1970 foram estimadas através de um ajuste logístico da  $e_0$  para esses anos, com base nas  $e_0$ 's de 1980, 1991, 2000 e 2010 das tábuas do IBGE. Foi mantido o padrão da curva de 1980, sendo corrigido o seu nível ( $e_0$ ), para 1950, 1960, 1970. Aqui, a escolha das assíntotas superior e inferior das funções logísticas para o BR e GR's influencia diretamente nos resultados retroprojetados da  $e_0$ . Entende-se como razoável o critério aqui adotado, tanto para a seleção das assíntotas, quanto para a escolha do padrão de 1980, a ser ajustado para 1950, 1960 e 1970;

3) foi aplicada a metodologia adotada pelo IBGE (IBGE, 2016b) para a abertura das tábuas de mortalidade de 1950, 1960, 1970, 1980, 1991, 2000 e 2010, de grupos quinquenais para idade simples, resultando em tábuas completas de 0 até 80+ anos;

4) foi aplicado o método de Kannisto (1992) para a extrapolação das tábuas de 80+ anos para 100+ anos, com base nas taxas de mortalidade por idade simples de 50-79 anos, por sexo e localidade (BR e GR's);

5) a série anual de  $M_x$ 's foi construída considerando as informações pontuais nos anos censitários (1950, 1960, 1970, 1980, 1991, 2000 e 2010), via interpolação log-linear das taxas, impondo um padrão específico de variação da mortalidade, capturado pelo modelo de Lee-Carter, suas variantes e extensões.

No próximo capítulo são apresentados os aspectos teóricos das tábuas, modelos e leis de mortalidade, além dos nove métodos de projeção testados nesta tese. Dando continuidade, são apresentados os resultados das projeções para o Brasil e Grandes Regiões, além da aplicação atuarial para a estimativa do Risco de Longevidade no país e considerações finais da tese.

## **CAPÍTULO 4 - TÁBUAS, MODELOS, LEIS E MÉTODOS DE PROJEÇÃO DA MORTALIDADE**

Neste capítulo é apresentado um breve histórico das tábuas e leis de mortalidade, os tipos de modelo padrão de mortalidade, aqui incluídas as Leis de Mortalidade, além dos principais métodos de projeção da mortalidade existentes até o momento, suas classificações, variantes, extensões e adaptações.

### **4.1) Um Breve Histórico das Tábuas e Leis de Mortalidade**

A relação entre mortalidade e idade representa *o tópico mais antigo na demografia* (Preston et al., 2001). A história nos revela que a primeira tábua de mortalidade da qual se tem notícia foi organizada na época da Roma Clássica, pelo prefeito Domitius Ulpianos (Ferreira, 1985 v.II, p.208), que estudou os documentos sobre nascimentos e mortes. No entanto, foi apenas no século XVII, na Inglaterra, que começaram as primeiras tentativas de cálculo da probabilidade de sobrevivência dos indivíduos, onde o marco inicial foi o trabalho realizado pelo mascate inglês John Graunt (Graunt, 1662), que examinou a mortalidade em Londres, com o objetivo de tentar ajudar a criar um sistema de alerta relacionado ao início e à propagação da peste negra. As observações de John Graunt, publicadas em 1662, constituíram o primeiro exemplo do *método estatístico* inerente às tábuas de mortalidade modernas e fizeram com que lhe fosse dado o título de *Inventor da Ciência Atuarial* (Ferreira, 1985, p.34). Graunt mostrou que, embora o comprimento de vida individual fosse incerto, havia um padrão muito mais previsível de longevidade e mortalidade encontrado em grupos de indivíduos.

Em seguida, uma importante etapa que caracterizou os primeiros estudos efetivamente mais elaborados, em relação à sobrevivência das populações, foi a construção de tábuas de vida pelo astrônomo inglês Edmond Halley (Halley, 1693), cujo trabalho é citado até hoje como um dos marcos na evolução do estudo e pesquisa acerca da mortalidade. Essas tábuas foram baseadas nos registros de nascimentos e mortes dos anos de 1687 até 1691 na cidade polonesa de Breslau (Ortega, 1987, prólogo, p.viii). Em função desses dados, Halley utilizou-se das técnicas relativas às tábuas de vida para estimar que a expectativa de vida em Breslau, capital da província da Silésia (atual Polônia), entre 1687 e 1691, era de 33,5 anos (Dublin et al., 1949 apud Weeks, 2015, p.65).

A modelagem matemática da mortalidade e da sobrevivência deu um grande salto, com a publicação do francês Abraham De Moivre (De Moivre, 1725), que sugeriu uma distribuição uniforme do modelo de mortes e apresentou métodos de cálculo simplificados de anuidades atuariais. De Moivre reconheceu que sua fórmula representava uma aproximação grosseira acerca da mortalidade humana, contudo seu objetivo maior era simplificar o cálculo dos valores das anuidades atuariais, o que naquela época representava uma árdua tarefa (Jordan, 1991, p. 21).

No início do século XIX foi construída a primeira tábua de mortalidade considerando os princípios atuariais modernos. Joshua Milne (Milne, 1815), atuário da *Sun Life Assurance Society*, elaborou para a cidade inglesa de Carlisle uma tábua de vida levando em conta as informações de mortes e a população exposta a esse risco. Tendo por base essa nova tábua, obteve-se a esperança de vida ao nascer de 38,7 anos para ambos os sexos combinados (Ortega, 1987, prólogo, p. viii). Na sua obra, Milne (1815) utilizou dados de populações que frequentavam duas paróquias na cidade de Carlisle, entre 1779 e 1787, sendo os mesmos enumerados em faixas etárias a partir dos 5 anos de idade e realizando o mesmo procedimento para as mortes ocorridas durante esses nove anos de estudo.

Adotando um foco diferente e com uma abordagem mais biológica para a modelagem e previsão da mortalidade, o atuário inglês Benjamim Gompertz (Gompertz, 1825), utilizando dados de várias regiões da Inglaterra, descobriu que o risco de morte aumentava de forma previsível em função de uma taxa proporcional à idade. Esses cálculos o levaram a concluir que a taxa de mortalidade dobrava a cada dez anos, entre as idades de 20 e 60 anos (que era o intervalo básico entre as idades das pessoas que compravam seguro naquela época). A fórmula matemática utilizada para prever esse crescimento da taxa de mortalidade em progressão geométrica, desde a idade de 20 anos, foi a primeira *Lei de Mortalidade* criada e é mundialmente conhecida como *Gompertz Law of Mortality*, baseando-se na ideia de que, além da mortalidade aleatória atingir a jovens e idosos da forma igual, existe também uma força de mortalidade que guarda relação com a senescência do indivíduo. Essa lei de mortalidade definida por  $\mu_x = \alpha e^{\beta x}$  (onde  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros positivos) se ajusta muito bem a partir dos 35 anos de idade, mas vai perdendo a sua aderência nas idades mais avançadas.

Segundo Jordan (1991, p. 22), quando no primeiro quarto do século XIX Gompertz apresentou a sua lei, ele declarou que era possível que a morte fosse consequência de duas causas gerais e coexistentes: a primeira relativa ao acaso ou acidentabilidade, sem previsão ou disposição

prévia de quando ou como poderia ocorrer; e a segunda, a deteriorização ou aumento da inabilidade de suportar a degeneração biológica. Gompertz considerou em sua lei apenas a segunda causa. William Makeham (Makeham, 1860) em sua obra combinou essas duas causas. Segundo Makeham (1860), para contemplar o efeito da primeira causa, a acidentabilidade, deveríamos adicionar uma constante na fórmula previamente escrita por Gompertz. A partir de uma simples ideia, a dita *Makeham's Law of Mortality*, tornou-se um extraordinário aperfeiçoamento da fórmula anterior que, desde então, com a devida escolha das suas constantes, poderia ser aplicada da idade de 20 anos até praticamente o resto da vida do indivíduo (Jordan, 1991, p.23). A fórmula proposta por Makeham para a força da mortalidade é definida como  $\mu_x = A + \alpha e^{\beta x}$  (onde o primeiro termo A é relativo à morte por acidentes e o segundo termo tem a ver com a morte por senescência).

Na sequência desses marcos iniciais de Leis de Mortalidade, diversas outras formulações matemáticas para descrever o comportamento da variável foram desenvolvidas (Thiele & Sprague, 1871; Wittstein, 1883; Steffenson, 1930; Perks, 1932; Harper, 1936; Weibull, 1939 e 1951; Brillinger, 1961; Beard, 1961; Siler, 1979; Heligman & Pollard, 1980; Petrioli, 1981; Rogers & Planck, 1983; Martinelle, 1987, Carrière, 1992; Kostaki, 1992, Kannisto, 1994, dentre outros) bem como numerosas tábuas foram e continuam sendo elaboradas para diferentes países, regiões e localidades, devido à sua crucial importância para análises de problemas de diversas naturezas, que cobrem um vasto leque de possibilidades, desde estudos atuariais a previsões e demandas para a formação e definição de políticas públicas específicas. Conforme já citado, essas ditas tábuas desempenham um papel fundamental, por exemplo, nas projeções de população, nas estimativas de custos da seguridade social e de prêmios de seguros privados, adquirindo particular relevância nas décadas recentes.

Ortega (1987) define, de forma sucinta, a tábua de mortalidade como a ferramenta mais completa para a análise da mortalidade de uma população, sendo seu estudo de interesse tanto dos demógrafos, como dos diversos profissionais vinculados aos temas da saúde pública e planejamento, em uma grande variedade de problemas, dentre os quais podem ser mencionados: a estimação do nível e da tendência da mortalidade, a análise da mortalidade por causas, os estudos de fecundidade, além da estrutura, dinâmica e crescimento populacional. Outra importância do estudo da mortalidade diz respeito à análise das diversas características socioeconômicas, tais como: a composição da força de trabalho, a população em idade escolar e a regulação dos sistemas previdenciários.

Finalizando esse tópico com uma explanação da forma mais resumida possível, uma tábua de vida ou de mortalidade é uma tabela matemática que associa para cada idade variando normalmente de 0 até 100, 115 anos, dentre outras funções ( ${}_nM_x$ ,  ${}_np_x$ ,  ${}_nd_x$ ,  $l_x$ ,  ${}_nL_x$ ,  $T_x$ ,  $e_x$ ,  ${}_nP_x$ ,  ${}_na_x$ )<sup>42</sup>, a probabilidade do indivíduo morrer por qualquer que seja a causa ( ${}_nq_x$ ). Em relação à Previdência, essas tábuas determinam por quanto tempo, em média, um indivíduo receberá um benefício (evento sobrevivência) ou quando, em média, um indivíduo deverá morrer (evento morte) (Silva, 2008).

## 4.2) Tipos de Modelo-Padrão de Mortalidade

Preston et al. (2001) classificam em três tipos os modelos que descrevem o padrão de mortalidade: Representações Tabulares, Modelos Relacionais e Representações Matemáticas (Leis de Mortalidade).

### 4.2.1) Representações Tabulares

Quando se possuem dados não acurados, inadequados ou faltantes, os modelos tabulares são os mais adequados de serem utilizados. Esses modelos partem de um conjunto de tábuas previamente construídas e sintetizam a experiência de mortalidade através de padrões específicos variando em diversos níveis, normalmente indexados pela expectativa de vida ao nascer ( $e_0$ ).

O cerne da questão em utilizar-se de representações tabulares, quando não se possuem dados de qualidade, está no fato de que estudos realizados com dados confiáveis comprovam a existência de um alto índice de correlação entre taxas de mortalidade calculadas para diferentes populações.

Para se escolher qual a tábua-modelo seria a mais adequada, necessita-se de algumas informações independentes, acerca do padrão de mortalidade da população. Quando não são disponibilizadas tais informações, normalmente toma-se como padrão de mortalidade a

---

<sup>42</sup> A literatura que contempla as funções da tábua de mortalidade é vasta. Uma ampla descrição pode ser obtida em: Anderson (2015), Benjamin & Pollard (1980), Brown (1997), Chiang (1984), Halli & Rao (1992), Hinde (1998), Keyfitz & Caswell (2005), Le Brass (2008), Lundquist, Anderton & Yaukey (2015), Murdock & Ellis (1991), Namboodiri & Suchindran (1987), Namboodiri (1996), Newell (1988), Ortega (1987), Palmore & Gardner (1994), Pollard, Yusuf, & Pollard (1990), Poston Jr. & Bouvier (2010), Pressat (2009), Preston, Heuveline, & Guillot (2001), Rowland (2003), Siegel & Swanson (2004), Smith (1992), Srinivasan (1998), Wachter (2014), Weeks (2015), Weinstein & Pillai (2016), Wunsch, Mouchart, & Duchêne (2002) e Yusuf, Martins & Swanson (2014).

experiência de localidades vizinhas (países, estados, etc.) que possuam melhores dados, partindo-se do pressuposto de que as localidades vizinhas têm ambientes epidemiológicos similares, refletidos nas distribuições das causas de mortes e, conseqüentemente, no padrão da mortalidade.

Como exemplos de Modelos Tabulares, podem ser citados os Sistemas de Tábuas-Modelo de Mortalidade da ONU (UN, 1955b), os Sistemas de Tábuas-Modelo Regionais de Coale & Demeny (Coale & Demeny 1966 1<sup>st</sup> ed. e 1983 2<sup>nd</sup> ed.), o Sistema de Tábuas de Lenderman & Breas (Ledermann & Breas, 1959), os Sistemas de Tábuas-Modelo da ONU para países em desenvolvimento (UN, 1982), as Tábuas-Modelo de Mortalidade do Brasil (IBGE, 1981) e, mais recentemente, o modelo bi-dimensional de Mortalidade de Wilmoth e colegas (Wilmoth, Zureick, Canudas-Romo, Inoue & Sawyer, 2012).

#### **4.2.2) Modelos Relacionais**

Os modelos relacionais misturam características das representações tabulares com representações matemáticas (Leis de Mortalidade). A mortalidade é modelada através de uma transformação matemática de um padrão existente e a relação entre idade e mortalidade é expressa de forma tabular, como nas tábuas de vida. A noção básica desse tipo de modelo foi apresentada originalmente por Brass (Brass, 1971), e consiste em construir uma função  $F(\mu_x)$  e relacionar a mortalidade da população em estudo com a mortalidade de uma população conhecida  $\mu_{0,x}$ , ou seja,  $F(\mu_x) = a + b F(\mu_{0,x})$ . Pode-se citar, como exemplos dessa função  $F$ , a função logaritmo e a função logito das taxas de mortalidade por idade (Keyfitz & Caswell, 2005, p.284). A escolha do tipo de função  $F$  depende, logicamente, do contexto específico, e é estabelecido quando do ajuste dos dados por idade e em função de determinado período considerado (Tuljapurkar & Boe, 1998). Desta forma, a mortalidade em diferentes períodos poderá ser comparada em função dos parâmetros “a” e “b” que a descreve.

Segundo Preston et al. (2001), existem duas características distintas de um modelo relacional que determinam o seu sucesso. A primeira diz respeito à escolha do padrão apropriado à população em questão. A segunda está relacionada à regra que especifica a relação entre a mortalidade padrão e a mortalidade da tábua específica.

Alguns desses modelos relacionais são utilizados para prever a mortalidade futura (*forecasting methods*), baseados nos dados observados no passado. Para projetar essa mortalidade

precisamos determinar não apenas as tendências gerais futuras, mas, também, o que deve ocorrer nas diversas idades individuais (Keyfitz & Caswell, 2005, p.283).

Como exemplos de Modelos Relacionais podemos citar o Sistema Logital, desenvolvido por Brass (Brass, 1971), o modelo relacional de quatro parâmetros, desenvolvido por Zaba (Zaba, 1979) e por Ewbank e colegas (Ewbank, Gomez De Leon & Stoto 1983), o modelo de Lee-Carter (Lee & Carter, 1992), que capta a variação da mortalidade no tempo, o modelo de dois parâmetros de Himes, Preston e Condran (Himes, Preston, & Condran, 1994), que faz comparações da mortalidade em idades avançadas em países de baixa mortalidade, dentre outros.

### 4.2.3) Leis de Mortalidade

Ao longo dos anos, muitos esforços foram realizados para encontrar uma função matemática simples, capaz de reproduzir a experiência de mortalidade humana com suficiente grau de precisão. Com isso, diversos Modelos Paramétricos foram criados e têm sido aplicados por demógrafos, cientistas médicos e atuários por aproximadamente 250 anos, tornando-se uma ferramenta muito útil na análise da mortalidade (Tabeau et al., 2002).

Leis de Mortalidade são chamadas também de funções paramétricas. Elas descrevem os padrões etários de mortalidade em termos de funções matemáticas dependentes da idade. O número de parâmetros normalmente varia de dois a nove. As variáveis a serem parametrizadas normalmente são as taxas específicas de mortalidade ( ${}_nM_x$ ) e as probabilidades de morte ( ${}_nq_x$ ), todavia outras funções podem ser utilizadas.

Define-se a força da mortalidade ou probabilidade instantânea de morte para um indivíduo com idade  $x$  ( $\mu_x$ ), como a probabilidade de que um indivíduo morra em um curto intervalo de tempo, dado que o mesmo sobreviveu até o início desse intervalo. Em termos de fórmula matemática, a força da mortalidade é definida como:

$$\mu_{(x)} = \lim_{n \rightarrow 0} {}_n m_x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x} = \lim_{n \rightarrow 0} \left[ \frac{(l_x - l_{x+n})}{n * l_x} \right] = \frac{-d \ln(l_x)}{dx} \quad (16)$$

A criação de uma *Lei de Mortalidade* baseada em  $\mu_x$  implica no desenvolvimento de um modelo paramétrico de risco, envolvendo a realização de uma regressão, onde o risco individual de morte é a variável de interesse a ser estimada, em função de um conjunto de variáveis

explicativas. Alguns autores parametrizaram suas leis de mortalidade não em função da força de mortalidade  $\mu_x$  (ou taxa instantânea de mortalidade - *hazard function*), mas em relação à probabilidade de morte na idade  $x$  ( $q_x$ ), ou mesmo em função do número de sobreviventes na idade  $x$  ( $\ell_x$ ) e seu logaritmo na base 10 ( $\log_{10} \ell_x$ ). Heligman & Pollard (1980), por exemplo, propuseram inicialmente uma parametrização para a razão  $q_x/p_x$ .

Diante da complexidade da realidade existente e em virtude do conhecimento impreciso quanto às causas e mecanismos que atuam intrinsecamente na variabilidade dos dados, muitas vezes é necessário apelar para um modelo matemático/estatístico que objetive, da melhor forma possível, descrever o comportamento dessa realidade. Em função disso, diversas expressões matemáticas foram desenvolvidas na tentativa de descrever o comportamento da mortalidade humana. Alguns desses modelos surgiram apenas como opções aos já existentes, não tendo sido aplicados em grande escala por estudiosos do tema, enquanto que outros têm sido muito utilizados ao longo das décadas.

De forma muito resumida, o comportamento da mortalidade por idade segue a seguinte sequência: a mortalidade começa relativamente elevada ao nascimento, decresce muito rapidamente durante a infância, atingindo um mínimo próximo da idade de 10 anos. Depois deste mínimo, a mortalidade aumenta muito lentamente até as idades no início da senescência (cerca dos 40 anos), quando, a partir de então, o crescimento torna-se cada vez mais acelerado conforme os indivíduos envelhecem. Mais recentemente, em função do aumento da mortalidade por causas externas, que atinge principalmente os homens adultos jovens, foi adicionado um fator de risco a esses modelos matemáticos, na tentativa de representar justamente o *accident hump* na curva de mortalidade, que surge quando da passagem dos indivíduos para a fase adulta.

Segundo Bowers et al. (1997), existem três principais justificativas para se postular uma forma analítica para as funções de mortalidade ou sobrevivência. A primeira possui o aspecto filosófico. Muitos dos fenômenos estudados na física podem ser explicados de forma eficiente pela utilização de fórmulas simples. Por esse motivo, alguns autores sugerem que a sobrevivência humana seja governada igualmente, por uma simples lei. A segunda justificativa tem a ver com o aspecto prático da coisa. É muito mais fácil trabalhar com uma função com alguns parâmetros do que trabalhar com uma tábua de vida completa, com, talvez, 100 ou mais parâmetros ou probabilidades de morte. Além disso, algumas das formas analíticas possuem interessantes propriedades, convenientes para a estimativa das probabilidades, envolvendo mais de uma vida. Por último, a terceira justificativa está relacionada com a relativa facilidade em se

estimar os parâmetros de uma função de sobrevivência, através dos dados brutos de mortalidade.

A formulação dos modelos matemáticos permite que todas as Leis de Mortalidade desenvolvidas sejam divididas em funções polinomiais e funções não polinomiais (Tabeau, 2002). Um grupo de modelos possui extenso *background* teórico, enquanto que o outro não. Algumas funções paramétricas foram desenvolvidas para todos os grupos etários, enquanto outras, apenas para uma parcela do *age span*.

As funções polinomiais são utilizadas nas técnicas de graduação e interpolação. Uma motivação para a utilização de polinômios na modelagem dos padrões etários de mortalidade é que a grande maioria das funções matemáticas pode ser aproximada com vários graus de precisão, através da conhecida Série de Taylor. Desta forma, a probabilidade de morte ou sua razão de chance (*odds ratio*) e a expectativa de vida são, frequentemente, modeladas por polinômios dos mais diversos graus.

As funções não polinomiais consistem, basicamente, em modelos de componentes aditivas. As mais recentes geralmente assumem que diferentes causas de morte atuam em diferentes etapas da vida das pessoas (no primeiro ano de vida e na infância, na fase adolescente/adulta e na fase idosa). Esses modelos usualmente incluem três componentes, cada uma contemplando determinado estágio da vida (infância + início da vida adulta + senescência). Essas componentes são definidas de forma que cada uma delas vai gradualmente desaparecendo (tendendo a zero) nas idades diferentes das quais elas foram especificadas, e, conseqüentemente, a soma de todas as componentes descreve o padrão de mortalidade através de todas as idades.

Os primeiros modelos criados eram focados principalmente na estimação da mortalidade adulta e de idosos, tal como o de Gompertz (1825) e o de Makeham (1860). Depois da primeira modificação proposta por Makeham na função de Gompertz, outros autores fizeram as suas considerações e propostas baseadas na equação original, tal qual fizeram Perks (1932), Beard (1961) e Kannisto (1992). Como todos esses modelos foram desenvolvidos para representar apenas a mortalidade adulta e nas idades avançadas (senescência), não podem ser estendidos para descrever o comportamento da mortalidade em todas as idades, principalmente nas primeiras (crianças e jovens).

Como a mortalidade varia de forma não linear com as idades, principalmente durante a infância e adolescência dos indivíduos, outros tipos de modelos mais complexos foram criados com o intuito de contemplar a mortalidade das pessoas para todas as idades. O pioneiro desses modelos, o de Thiele & Sprague (1871), foi seguido pelo modelo de Wittstein (1883) e posteriormente Heligman & Pollard (1980), Rogers & Planck (1983), Kostaki (1992) e Carriere (1992), dentre outros.

O *Quadro 1*, a seguir, apresenta algumas das principais Leis de Mortalidade desenvolvidas ao longo da história da humanidade, dentro da ideia de *resumo de referencial teórico histórico* apresentada por Tabeau (2002), Tabeau et al. (2002) e Forfar (2006), e mais abrangente do que a de Higgins (2003).

Quadro 1 – Principais Leis de Mortalidade criadas ao Longo da História

Ano	Autor	Idade Ajuste Mort.	Nº Parâm.	Fórmula Matemática
1725	De Moivre	Adulta	1	$\mu_x = \frac{1}{(\omega-x)}$ ou ${}_x p_0 = \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)$ , onde $\omega = 86$
1776	Lambert*	Adulta	4	${}_x p_0 = \left\{\frac{a-x}{x}\right\}^2 - b \left\{e^{-\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{d}}\right\}$
1823	Babbage*	Adulta	2	${}_x p_0 = 1 - bx - ax^2$
1825	Gompertz	Adulta	2	$\mu_x = Bc^x$ ou $\mu_x = e^{\alpha_1 + \alpha_2 x}$ ou ${}_x p_0 = e^{-k(c^x - 1)}$
n.a.	Inverse Gompertz**	Accident Hump	2	$\mu_x = \frac{1}{\sigma} \exp^{-\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)} / \left(\exp\left\{e^{-\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)}\right\} - 1\right)$
1839	Moser*	Adulta	5	${}_x p_0 = 1 - ax^{\frac{1}{4}} + bx^{\frac{9}{4}} - cx^{\frac{17}{4}} - dx^{\frac{25}{4}} + ex^{\frac{33}{4}}$
1860	Makeham	Adulta	3	$\mu_x = A + Bc^x$ ou $\mu_x = \alpha_1 + e^{\alpha_1 + \alpha_2 x}$ ou ${}_x p_0 = e^{-k(bx + c^x - 1)}$
1860	Gompertz* (Second)	Todas	10	$\ln(l_x) = -bc^x + gh^x - xdf^x - jkm^x(x-n)$ onde $\ln(l_x)' = \mu_x$
				<i>obs: para a nomenclatura original dos parâmetros vide Gompertz (1860)</i>
1870	Opperman*	Infantil	3	$\mu_x = ax^{-\frac{1}{2}} + b + cx^{\frac{1}{2}}$ ou $\mu_x = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x}$
1871	Thiele & Sprague	Todas	7	$\mu_x = a_1 e^{-b_1 x} + a_2 e^{-\frac{1}{2} b_2^2 (x-c)^2} + a_3 e^{b_3 x}$
	Thiele & Sprague*		7	$\mu_x = Ae^{-Bx} + Ce^{-D(x-E)^2} + FG^x$
1883	Wittstein & Bumsted	Todas	4	$q_x = \frac{1}{m} a^{-(mx)^n} + a^{-(M-x)^n}$
1890	Makeham (Second)	Adulta e Avançada	4	$\mu_x = A + Hx + Bc^x$ ou $\mu_x = \alpha_1 + \alpha_2 x + e^{\alpha_3 + \alpha_4 x}$ ou ${}_x p_0 = e^{-k(bx + dx^2 + c^x - 1)}$

Ano	Autor	Idade Ajuste Mort.	Nº Parâm.	Fórmula Matemática
1930	Steffenson	Infantil	3	$\log_{10}(l_x) = 10^{-A\sqrt{x}-B} + C$
1932	Perks 1	Adulta	4	$\mu_x = \frac{A+Bc^x}{1+Dc^x}$ ou $\mu_x = c + \frac{ae^{bx}}{1+ae^{bx}}$ ou $\mu_x = A + \frac{GH^x}{1+KGH^x}$ (curva logística)
1932	Perks 2	Adulta	5	$\mu_x = \frac{A + Bc^x}{Kc^{-x} + 1 + Dc^x}$
1936	Harper	Infantil	4	$\log_{10}(l_x) = A + 10^{B\sqrt{x}+Cx+D}$
1939	Weibull	Infantil	2	$\mu_x = Ax^B$ ou $xp_0 = e^{-A\left(\frac{x^{B+1}}{B+1}\right)}$
	<i>obs: vide também Weibull (1951)</i>			
	Weibull**	Infantil	2	$\mu_x = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{\sigma}-1}$
n.a.	Inverse Weibull**	Accident Hump	2	$\mu_x = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{\sigma}-1} / \left( \exp \left\{ \left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{\sigma}} \right\} - 1 \right)$
1943	Van der Maen 1***	Adulta e Avançada	4	$\mu_x = A + Bc^x + \frac{c}{N-x}$
1943	Van der Maen 2***	Adulta e Avançada	5	$\mu_x = A + Bc + Cx^2 + \frac{I}{N-x}$
1961	Brillinger	Todas	8	$\mu_x = \sum_i \left( H_i(x - B_i)^{c_i-1} + \frac{A_i}{(b_i - x)^{c_i+1}} + E_i d_i^x \right)$
1961	Beard***	Adulta	3	$\mu_x = \frac{Be^{ux}}{1 + De^{ux}}$
1971	Beard	Adulta e Avançada	5	$q_x = A + \frac{Bc^x}{Ec^{-2x} + 1 + Dc^x}$
1974	Barnett*	Adulta e Avançada	4	$q_x = \frac{A - Hx + Bc^x}{1 + A - Hx + Bc^x}$
1979	Siler	Todas	5	$\mu_x = a_1 e^{-b_1 x} + a_2 + a_3 e^{b_3 x}$ ou $\mu_x = Ae^{-Bx} + C + De^{Ex}$
1980	Heligman & Pollard 1	Todas	8	$\frac{q_x}{p_x} = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + GH^x$
1980	Heligman & Pollard 2	Todas	8	$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^x}{1 + GH^x}$

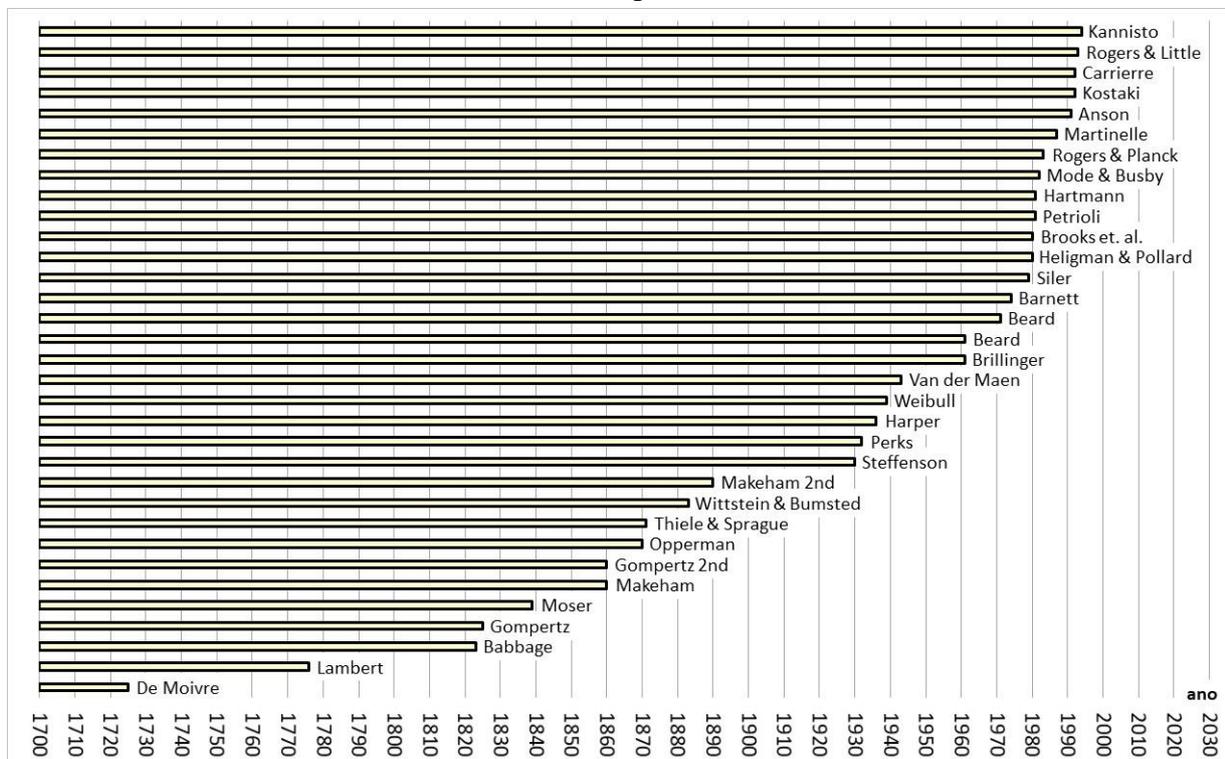
Ano	Autor	Idade Ajuste Mort.	Nº Parâm.	Fórmula Matemática
1980	Heligman & Pollard 3	Todas	9	$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^x}{1 + KGH^x}$
1980	Heligman & Pollard 4	Todas	9	$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^{x^K}}{1 + GH^{x^K}}$
1980	Brooks, Sams & Williams****	Todas	7	<p>Onde:</p> $\mu(x) = \mu_1(x) + \mu_A(x) + \mu_S(x)$ $\mu_1(x) = Q_0 \text{ para } x = 0 \text{ OU } Q_1 x^\gamma \text{ para } x > 0$ $\mu_A(x) = Q_A e^{\frac{(\ln x - \ln A)^2}{\delta^2}} \text{ para } x \geq 0$ $\mu_S(x) = \frac{Q_S e^{\frac{x}{\bar{s}}}}{1 + Q_S e^{\frac{x}{\bar{s}}}} \text{ para } x \geq 0$
1981	Petrioli****	Todas	5	$S(x) = \frac{1}{x^a (\omega - x)^{-b} e^{\frac{c}{2}x^2 + dx} \frac{1}{k} + 1}$
1981	Hartmann****	Parciais	7	<p>idades (0, 15) =&gt; <math>y(x) = A_1 + B_1 \ln x</math>  idades (15, 35) =&gt; <math>y(x) = A_2 + B_2 x</math>  idades (35-60) anos =&gt; <math>y(x) = A_3 + B_3 c^x</math>  Onde: <math>Y(x) = \text{logito}[l(x)]</math></p>
1982	Mode & Busby	Parciais	8	<p>mortalidade início (0, 10) =&gt; <math>\mu_0(x) = \alpha_0 \beta_0 e^{-\beta_0 x}</math>  mortalidade meio (10, 30) =&gt; <math>\mu_1(x) = \alpha_1 - \beta_1(x - \gamma_1)^2</math>  mortalidade fim (30+) =&gt; <math>\mu_2(x) = \alpha_2 + \beta_2 \gamma_2 e^{\gamma_2 x}</math></p>
1983	Rogers & Planck****	Todas	9	$q_x = A_0 + A_1 e^{-\alpha_1 x} + A_2 e^{-\alpha_2(x - \mu_2) - e^{-\lambda_2(x - \mu_2)}} + A_3 e^{-\alpha_3 x}$
1987	Martinelle****	Todas	5	$\mu_x = \frac{A + Be^{kx}}{1 + De^{kx}} + ce^{kx}$
1991	Anson	Todas	6	$-\ln(l(x)) = \frac{1}{5}[\sigma(x - \xi)]^5 - \frac{1}{3}\phi[\sigma(x - \xi)]^3 + \frac{1}{2}\tau[\sigma(x - \xi)]^2 + \lambda\sigma(x - \xi) + \delta$
1992	Kostaki****	Todas	8	$\frac{q_x}{p_x} = A^{(x+B)^C} + De^{-E_1^2 \log\left(\frac{x}{F}\right)^2} + GH^x, x \leq F$ $\frac{q_x}{p_x} = A^{(x+B)^C} + De^{-E_2^2 \log\left(\frac{x}{F}\right)^2} + GH^x, x > F$
1992	Carrierre	Todas	8	$S_x = \psi_1 \exp\left\{-\left(\frac{x}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{\sigma_1}}\right\} + \psi_2 \left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{m_2}\right)^{\frac{m_2}{\sigma_2}}\right\}\right]$ $+ \psi_3 \exp\left\{e^{\frac{m_3}{\sigma_3}} - e^{\frac{(x-m_3)}{\sigma_3}}\right\}$
<i>Obs: Weibull + Inverse Weibull + Gompertz</i>				

Ano	Autor	Idade Ajuste Mort.	Nº Parâm.	Fórmula Matemática
1993	Rogers & Little***	Todas	12	$y(x) = a_0 + m_1(x) + m_2(x) + m_3(x) + m_4(x)$ Onde: $m_1(x) = a_1 \exp(-\alpha_1 x)$ $m_2(x) = a_2 \exp(-\alpha_2(x - \mu_2) - \exp(-\lambda_2(x - \mu_2)))$ $m_3(x) = a_3 \exp(-\alpha_3(x - \mu_3) - \exp(-\lambda_3(x - \mu_3)))$ $m_4(x) = a_4 \exp(-\alpha_4 x)$ $y(x) = q(x), q(x)/p(x), \mu(x)$
1994	Kannisto	Avançadas	2	$\mu_x = \frac{Ae^{Bx}}{1 + Ae^{Bx}}$
* apud Forfar (2006) ** apud Carriere (1992) *** apud Tabeau et al. (2002)				

Fonte: autores e anos citados

O Gráfico 13, a seguir, apresenta a linha do tempo (*timeline*) das Leis de Mortalidade criadas pelos autores em destaque na tabela anterior, iniciando com De Moivre em 1725.

Gráfico 13 – Linha do Tempo das Leis de Mortalidade



fonte: criado em função do quadro anterior

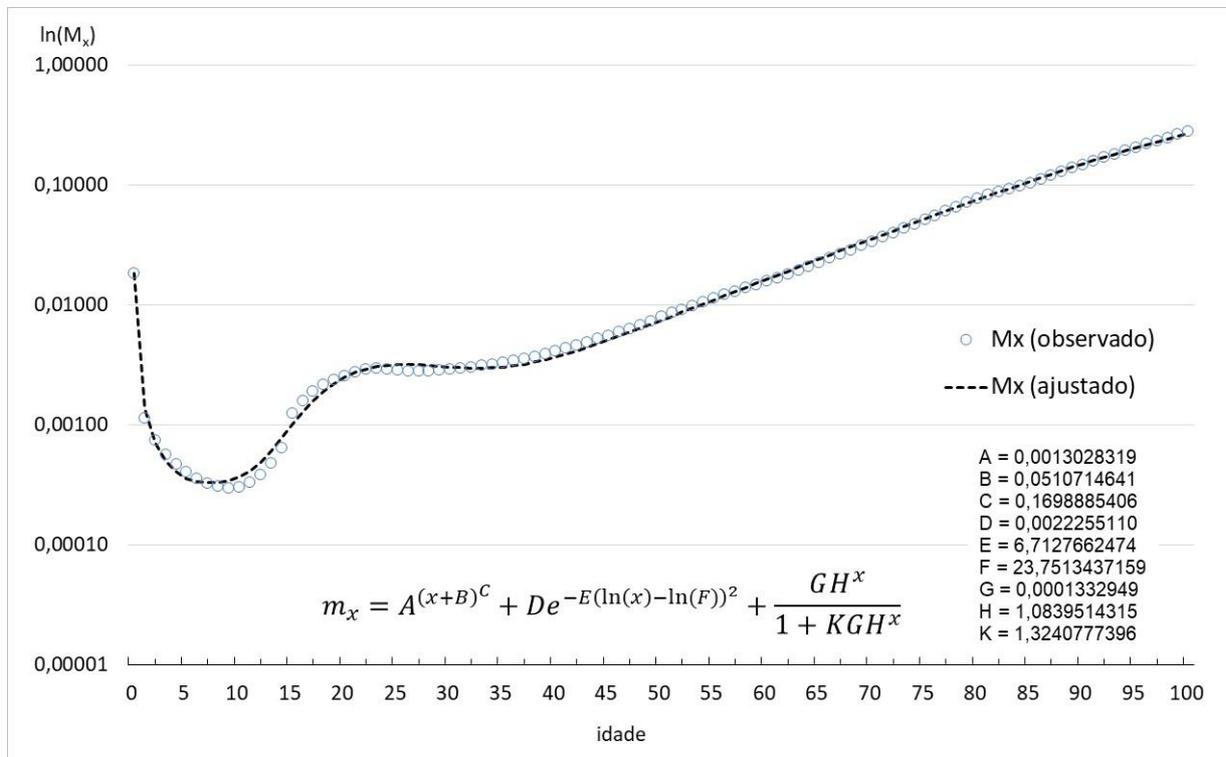
#### 4.2.4) Parametrização da mortalidade: Ajuste do modelo HP3

Apesar de não ter sido um dos objetivos principais desta tese, a parametrização das curvas de mortalidade é um exercício importante de ser realizado, aproveitando a oportunidade existente e abrindo margem para estudos em relação à evolução dos parâmetros da Lei de Mortalidade ao longo do tempo.

Nesse sentido, foi ajustado o modelo de Heligman & Pollard 3 para as 126 curvas<sup>43</sup> de mortalidade que fazem parte dos dados-base para o modelo de projeção, utilizando mais uma vez o pacote “*Mortality Laws*” (Pascariu, 2018) do R, permitindo, assim, a construção de séries temporais para cada um dos nove parâmetros do modelo.

Apenas para exemplificar, o *Gráfico 14*, o *Gráfico 15* e o *Gráfico 16*, a seguir, apresentam os ajustes realizados para o Brasil em 2010, para homens, mulheres e ambos os sexos, respectivamente. O ANEXO 2 apresenta todos os coeficientes ajustados, *loss functions* utilizadas, além dos gráficos dos ajustes e resíduos para as 126 curvas de mortalidade.

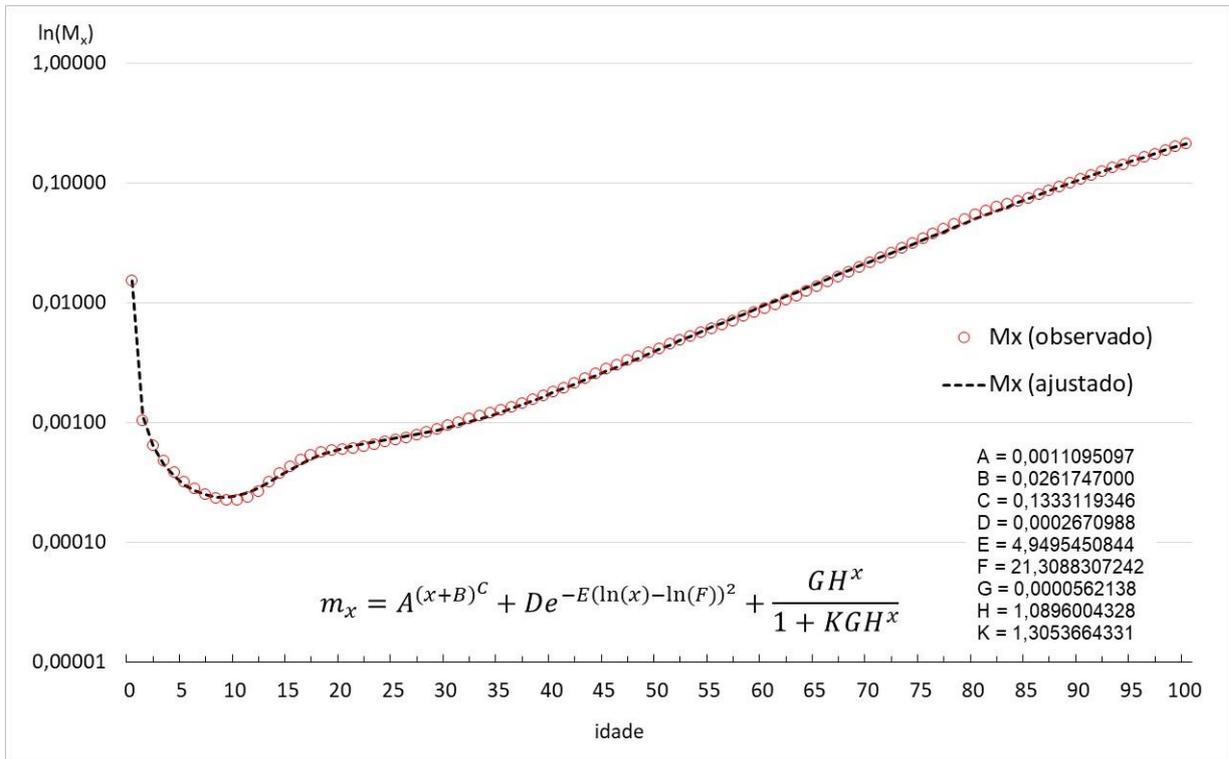
Gráfico 14 – Brasil –  $M_x$ 's – Valores Observados X Ajustados HP3 – 2010 – Homem



fonte: IBGE, Tábua de Mortalidade 2010

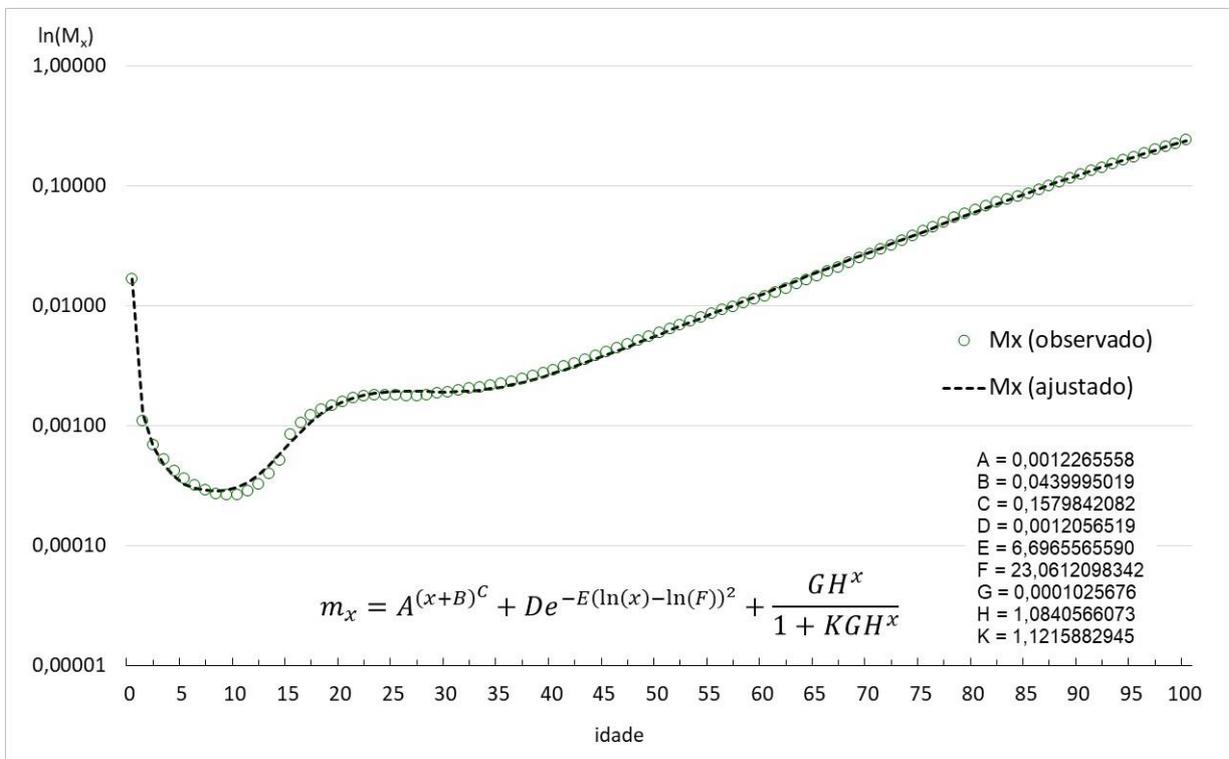
<sup>43</sup> 126 = 7 (sete) pontos no tempo (1950, 1960, 1970, 1980, 1991, 2000 e 2010) X 6 (seis) localidades (Brasil, Norte, Nordeste, Sudeste, Sul e Centro-Oeste) X 3 (três) grupos (Homens, Mulheres e Ambos).

Gráfico 15 – Brasil –  $M_x$ 's – Valores Observados X Ajustados HP3 – 2010 – Mulher



fonte: IBGE, Tábua de Mortalidade 2010

Gráfico 16 – Brasil –  $M_x$ 's – Valores Observados X Ajustados HP3 – 2010 – Ambos



fonte: IBGE, Tábua de Mortalidade 2010

### 4.3) Métodos para a projeção da mortalidade

Durante o século XX a mortalidade declinou a uma taxa relativamente constante, contudo foi observado uma significativa heterogeneidade no número de mortes por idade, *causa mortis* e ano calendário. Quando um pesquisador escolhe um modelo que considera apropriado para projetar os caminhos futuros da variável, deve-se ter em mente se o método será capaz de refletir essa heterogeneidade observada no passado (Darkiewicz & Hoedemakers, 2002). Em função das séries temporais observadas, algumas perguntas fundamentais e obrigatórias devem ser feitas: 1) será que os dados históricos seriam capazes de prever todo o comportamento futuro da mortalidade?; 2) qual seria o período histórico mais adequado de ser utilizado para a projeção da mortalidade?; 3) podemos assumir que as tendências atuais serão mantidas nas próximas décadas?; 4) devemos arbitrar um nível limite de mortalidade a ser alcançado pelo modelo?; 5) devemos impor a existência de algumas barreiras biológicas não transpostas?; As difíceis respostas aos questionamentos feitos prejudicam as projeções da mortalidade numa perspectiva de prazo muito longo. Todavia seu exercício, mesmo que em curto e médio prazos, necessita ser realizado, e por isso a adequada escolha do método de projeção é tão importante.

A contínua redução das taxas de mortalidade e sua sistemática sobrestimação em projeções oficiais governamentais e aplicações atuariais têm atraído significativo interesse dos pesquisadores nos últimos tempos, devido ao seu potencial impacto no tamanho e estrutura da população, nos sistemas de seguridade social e, do ponto de vista atuarial, no setor de seguros de vida, aposentadorias e pensões em todo o mundo (Wong-Fupuy & Haberman, 2004). Apesar de existir um amplo consenso dos especialistas para as projeções da mortalidade: 1) de que existe uma relação aproximadamente log-linear entre as taxas de mortalidade e a variável tempo; 2) de que os ganhos são decrescentes em função do aumento da idade; e 3) de que existe uma tendência crescente na taxa relativa de mudança de mortalidade ao longo das idades; as evidências sugerem que a dependência excessiva da opinião dos *experts*, enraizada até certo ponto em diversos dos métodos de projeção elaborados no passado, levou à subestimação sistemática das melhorias observadas na mortalidade. Ainda segundo Wong-Fupuy & Haberman (2004), os modelos de projeção desenvolvidos durante muito tempo revelam o *tradeoff* existente entre plausibilidade do padrão etário projetado e facilidade para a medição da incerteza envolvida, sendo que o modelo proposto por Lee-Carter aparentemente conseguiu solucionar esse dilema.

O maior problema na projeção das taxas específicas de mortalidade é a alta dimensionalidade (número total de “células” que são modeladas, igual ao produto do número de categorias pelos fatores que classificam os dados), especialmente quando os dados são utilizados em idade simples. Nesse contexto, modelos são amplamente utilizados para reduzir o problema da dimensionalidade, através da representação dos dados de forma mais parcimoniosa. Os modelos parcimoniosos evitam a sobre-parametrização (correlação de parâmetros) e as complicações inerentes ao exercício da projeção. Modelos paramétricos ou não-paramétricos podem ser utilizados. Os modelos paramétricos incluem funções de parametrização, tal como as diversas Leis de Mortalidade desenvolvidas, além daqueles estruturados na forma de Modelos Lineares Generalizados (*Generalized Linear Models*). Os métodos de *splines* têm sido utilizados de forma crescente na redução da dimensionalidade, e sua flexibilidade garante bons ajustes. Métodos não-paramétricos, como aqueles que utilizam a abordagem de componentes principais, controlam o problema da dimensionalidade pela extração dos padrões etários dos dados, enquanto que os modelos relacionais substituem a escala etária por um padrão exógeno, empiricamente derivado. Como veremos na sequência, diversos autores classificam os métodos de projeção da mortalidade, agregando os mesmos em grupos e sub-grupos, não muito raramente diferentes.

Na prática, a classificação dos métodos de projeção da mortalidade varia de autor para autor e a distinção entre essas diferentes classificações nem sempre é clara (Booth & Tickle, 2008; Tabeau, 2002).

Por exemplo, Girosi & King (2008) descrevem uma estrutura unificada que abrange diferentes (e muitas vezes, concorrentes) modelos propostos por vários pesquisadores para a projeção da mortalidade e citam que, apesar dos detalhes das técnicas poderem ser muito diferentes, o foco metodológico subjacente é o mesmo. A ideia básica é reduzir a dimensionalidade dos dados para um menor número de parâmetros, considerando a modelagem direta de alguns padrões sistemáticos descobertos. Com isso, os autores segmentam os métodos de projeção da mortalidade em métodos sem covariáveis (abordagens de extrapolação de população, abordagens paramétricas, abordagens não paramétricas, abordagens na linha de Lee-Carter) e métodos com covariáveis (máxima-verossimilhança equação por equação, séries temporais/agrupamento *cross-section*, agrupamento parcialmente *cross-section* via correlações alteradas, métodos de causa específica com informação em nível micro).

Já Oliveira et al. (2012, p. 99-100) classificam os métodos de projeção, grosso modo, em duas formas alternativas de se incorporar a dimensão temporal à informação de mortalidade: 1) métodos não paramétricos, como a “referência móvel” (onde normalmente escolhe-se uma função que atribui pesos maiores a anos mais recentes e menores a anos mais pretéritos) ou o “*improvement* nas taxas” (multiplicador anual que se aplica às taxas de mortalidade de uma determinada tábua para fazê-la evoluir ao longo do tempo); e 2) métodos paramétricos, como aqueles desenvolvidos na linha de Acevedo & Panjer (1999) (onde os parâmetros que compõem o modelo matemático que descreve a função de mortalidade são projetados de forma individual e a função de mortalidade é descrita pela aplicação dos parâmetros projetados em determinado tempo futuro) e modelos como os propostos por Lee & Carter (1992) e variantes (onde a função de mortalidade é projetada como um todo, nível e padrão, e as componentes temporal e estrutural apresentam-se aditivas na força de mortalidade).

Por sua vez, o Departamento Atuarial do Governo do Reino Unido (*UK's Government Actuary's Department*) classifica, da seguinte forma, os métodos de projeção da mortalidade (GAD, 2001; Gallop, 2008): 1) métodos baseados em processos (modelam a mortalidade sob uma perspectiva biomédica, concentrando-se nos fatores determinantes das mortes); 2) métodos explanatórios (envolvem relações econométricas e de meio ambiente, empregando aproximações de previsão por causa); e 3) métodos extrapolativos (projetam a mortalidade baseados em tendências históricas passadas, fazendo o uso de métodos estatísticos que normalmente fornecem medidas de incerteza).

Especificamente em relação aos métodos extrapolativos, sua classificação também pode variar de autor para autor. Por exemplo, Wong-Fupuy & Haberman (2004) classificam os métodos extrapolativos em função da experiência observada nos Estados Unidos e Reino Unido em: 1) modelos baseados em projeções independentes das taxas específicas de mortalidade ou *hazard rates* (Alho & Spencer, 1985), incluindo modelos de fatores de redução de mortalidade (CMIB, 1990, 1999; Willets, 1999; Renshaw & Haberman, 2000), salientando que esses modelos, apesar de poderem incorporar medidas de incerteza, também podem gerar padrões etários futuros implausíveis; 2) modelos relacionais, que associam funções da tábua de vida com aquelas de uma tábua padrão (Brass, 1971); 3) modelos baseados em graduação das medidas de mortalidade em relação à idade, para determinados períodos de tempo, envolvendo dois estágios, de forma que os parâmetros precisam ser projetados (Congdon, 1993; Forfar & Smith, 1987; McNown & Rogers, 1989) ou um estágio (Renshaw, Haberman, & Hatzopoulos, 1996; Sithole, Haberman, & Verrall, 2000), salientando que esses modelos podem gerar tendências

implausíveis para a projeção da mortalidade, mas, em compensação, levam a estimativas diretas para os erros de previsão; e 4) o método de Lee-Carter (Lee & Carter, 1992; Lee, 2000; Renshaw and Haberman 2003c) que, segundo os autores, parece ter resolvido o problema do *tradeoff* entre plausibilidade do padrão etário projetado e facilidade para a medição da incerteza envolvida. Não obstante algumas críticas sofridas em relação à sua natureza exclusivamente extrapolativa (Gutterman & Vanderhoof, 1998), o modelo LC tem sido utilizado em aplicações demográficas e de seguridade social (Lee, 2000), tendo a sua adoção sido sugerida para as projeções do Sistema de Seguridade Social dos Estados Unidos (Lee & Tuljapurkar, 1997).

Por seu turno, GAD (2001) e Gallop (2008) dividem os métodos extrapolativos, de forma mais resumida, em: 1) métodos paramétricos (envolvem o ajuste de uma função parametrizada para os primeiros anos da projeção e depois a projeção desses parâmetros para o futuro); 2) métodos de *targeting* (que envolvem a interpolação das taxas de mortalidade atuais e um conjunto de taxas constantes em uma data futura), e 3) modelos de tendência (que envolvem a projeção de tendências históricas para o futuro).

Já Booth & Tickle (2008) dividem os métodos de projeção da mortalidade em três grupos específicos: expectativos, explicativos e extrapolativos. Essa divisão proposta pelas autoras será abordada com mais detalhes na sequência.

#### **4.3.1) Métodos Expectativos (*Expectation*)**

Os métodos dentro da abordagem expectativa são aqueles baseados nas opiniões de *experts*, normalmente utilizando uma perspectiva fixa (cenário médio) alocada em um ponto futuro, frequentemente acompanhada de cenários alto e baixo (Booth & Tickle, 2008). De acordo com Waldron (2005), grande parte das agências oficiais de estatística dos países membros da OCDE utilizou, durante muito tempo, a opinião de *experts* para projetar o comportamento futuro da mortalidade, sendo que, hoje em dia, a situação mais comum observada é uma combinação entre a *expert opinion* e a extrapolação de tendências passadas da mortalidade.

Segundo Olshansky (1988), um método comum e tradicionalmente muito utilizado é o de *targeting* das Taxas Específicas de Mortalidade ( ${}_nM_x$ ) ou da expectativa de vida ( $e_x$ ), onde é assumido um determinado valor para uma data futura, com um caminho específico a ser seguido. Nesse caso, toma-se emprestado um conjunto de  ${}_nM_x$ 's ou *schedule* de mortalidade observado em uma outra população ou sub-grupo populacional, como uma referência (*target*),

para a qual se acredita que as atuais  ${}_nM_x$ 's da população em questão irão convergir ao longo do tempo. Vários métodos estatísticos são utilizados para projetar a trajetória da redução nas taxas de mortalidade entre as  ${}_nM_x$ 's no início da projeção e as  ${}_nM_x$ 's *target* alocadas no futuro, incluindo simples reduções em percentual das taxas até procedimentos mais complexos de ajuste de curvas.

Por exemplo, o IBGE, na revisão da projeção de população de 2013 (IBGE, 2013a) e, mais recentemente, na de 2018 (IBGE, 2018), considerou como *target* as  ${}_nM_x$ 's das tábuas limite de mortalidade disponibilizadas pelo *U.S. Census Bureau* para homens e mulheres, alocando as mesmas em 2100 e realizou uma interpolação linear simples entre essas últimas  ${}_nM_x$ 's e aquelas calculadas com base no Censo Demográfico de 2010. Segundo Hollmann et al. (2000), o *U.S. Census Bureau* considerou na projeção populacional de 1999-2100 dos Estados Unidos uma convergência, no longo prazo, para tábuas de mortalidade-limite (*target*), alocadas em 2150, em conjunto com as  $e_x$ 's projetadas pelo método de Lee-Carter utilizadas como *benchmark*, além da *expert opinion* para determinar a mudança relativa no declínio da mortalidade por idade. Já na projeção de população realizada pelo *U.S. Census Bureau* em 2014 (United States Census Bureau, 2014), a metodologia de projeção da mortalidade passou por algumas alterações, utilizando como *target* a tábua modelo Oeste de Coale & Demeny atualizada (UN, 2010), com nível de  $e_0$  igual a 87 anos para homens e 91 anos para mulheres, sendo as tábuas ao longo do horizonte da projeção obtidas através de interpolação log-linear das últimas  ${}_nM_x$ 's calculadas e aquelas das tábuas *target*. Para essa projeção de população dos Estados Unidos de 2014, o horizonte foi mais modesto do que o das projeções anteriores, agora de 2014 até 2060.

Segundo Booth & Tickle (2008), as opiniões de *experts* também têm sido acatadas para calibrar os fatores de redução da mortalidade utilizados em determinados métodos, como os do *Continuous Mortality Investigation Bureau (CMIB)*, do Reino Unido, da *U.S. Society of Actuaries (SOA)* e do *UK Government Actuary's Department (GAD)*. Ainda segundo as autoras, uma vantagem na opinião de *experts* é a possibilidade de incorporação do conhecimento demográfico e epidemiológico, dentre outros, pelo menos de forma qualitativa. A desvantagem é a subjetividade inerente ao processo e a potencialidade de viés.

#### **4.3.2) Métodos Explicativos (*Explanation*)**

Os métodos da linha explicativa fazem uso de modelos estruturais ou epidemiológicos de mortalidade, considerando certas causas de morte, cujas variáveis exógenas principais são

conhecidas e podem ser mensuradas. A principal vantagem desse tipo de abordagem é que os mecanismos de *feedback* e os fatores limitadores podem ser levados em consideração. Aqui, alguns clássicos exemplos seriam a dependência/correlação existente entre: o câncer de pulmão ou o AVC X tabagismo, a diabetes ou a hipertensão arterial X obesidade, dentre outros.

Na verdade, a metodologia explicativa para a projeção da mortalidade ainda precisa ser muito desenvolvida (Booth & Tickle, 2008). As relações existentes entre os fatores de risco e a mortalidade ainda não são muito bem compreendidas, tornando a sua utilização em projeções menos confiável. A principal utilização dos modelos epidemiológicos existentes está na simulação do efeito de mudanças em políticas públicas que afetam diretamente os fatores de risco que causam a morbidade ou a mortalidade, e não na projeção da mortalidade propriamente dita.

Dentro da abordagem explanatória, por exemplo, Jeths et al. (2001) e Van Genugten et al. (2001) utilizaram regressões, dentro do campo dos MLG. Booth & Tickle (2008) citam que esses modelos diferem dos modelos extrapolativos que utilizam regressões, pelo fato dos primeiros incorporarem fatores de risco ou variáveis explicativas. Quando esses modelos estruturais são baseados exclusivamente em fatores de risco exógenos, o horizonte da projeção fica limitado ao curto prazo. Ainda nessa linha, Girosi & King (2008) estenderam a utilização dos modelos estruturais na projeção da mortalidade nos países desenvolvidos, considerando a utilização de métodos bayesianos. Nesse caso, modelos de regressão idade-período (*age-period*) foram utilizados para relacionar as causas específicas de mortalidade às covariadas conhecidas.

### **4.3.3) Métodos Extrapolativos (*Extrapolation*)**

A extrapolação é a abordagem mais comum na projeção demográfica. Os métodos extrapolativos são ateóricos, pois a única hipótese assumida é que o futuro, de alguma forma, será uma continuação do passado. Na projeção da mortalidade, essa hipótese é bastante razoável, por conta das regularidades históricas observadas tanto nos padrões etários, quanto nas tendências ao longo do tempo. Essa é a força da extrapolação, mas também pode ser a sua maior fraqueza, visto que os padrões históricos podem não ser os melhores guias para a previsão do futuro, por conta de mudanças estruturais ou nas próprias tendências observadas no passado (Booth, 2006). Os métodos extrapolativos, por sua natureza, não fazem uso de variáveis exógenas, por não incorporar o conhecimento vigente acerca dos atuais e futuros

desenvolvimentos em áreas relevantes, como a medicina através da cura e descoberta de novas doenças, estilo de vida dos indivíduos, aspectos econômicos, políticos e sociais, dentre outros. Por exemplo, Booth & Tickle (2008) citam que situações como a ascensão da AIDS, a flutuação na  $e_x$  na Rússia a partir da década de 1990 e a estagnação da  $e_x$  na Austrália na década de 1960, seriam impossíveis de serem contempladas nas projeções simplesmente extrapolativas.

A abordagem extrapolativa engloba tanto a tradicional e relativamente simples extrapolação linear de medidas sintéticas como a  $e_0$ , tal qual os novos e mais complexos métodos baseados em modelos de dois fatores (*age-period*, *age-cohort*) ou de três fatores (*APC – age-period-cohort*) (Booth & Tickle, 2008).

Os métodos de séries temporais do tipo ARIMA, desenvolvidos originalmente em 1976 por Box & Jenkins (Box et al., 2015), são os normalmente utilizados nas projeções extrapolativas (Tabeau, 2001). Uma grande vantagem existente nos modelos de séries temporais reside no fato dos mesmos serem estocásticos e com isso permitirem o cálculo de um intervalo probabilístico de predição para o valor médio estimado. No caso do *modelo subjacente ser zero-fator* (tal qual as séries temporais de  $e_x$ 's e  ${}_nM_x$ 's), a série é diretamente modelada e projetada. Todavia, esse tipo de exercício é incomum, tendo como maior desvantagem o fato de que a projeção independente da mortalidade, para cada idade, pode gerar padrões implausíveis das curvas, principalmente no longo prazo (Booth & Tickle, 2008). Quando são empregados *modelos de um fator*, as séries temporais são os parâmetros ajustados do modelo determinista, representado por uma função paramétrica (Lei de Mortalidade) ou um modelo relacional, como o de Brass (1971), desenvolvido num contexto de dados de baixa qualidade, mas que possui aplicação muito mais ampla. Booth (2006) salienta que séries temporais com parâmetros erráticos e as interdependências entre os parâmetros representam dificuldades para a projeção. Os padrões etários gerados podem ser implausíveis, e caso as interdependências não sejam levadas em consideração (por exemplo, por uma autoregressão vetorial), os intervalos de confiança serão imprecisos.

Os métodos de Componentes Principais são *modelos de dois fatores*, utilizados em conjunto com a extrapolação de séries temporais. Uma decomposição matricial identifica os componentes independentes da mortalidade ou os padrões etários e a sua importância ao longo do tempo. Para a projeção, os parâmetros ou funções de idade estimados são assumidos fixos, sendo utilizados métodos de séries temporais para extrapolar os parâmetros variantes com o

tempo. Nesse conjunto de modelos, a maior referência de todas é o método proposto por Lee & Carter (1992). Segundo Tabeau (2001), o método LC deve ser visto como um membro da classe dos modelos log-lineares, ou seja, um modelo de associação estatística para uma tabela de classificação cruzada de dois sentidos, com a idade e o tempo sendo os dois critérios de classificação do risco de morte. Em função dessa característica específica, Booth (2006) cita que esse tipo de abordagem percente ao conjunto dos MLG e, dessa forma, pode ser estimado a partir de uma função de máximaverossimilhança com erros distribuídos segundo uma distribuição de Poisson (Forbes et al. 2011; Krishnamoorthy, 2016; Thomopoulos, 2017).

Uma alternativa existente dentro da estrutura dos MLG's é o modelo de regressão bivariada idade-tempo (*age-time*). A diferença essencial entre os modelos LC e MLG's é que neste segundo, o tempo é uma covariada explícita, enquanto que no primeiro o tempo é um fator representado pelas séries temporais. As Funções Paramétricas Dinâmicas constituem um caso especial de modelos, dentro dos MLG's. Segundo Booth & Tickle (2008), tais modelos adotam, como base, uma função paramétrica estática, que representa o padrão de mortalidade inicial reduzido a alguns parâmetros, sendo substituídos *a posteriori* por uma função dependente do tempo. Por exemplo, Tabeau et al. (2001) aplicaram um modelo de parametrização dinâmica aos dados da França, Holanda, Itália e Noruega, no período de 1950 até meados da década de 1990, transformando os parâmetros de um modelo de Gompertz modificado em funções dependentes do tempo.

#### **4.4) Projeções com Leis de Mortalidade**

As Leis de Mortalidade são *modelos de um fator*, que representam, de forma parcimoniosa, o padrão etário da mortalidade (*age pattern of mortality*). Apesar das funções paramétricas terem sido aplicadas de forma bem ampla na graduação da mortalidade, a sua utilização na projeção da mortalidade é bem mais limitada (Booth & Tickle, 2008).

A projeção com Leis de Mortalidade consiste em ajustar uma função paramétrica para cada conjunto de  $M_x$ 's, em determinado ponto no tempo, criando, assim, uma série temporal para cada um dos parâmetros da função. Essas séries de parâmetros são então projetadas, através de métodos de séries temporais. Conforme descrito na seção 4.2.4, o exercício de ajuste do modelo HP3 às  $M_x$ 's das 126 tábuas-base do modelo de projeção (ano: 1950, 1960, 1970, 1980, 1991, 2000 e 2010 / local: BR e GR's / grupo: H, M, A) permitiu a construção de séries temporais para cada um dos parâmetros do modelo (não utilizadas no presente trabalho).

Por exemplo, Acevedo & Panjer (1999), utilizando dados do *Statistics Canada* para os anos de 1941, 1946, 1951, 1956, 1961, 1966, 1971, 1976, 1981, 1986 e 1991 (11 pontos no tempo) ajustaram variantes do modelo de Heligman & Pollard (1980) e identificaram as tendências em cada um dos parâmetros, ao longo do tempo, algumas inclusive lineares.

Em relação aos métodos de séries temporais, os métodos multivariados são os ideais de serem utilizados, em virtude de levarem em consideração qualquer interdependência existente entre os parâmetros da Lei de Mortalidade. Nesse sentido, Booth & Tickle (2008) salientam que séries temporais erráticas de parâmetros, bem como a sua interdependência, representam sérios problemas para a projeção e estabelecimento do horizonte limite. As autoras destacam, também, que diversos estudos de projeção dos parâmetros de Leis de Mortalidade, como o de Heligman & Pollard (1980) e o modelo multiexponencial (Rogers & Planck 1983), resultaram em padrões etários implausíveis e, além disso, por conta da interdependência existente entre os parâmetros, os intervalos de confiança resultantes mostraram-se imprecisos. Outra dificuldade diz respeito à determinação de qual seria o melhor período-base de ser utilizado, na tentativa de obtenção de resultados minimamente consistentes.

#### **4.5) O método de Lee Carter, Variantes e Extensões**

Em contraste com as abordagens paramétricas, que especificam o padrão da curva de mortalidade por idade *a priori*, os métodos de componentes principais (*Principal Components Methods - PCM*), na linha LC, estimam o padrão etário da função de mortalidade através das bases históricas de dados. As projeções são feitas considerando métodos de séries temporais que extrapolam os parâmetros de tempo inerentes a cada modelo.

Muitos autores investigaram a fundo e propuseram variantes e extensões baseadas no trabalho seminal de Lee & Carter (1992), considerado o marco histórico na modelagem estocástica para a projeção das tendências temporais dos dados de mortalidade (Carfora et al., 2017). Por exemplo, Wilmoth (1993) apresentou uma solução de mínimos quadrados ponderados, além da estimativa por maximaverossimilhança, baseada na hipótese de uma distribuição de Poisson para as mortes; Lee & Miller (2001) propuseram utilizar séries temporais desde 1950 e ajustar o  $k_t$  em função da  $e_0$  em determinado ano  $t$ , ao invés do total das mortes, adotado na versão original LC; Booth, Maindonald, & Smith (2002) sugeriram a utilização do período histórico mais relevante, considerando algum critério para a determinação do melhor período-base (*goodness of fit*), e a modelagem de  $k_t$ , considerando a distribuição dos óbitos; Brouhns, Denuit,

& Vermunt (2002) e Koissi, Shapiro, & Högnäs (2006) implementaram o modelo Poisson log-bilinear; Renshaw & Haberman (2003a) propuseram assumir uma distribuição de Poisson para os óbitos e, posteriormente, a incorporação dos efeitos das coortes (Renshaw & Haberman 2006) para modelos de três fatores (APC); Li, Lee, & Tuljapurkar (2004) adaptaram o LC para projeções em países com dados limitados; Currie et al. (2004) sugeriram o uso de *B-splines* e de *P-splines* para ajustar a superfície da mortalidade e a sua aplicação em modelos *Age-Period-Cohort* (APC); Wolf (2004) desenvolveu uma variante do LC aplicada às primeiras diferenças nas  $\log(M_x)$ 's, que conjuga as estimativas LC com modelos de séries temporais; Lee & Chan (2005) propuseram um modelo LC ajustado para *outliers*, que melhora os resultados, quando as bases de dados contém valores atípicos; Czado, Delwarde, & Denuit (2005) utilizaram o modelo Poisson log-bilinear conjugado com estimativa bayesiana para impor suavidade; Koissi & Shapiro (2006) implementaram uma formulação *fuzzy* do LC para contemplar as violações na hipótese de erro constante na variância ao longo das idades; Pedroza (2006) utilizou a estrutura de estado-espço (*state space*) e estimação bayesiana, bem como desenvolveu uma extensão para permitir variabilidade ao longo das idades; Hyndman & Ullah (2007) desenvolveram uma abordagem baseada no paradigma de dados funcionais, nos quais os dados são suavizados por *penalized regression splines*, antes da projeção, permitindo a inclusão de componentes principais de ordens superiores e propondo, também, uma versão robusta via eliminação de *outliers*; De Jong & Marshall (2007) apresentaram um novo método que combina modelos de estado-espço e a transformação de Wang (Wang, 2000), muito utilizado em precificação de seguros e risco financeiro; Hyndman & Shang (2009) sugeriram dar um peso maior para as experiências de mortalidade mais recentes, através de ponderações a serem feitas na proposta de Hyndman & Ullah (2007); Dokumentov and Hyndman (2013) propuseram uma abordagem de retangularização para dados funcionais bivariados.

Merecem destaque os estudos comparativos de Booth et al. (2005 e 2006) e de Shang et al. (2010 e 2011), que demonstraram que o método Lee & Miller (2001) gera resultados tão precisos quanto as outras variantes e extensões mais complexas do LC, e melhores do que a sua versão original de 1992.

Apesar dos modelos alternativos propostos diferirem em um número de características essenciais, tais como as fontes de aleatoriedade, hipóteses acerca de suavização, inclusão dos efeitos de coorte e métodos de estimativa, estudos específicos realizados (Carfora et al., 2017; Dowd et al., 2010; Cairns et al., 2009) demonstraram que, até o presente, nenhum deles claramente domina o outro, levando em consideração os critérios de comparação utilizados,

mantendo-se a indefinição de qual seria o melhor método. Todavia a escolha do modelo não pode ser baseada única e exclusivamente em sua habilidade de descrever os padrões históricos de mortalidade. Adicionalmente, modelos que são mais adequados para determinado país podem não ser os melhores para outros países e vice-versa, em função da forma como variaram as suas taxas de mortalidade ao longo dos anos.

Finalizando essa seção, é importante destacar que o método de Lee-Carter também pode ser utilizado para realizar projeções inversas (Lee, 2004b), também chamadas de retroprojeções.

#### **4.5.1) Antecedentes na Aplicação do método de Lee-Carter com dados do Brasil**

Nos mais de 25 anos desde a sua formalização por Ronald Lee e Lawrence Carter, foram inúmeras, dezenas e, porque não, até centenas de vezes, em que o método LC foi aplicado por pesquisadores do mundo todo, normalmente com base nos dados disponibilizados na HMD, seja para a população geral do país, seja para homens e mulheres em separado, como também para segmentos específicos dentro da área de Seguros e Previdência, já tendo passado por diversas melhorias metodológicas, conforme amplamente já discutido nesta tese.

Como, no capítulo 2 desta tese, foram apresentados exemplos de estudos da aplicação do método de Lee-Carter para dezenas de países ao redor do mundo, a ideia neste tópico, em específico, é detalhar um pouco mais os estudos da sua aplicação aqui no Brasil, considerando dados nacionais.

Como é sabido, o insumo básico para a aplicação do LC são as séries históricas das taxas específicas de mortalidade ( ${}_nM_x$ ), de preferência calculadas anualmente. Quanto maior a amplitude da série histórica, maiores serão as possibilidades de estudos em função da variação nos períodos-base selecionados para as projeções e, conseqüentemente, maior será a chance de obtenção de bons resultados. Diferentemente dos países que figuram nos dados da HMD, que possuem não apenas informações de alta qualidade, mas, também, longas séries históricas que iniciam, às vezes, no século XIX, no Brasil, mesmo nos dias atuais, existem informações de óbitos com boa qualidade apenas em algumas UF's (p.e. estados das Regiões Sul e Sudeste) e nossas séries temporais mais longas de  ${}_nM_x$ 's só podem ser construídas, para a população em geral, desde meados da década de 1970, em função da disponibilização das informações de óbitos por sexo e idade, do ano de 1974 em diante, no caso das Estatísticas do Registro Civil

(RC) e, do ano de 1979 em diante, no caso do Sistema de Informação sobre Mortalidade (SIM/DATASUS).

Apesar da perceptível melhoria na qualidade nas informações básicas dos óbitos ocorrida desde a década de 1980, ainda assim necessita-se aplicar alguma das técnicas indiretas disponíveis para a correção do sub-registro existente<sup>44</sup>. Além disso, as tábuas de mortalidade são normalmente construídas de forma pontual, nos anos de realização dos censos demográficos (1980, 1991, 2000, 2010), resultando numa lacuna em relação às  ${}_nM_x$ 's, em todo o período intercensitário. Essa lacuna só pode ser preenchida se a população em 01/07, em cada ano intercensitário, for estimada através de algum método alternativo (p.e. interpolação linear ou log-linear, aplicação da taxa de crescimento geométrica calculada para o período intercensitário, etc).

No país, seria até possível a construção de séries históricas anuais de  ${}_nM_x$ 's para períodos efetivamente mais longos (de 30, 40 ou 50 anos, p.e.), a partir de registros administrativos de Entidades Fechadas de Previdência Complementar (EFPC) ou mesmo do mercado segurador brasileiro. Entretanto essas informações não são de uso público e sua disponibilização para estudos acadêmicos não é fácil, dependendo de uma série de circunstâncias e etapas burocráticas a serem transpostas.

Apesar das dificuldades existentes e das limitações impostas, alguns poucos estudos com a aplicação do método LC já foram conduzidos no Brasil com dados nacionais. O pioneiro foi conduzido por Fígoli (1998), que aplicou o método LC original para projetar as  ${}_nM_x$ 's de homens e mulheres para o período de 1990-2040, considerando as tábuas de mortalidade abreviadas construídas pelo CELADE em 1994 para o Brasil, período 1950-1990.

Beltrão & Sugahara (2007) aplicaram o LC para a projeção da mortalidade dos servidores públicos federais do Brasil, considerando tábuas de mortalidade construídas por idade simples, sexo e nível de escolaridade, em função dos dados do Sistema Integrado de Administração de Recursos Humanos (SIAPE) no período 1993-2005 (neste caso, em função da escassez dos dados,  $k_t$  não pode ser modelado como um passeio aleatório com tendência e foi simplesmente substituído por  $t$ ).

---

<sup>44</sup> Por exemplo: Brass (1975), Courbage & Fargues (1979), Preston et al. (1980), Preston & Hill (1980), Bennett & Horiuchi (1981) e Hill (1987)

Silva (2009) aplicou a variante proposta por Lee & Miller (2001) para projetar a mortalidade de homens e mulheres no município de São Paulo, de 2006 até 2100, com base em tábuas de mortalidade construídas para o período 1920-2005 e utilizando diversos períodos para as projeções.

Jesus & Oliveira (2014) aplicaram o LC para projetar a mortalidade de homens e mulheres no estado de Sergipe para o ano de 2016, em função de  ${}_nM_x$ 's construídas para os anos entre 1990 e 2011.

Moura (2015) aplicou o LC nas matrizes de  ${}_nM_x$ 's de homens e mulheres do Rio Grande do Sul, construídas no período 1996-2013, e projetou a mortalidade para o horizonte de 2014-2030.

Melo (2017) aplicou o método original LC e a variante LM para projetar a mortalidade da população de ambos os sexos no semiárido brasileiro (região que engloba parte dos estados de PI, CE, RN, PB, PE, SE, AL, BA e MG), para o período 2015-2050, considerando as  ${}_nM_x$ 's construídas no período 1980-2014. Foram utilizados para a construção das tábuas-base, dados de óbitos do SIM e a população exposta ao risco oriunda dos Censos Demográficos de 1980, 1991, 2000 e 2010.

Ratificando o citado anteriormente, foram muito poucos os trabalhos realizados no país utilizando o método de Lee-Carter, variantes ou extensões, considerando tábuas que retratam a experiência de mortalidade brasileira e/ou regional. Existe uma lacuna a ser preenchida. Esta tese de doutorado representa apenas mais um estudo, na tentativa de agregar valor ao material já produzido por outros pesquisadores.

#### **4.6) Modelos Lineares Generalizados**

Segundo Renshaw (1991), muitas das Leis de Mortalidade são casos especiais, dentro da estrutura dos Modelos Lineares Generalizados (*Generalized Linear Models - GLM*). Quando as funções paramétricas são colocadas no contexto dos MLG, obtemos uma estrutura unificada que facilita as generalizações, tal como a extensão dos modelos para incluir a componente *tempo* com o objetivo de realizar projeções, como apresentado na seção 4.4 desta tese.

Renshaw, Haberman, & Hatzopoulos (1996) apresentaram um modelo de dois fatores que se ajustou bem aos dados de mortalidade dos homens no grupo etário de 22-89 anos, e que possuíam seguro de vida no Reino Unido. O modelo proposto foi baseado numa distribuição de

Poisson mais dispersada (*over-dispersed*) das mortes, composta por um termo de graduação Gompertz-Makeham, em combinação com um termo de ajuste de tendência por idade  $x$ .

Renshaw & Haberman (2000) utilizaram MLG's para modelar os fatores de redução da mortalidade e identificaram as condições sob as quais a estrutura subjacente dos modelos propostos seria idêntica ao modelo de Lee-Carter. Em 2003, os autores publicaram três trabalhos, ampliando o estudo iniciado em 2000.

No primeiro, Renshaw and Haberman (2003a) desenvolveram uma abordagem baseada em Modelos Lineares Generalizados, que se assemelha ao método de Lee-Carter, incluindo a correspondência entre as mortes totais observadas e esperadas. Em Renshaw & Haberman (2003b), fizeram uma adaptação do LC para projetar os fatores de redução da mortalidade. No terceiro trabalho, Renshaw & Haberman (2003c) estenderam o modelo de Lee-Carter para incluir o segundo termo da decomposição de valores singulares (SVD), permitindo uma melhoria nos dados por idade, e compararam os resultados das projeções com aqueles resultantes da aplicação de Modelos Lineares Generalizados e Modelo Poisson log-bilinear.

Já Currie, Durban, & Eilers (2004) propuseram uma abordagem alternativa, utilizando os MLG's, aplicando *p-splines* para impor suavidade na superfície de mortalidade gerada, onde as taxas projetadas foram estimadas de forma simultânea ao ajuste da superfície de mortalidade. Segundo os autores, a aplicação do método à população de homens no Reino Unido, que possuem seguro de vida, resultou em projeções que declinavam de forma mais lenta, quando comparadas com os resultados das projeções através da aplicação do LC. Os relatórios (*working papers*) nº 15 (CMIB, 2005), nº 20 (CMIB, 2006) e nº 25 (CMIB, 2007) do *Continuous Mortality Investigation Bureau* do Reino Unido apresentam de forma detalhada as características e aplicação do método.

#### **4.7) Modelos de Coorte**

Os modelos de um fator ou dois fatores, apresentados anteriormente, podem ser aplicados a dados de coorte para modelar a mortalidade ao longo do curso da vida do indivíduo.

Segundo Booth & Tickle (2008), a principal desvantagem de todos os modelos de coorte é que eles demandam uma amplitude de dados muito grande. Se o estudo estiver focado em todas as idades, dados que contemplem um século ou mais fornecerão informações apenas de uma

coorte completa, sendo que para realizar as projeções incluindo diversas coortes necessitamos de séries temporais muito mais longas que 100 anos. Mesmo quando esse tipo de informação existe e é disponível como no caso de alguns países europeus como os do Reino Unido, os modelos para todas as idades (*entire age range*) serão limitados pelo fato de dependerem de experiências específicas de determinadas coortes nascidas no século XIX.

Por exemplo, Willets, (2004) cita o efeito de coorte como o fenômeno observado para as pessoas nascidas no Reino Unido entre 1925 e 1945 (centrado na geração nascida especificamente em 1935), que experimentaram uma melhoria muito mais acelerada na mortalidade, quando comparadas às gerações nascidas fora deste período. A essas coortes, com ganhos na mortalidade e sobrevivência bem acima da média, quando comparadas às gerações adjacentes nascidas fora desse intervalo, convencionou-se chamar de *Golden Generations* (Murphy, 2009, Goldring et al., 2011). O efeito de coorte também fora observado no próprio Reino Unido para as pessoas com 65+ anos das primeiras coortes nascidas depois de 1900 (GAD, 2001), e em países como a França e a Itália, principalmente por situações advindas das duas guerras mundiais (Caselli, Vallin, Vaupel & Yashin, 1987).

O problema da disponibilidade dos dados fica reduzido quando apenas parte das idades  $x$  são utilizadas no estudo. Projeções com dados incompletos de coorte podem ser realizadas, se a forma do modelo puder ser especificada antecipadamente. Por exemplo, as leis de mortalidade (*one-factor models*) e modelos relacionais podem ser ajustados para os dados incompletos da coorte, de forma a fornecer uma estimativa da experiência completa dos indivíduos além da idade de truncamento. Como idade e tempo são equivalentes para uma coorte, a estimativa é também uma projeção. Essa abordagem é utilizada para a modelagem da mortalidade nas idades mais avançadas. Da mesma forma, modelos de dois fatores idade-coorte (*two-factor age-cohort models*) podem, em teoria, ser utilizados a partir de dados parcialmente incompletos de coorte, onde o fator adicional permite aproveitar as observações completas das coortes mais antigas para estimar a experiência completa de coortes mais jovens.

Booth & Tickle (2008) citam que, dadas as limitações dos dados de coorte é preferível realizar ajustes nas projeções com dados de período, na tentativa de obter os valores das coortes. Apesar das dificuldades, projeções da mortalidade de coorte foram obtidas pelo *Continuous Mortality Investigation Bureau* (CMIB, 2006), com a utilização do método de regressão com *p-splines* proposto por Currie et al. (2004), para suavizar os dados de coorte nas idades 20+. Além disso,

também fora executada uma projeção idade-período à título de comparabilidade com a primeira, onde os resultados obtidos foram bons, para os anos recentes, segundo os autores.

Os modelos APC (*age-period-cohort*) de três fatores englobam a coorte como o terceiro fator. Contudo, segundo Tabeau et al. (2001), distinguir entre idade, período e efeitos de coorte é problemático, devido ao problema de identificação, visto que qualquer fator é linearmente dependente dos outros dois. Nesse sentido, os modelos APC têm se mostrado úteis para descrever o passado, mas no caso das projeções o mesmo não ocorre. Ainda segundo os autores, a projeção da mortalidade baseada em modelos APC não é factível, por conta da dificuldade em se assumir os futuros efeitos de período (apesar dos efeitos de idade e coorte poderem ser assumidos fixos), o que seria possível apenas no caso de projeções de doenças específicas, onde o conhecimento epidemiológico suficiente e necessário estaria disponível.

Conforme já citado, Renshaw & Haberman (2006) propuseram a criação de um modelo APC, estendendo o modelo de Lee-Carter. A equação proposta pelos autores possui a seguinte característica:

$$\ln\mu_{x,t} = a_x + b_x^1 k_t + b_x^2 l_{t-x} + z_{x,t} \quad (17)$$

Onde:

- ⇒  $\mu_{x,t}$  = força de mortalidade para a idade  $x$  no ano  $t$ .
- ⇒  $a_{(x)}$  = média de  $\ln\mu_{x,t}$  ao longo do tempo.
- ⇒  $b_x^1$  e  $b_x^2$  = mede a resposta na idade  $x$  em função de mudanças em  $k_t$  e  $l_{t-x}$ , respectivamente.
- ⇒  $k_t$  = nível geral da mortalidade no ano  $t$ .
- ⇒  $l_{t-x}$  = nível geral da mortalidade da coorte nascida no ano  $(t-x)$
- ⇒  $z_{x,t}$  = resíduo do modelo.

Os parâmetros  $k_t$  e  $l_{t-x}$  de nível geral da mortalidade foram projetados utilizando modelos de séries temporais univariadas. Todavia, a abordagem multivariada também poderia ter sido utilizada. Segundo Renshaw & Haberman (2006), o modelo capturou, de forma satisfatória, os efeitos principais na mortalidade do Reino Unido, representando uma significativa melhoria em relação aos modelos de idade-período (*age-period*) e idade-coorte (*age-cohort*).

## 4.8) Métodos de Projeção da Mortalidade: Independentes X Coerentes

Nesta seção serão apresentados os aspectos metodológicos de cada um dos nove métodos de projeção da mortalidade testados na presente tese, sendo sete deles métodos independentes e dois coerentes.

### 4.8.1) Métodos de Projeção Independente da Mortalidade

Os métodos independentes são aqueles que projetam de forma separada a mortalidade de distintos sub-grupos da população (p.e.: recortes por sexo, UF's, GR's, cor/raça, nível de escolaridade, nível de renda, etc). Neste tópico, são apresentados os aspectos metodológicos dos métodos de projeção independente da mortalidade, testados no presente trabalho.

#### 4.8.1.1) Método de Lee-Carter (1992) - LC

O princípio do método de Lee & Carter (1992) parte da análise de componentes principais para proceder à decomposição da matriz dos logs das  $M_x$ 's ao longo dos anos, numa combinação linear de parâmetros de idade e tempo. Com isso, as taxas específicas de mortalidade são transformadas em duas componentes:

- 1) Primeira Componente: o nível de mortalidade, dependente do tempo, e
- 2) Segunda Componente: um conjunto de parâmetros, independentes do tempo, que descreve a estrutura da mortalidade, ou seja, a posição relativa da mortalidade para idades específicas.

O modelo proposto foi ajustado, inicialmente, à matriz das taxas de mortalidade, por grupo quinquenal (0, 1-4, 5-9, 10-14,....., 80-84, 85+), da população total dos Estados Unidos no período 1900-1987 (88 anos), sendo selecionado, *a posteriori*, o período de 1933-1987 (55 anos) como o mais adequado.

Para modelar e prever o nível da mortalidade ao longo do tempo, os autores propuseram aplicar, junto à mortalidade observada, um método de análise de séries temporais, partindo do pressuposto de que para se prever o futuro, o melhor guia é o passado. Conseqüentemente, uma modelagem acurada dos padrões observados no passado é base essencial para se estimar as incertezas relacionadas às previsões. Em função do exposto, uma pergunta que se coloca é a

seguinte: quanto do passado (quantos anos atrás) fornece o melhor guia para quanto do futuro (quantos anos para frente)? (Booth et al. 2005).

Em resumo, o método de Componentes Principais (MCP) de Lee-Carter para a projeção da mortalidade combina um modelo demográfico de mortalidade com métodos de previsão e de séries temporais, utilizando, como base, apenas a primeira componente principal. Para a projeção pelo LC, no seu contexto original do ano de 1992, utiliza-se, de preferência, o maior período de tempo disponível na base de dados, ou aquele que melhor se ajuste, em função das características demográficas específicas da população em questão<sup>45</sup>. Para o LC, então, são consideradas as seguintes equações:

$$\ln(m(x, t)) = a_{(x)} + b_{(x)}k_{(t)} + e_{(x,t)} \Leftrightarrow m(x, t) = e^{(a_{(x)}+b_{(x)}k_{(t)}+e_{(x,t)})} \quad (18)$$

O modelo, então, é ajustado por mínimos quadrados ordinários (*Ordinary Least Squares – OLS*), onde a interpretação de cada um dos seus termos é a que segue:

- ⇒  $m_{(x,t)}$  = taxa central de mortalidade para a idade  $x$ , no ano  $t$ .
- ⇒  $a_{(x)}$  = padrão médio da mortalidade por idade, ao longo dos anos (logaritmo do valor médio da força de mortalidade).
- ⇒  $b_{(x)}$  = é a primeira componente principal, que reflete a velocidade relativa de mudança da mortalidade para cada idade. Informa quais taxas declinam rapidamente e quais taxas declinam lentamente, em resposta às mudanças no parâmetro  $k_{(t)}$ , *proxy* para a primeira derivada da taxa de mortalidade, a menos de uma constante.
- ⇒  $k_{(t)}$  = é o primeiro conjunto de valores (*scores*) das componentes principais no ano  $t$ , ou seja, é o indexador do nível de mortalidade no tempo  $t$ , usualmente modelado como um passeio aleatório.
- ⇒  $e_{(x,t)}$  = erro aleatório para a idade  $x$ , no ano  $t$ . Reflete as influências não capturadas pelo modelo. Erro com média zero e variância homocedástica  $\sigma_\varepsilon^2$ , associado às estimativas.

De modo a garantir a identificação do modelo, os autores impuseram duas restrições:

$$\sum_{t=1}^n k_t = 0 \quad (18) \quad \text{e} \quad \sum_{x=x_1}^{x_p} b_x = 1 \quad (19)$$

---

<sup>45</sup> Por exemplo, o período-base de cálculo das projeções adotado inicialmente por Lee-Carter foi 1900-1989. Todavia os autores tiveram que proceder a um ajuste, criando uma variável *dummy* para o ano de 1918, em função do aumento considerável na mortalidade, por conta da gripe espanhola. Outra alternativa utilizada pelos autores foi trabalhar com o período-base de 1933-1989.

A equação básica do modelo será válida apenas para um conjunto apropriado de constantes por idade  $x$  ( $a_{(x)}$  e  $b_{(x)}$ ) e para um determinado índice de variação temporal  $k_{(t)}$ . Além disso, a referida equação é sobreparametrizada, no sentido de que a estrutura do modelo é invariante em relação às seguintes transformações:

$$\{a_x, b_x, k_t\} \Rightarrow \{a_x, b_x/c, ck_t\} \quad \text{ou} \quad \{a_x, b_x, k_t\} \Rightarrow \{a_x - cb_x, b_x, k_t + c\}$$

Os  $a_{(x)}$ 's são calculados como a média dos  $\ln(m_{0(x,t)})$  ao longo do tempo, ao passo que  $b_{(x)}$  e  $k_{(t)}$  são estimados por decomposição de valores singulares (SVD - *Singular Value Decomposition*). O modelo assume, também, homocedasticidade<sup>46</sup> no erro.

Especificamente, os  $\hat{a}_{(x)}$ ,  $\hat{b}_{(x)}$ , e  $\hat{k}_{(t)}$  devem ser tais que minimizem o seguinte somatório:

$$\sum_{x,t} (\ln(\widehat{m}(x,t)) - a_{(x)} + b_{(x)}k_{(t)})^2 \quad (20)$$

Vale ressaltar que o modelo proposto não é um modelo de regressão simples, uma vez que não existem covariáveis observadas no lado direito da equação. A minimização do somatório acima consiste em tomar para  $a_{(x)}$  a média de linhas dos  $\ln(m_{(x,t)})$ , e calcular os  $b_{(x)}$  e  $k_{(t)}$ 's do primeiro termo da decomposição de valores singulares (SVD) da matriz dos  $\ln(m_{(x,t)}) - a_{(x)}$ . Isto produz um único índice de mortalidade  $k_{(t)}$ , que varia no tempo.

Para qualquer valor de  $k$ , o modelo define um conjunto de taxas centrais de mortalidade que podem ser utilizadas para construir uma tábua completa, com todas as suas funções. Além disso, este mesmo procedimento pode ser realizado de forma reversa, para calcular quais seriam as respectivas  $M_x$ 's que reproduziriam o número total de mortes observadas,  $D_{(t)}$ , para uma dada distribuição etária populacional,  $N_{(x,t)}$ .

O próximo passo proposto por Lee & Carter (1992) é ajustar o valor de  $k_{(t)}$ , em função do total de mortes observadas,  $D_{(t)}$ . Esse ajuste dá um maior peso para as idades onde a mortalidade é mais elevada, desta forma contrabalançando, em parte, o efeito do uso da transformação logarítmica nas taxas (Booth et al., 2005). A finalidade do método é então encontrar o  $k_{(t)}$ , de forma que:

---

<sup>46</sup> Esta hipótese do modelo Clássico de Regressão Linear, pressupõe que a variância de cada termo de perturbação "u<sub>i</sub>", condicional aos valores escolhidos das variáveis explicativas, é algum número constante igual a  $\sigma^2$ . Ou seja, o postulado da homoscedasticidade significa igual (homo) dispersão (cedasticidade), isto é, variância igual.

$$D_{(t)} = \sum [N_{(x,t)} e^{a_{(x)} + b_{(x)} k_{(t)}}] \quad (21)$$

Assim, os  $k_{(t)}$ 's são reestimados para que as taxas de mortalidade resultantes (com os  $\hat{a}_{(x)}$ ,  $\hat{b}_{(x)}$  estimados anteriormente), aplicadas à exposição real ao risco, produzam o número total de mortes efetivamente observadas nos dados para o ano  $t$  em questão. Existem diversas vantagens em se fazer este segundo estágio de estimativas dos parâmetros  $k_{(t)}$ . Em particular, evita possíveis discrepâncias entre as mortes previstas e aquelas ocorridas na realidade.

Um aspecto importante da metodologia de Lee-Carter é que o fator tempo  $k_{(t)}$  é intrinsecamente visto como um processo estocástico. Nesse sentido, são utilizadas as técnicas Box-Jenkins para estimar e prever os  $k_{(t)}$ 's, dentro de um modelo de série de temporais ARIMA (0,1,0), representado por um passeio aleatório com tendência (*RWD - Random Walk with Drift*), da seguinte forma:

$$k_{(t)} = k_{(t-1)} + d + e_{(t)} \quad (22)$$

Onde:

- ⇒  $d$  = é o parâmetro de define a tendência (*drift*) e representa a mudança média anual em  $K_{(t)}$ ;
- ⇒  $e_{(t)}$  = são os erros não-correlacionados;

Como passo final, as projeções dos  $k_{(t)}$  são utilizadas para gerar as taxas específicas de mortalidade e as expectativas de vida projetadas, dentre outras funções da tábua de mortalidade.

Diversos autores constataram que o modelo de passeio aleatório com tendência fornece resultados satisfatórios na grande maioria dos casos (Tuljapurkar, Li, & Boe, 2000; Lee & Miller, 2001; Lazar & Denuit, 2009).

Booth, Hyndman, & Tickle (2015) salientam que, para evitar a utilização de taxas de mortalidade incorretas nas idades mais avançadas, é aconselhável a utilização da técnica de suavização (*smoothing*) dos dados-base antes de rodar o modelo de projeção, situação esta não incorporada em alguns dos métodos, dentro do conceito original proposto por Lee-Carter.

Segundo Booth et al. (2005), cabe observar que, como as projeções das  $M_x$ 's são obtidas utilizando os valores extrapolados de  $k_{(t)}$  e fixando  $a_{(x)}$  e  $b_{(x)}$ , as taxas para o último ano-base do período utilizado para as projeções serão taxas ajustadas, chamadas de *jump-off rates*, pois resultam numa descontinuidade gráfica em  $k_{(t)}$ .

Deve-se notar, também, que o método de Lee-Carter não incorpora hipóteses sobre avanços na ciência médica ou mudanças ambientais específicas, ou seja, nenhuma informação, além do histórico dos dados de mortalidade, é levada em consideração. Isto significa dizer que este tipo de abordagem é incapaz de prever melhorias repentinas na mortalidade devido à descoberta de novos tratamentos médicos ou curas revolucionárias, incluindo os antibióticos, ou mesmo novas drogas. Da mesma forma, futuras situações porventura causadas por epidemias ou mesmo o surgimento de novas doenças não são incorporados pelo modelo.

#### **4.8.1.2) Método de Lee-Miller (2001) - LM**

Lee & Miller (2001) salientaram que o método de Lee-Carter não consegue descrever, em 100% dos casos, um modelo linear de séries temporais ( $k_{(t)}$ ) como sendo um passeio aleatório com tendência. Contudo, esse modelo foi julgado ser apropriado na grande maioria das situações. Mesmo quando um modelo mais complexo foi utilizado, os resultados foram apenas marginalmente diferentes daqueles em que se utilizou o RWD.

Na avaliação do método LC, Lee & Miller (2001) constataram que o padrão de mudança nas taxas de mortalidade não era constante ao longo do tempo, fato este que representava um forte pressuposto do método original, conseqüentemente, o ajuste em função dos *scores* históricos da primeira componente principal resultavam em um grande erro nas estimativas. Para resolver esse problema, os autores adotaram 1950 como o ano de início de ajuste para a projeção, ano este também utilizado por Tuljapurkar et al. (2000), na aplicação do método para os países membros do G7. Além disso, a estimativa de  $k_t$  foi realizada considerando o ajuste da  $e_0$  no último ano do período-base da projeção<sup>47</sup>, ao invés do ajuste em função do total de mortes no mesmo ano. Essa correção, proposta por LM, de utilização das TEM's observadas no último ano considerado no período da base da projeção (o que replica obviamente a  $e_0$  no referido ano), ao invés das TEM's ajustadas, corrige o problema detectado e cunhado como *jump-off year* (uma descontinuidade), para o início da projeção. Segundo Lee & Miller (2001), a utilização das taxas observadas, apesar de possuir a vantagem de evitar a descontinuidade, possui a desvantagem de extrapolarmos quaisquer influências (vieses) que podem estar presentes nas informações do último ano-base do período da projeção (*jump-off year*).

---

<sup>47</sup> Esse ajuste apresenta a vantagem de eliminar a necessidade dos dados da população exposta ao risco de morte, visto que não é mais necessário o cálculo do total dos óbitos, como é feito no LC.

O método proposto por Lee & Miller (2001) difere do método Lee & Carter (1992) em três aspectos:

- 1) Primeiro: o período de ajuste começa em 1950;
- 2) Segundo: o ajuste de  $k_t$  envolve o ajuste de  $e_0$  no ano  $t$  (último ano-base da projeção); e
- 3) Terceiro: as taxas no último ano do período-base da projeção são as observadas, ao invés das ajustadas, corrigindo então o *jump-off*.

Segundo Booth et al. (2005 e 2006), a variante LM produz projeções da mortalidade mais precisas do que a sua vertente original LC. Em função disto, normalmente nos estudos conduzidos *a posteriori*, o LM acabou virando sinônimo do LC, sendo adotado como o novo padrão (Booth & Tickle, 2008). Mesmo sendo entendido o LM como mais consistente que o método original LC, ainda assim são feitas simulações em diversos trabalhos acadêmicos com a versão original do LC, à título de comparação inicial e *baseline* para o início dos trabalhos, tal como executado nesta tese.

Apesar do método de LC ter sido concebido, inicialmente, com dados dos Estados Unidos de 1900-1987, o método é atualmente utilizado amplamente por pesquisadores no mundo inteiro, para a projeção da mortalidade em geral e por causas específicas, não só nos Estados Unidos, como também em diversos outros países do mundo, como o Brasil, já tendo inclusive, passado por significativas melhorias (Giroi & King, 2008).

#### **4.8.1.3) Método de Booth, Maindonald & Smith (2002) - BMS**

Uma característica básica do LC é a linearidade observada do melhor período-base de ajuste do modelo de séries temporais, para o *score* da componente principal  $k_{(t)}$ . Booth, Maindonald, & Smith (2002) descobriram que as mudanças estruturais ocorridas comprometem as séries temporais lineares ajustadas. Com isso, os autores mantiveram a hipótese de linearidade nos *scores* da primeira componente principal, admitindo, também, a utilização de termos mais elevados (segunda, terceira, etc, componente principal). Além disso, o método adota a escolha do chamado *melhor período-base para as projeções*. O referido período-base é então definido em função da procura e posterior escolha do melhor período de ajuste (*goodness of fit*), considerando todas as possíveis combinações de anos existentes na base de dados. O período-base ideal de ajuste será aquele que resultar em situação mais próxima da linearidade para os *scores*  $k_{(t)}$  da primeira componente principal. Ao invés de ajustar o número total de mortes, o

BMS utiliza um estimador de quase maximoverossimilhança (*quasi-maximum likelihood*) para ajustar uma distribuição de Poisson à distribuição dos óbitos por idade ( $D_{(x,t)}$ ), utilizando desvios estatísticos para medir a qualidade do ajuste (*goodness of fit*). No BMS as *jump-off rates* (no último ano-base do período da projeção) são taxas ajustadas, ao invés das observadas, sendo que, como o  $k_{(t)}$  é baseado no ajuste de  $D_{(x,t)}$  ao invés de  $D_{(t)}$ , as *jump-off rates* serão muito mais próximas das taxas observadas, resultado numa descontinuidade muito menor, quando existente.

A base de dados utilizada pelos autores foi o conjunto anual de taxas de mortalidade por grupo quinquenal (0, 1-4, 5-9, 10-14,....., 80-84, 85+), da população de ambos os sexos da Austrália, no período 1907 até 1999 (93 anos).

De forma resumida, então, Booth, Maindonald, & Smith (2002) propuseram três modificações básicas no LC:

- 1) Primeira: melhorar o ajuste de  $k_{(t)}$ , tomando-se como base a distribuição etária das mortes, ao invés do seu total;
- 2) Segunda: o período-base da projeção é definido em função de um critério estatístico de escolha, de forma a tornar o ajuste dos *scores*  $k_t$  da primeira componente principal, o mais linear possível; e
- 3) Terceira: o modelo pode ser expandido para incluir componentes principais de ordens superiores (segunda, terceira, etc).

O modelo de Poisson proposto pelos autores para ajustar a distribuição dos óbitos é o seguinte:

$$\ln[D_{(x,t)}] = \ln[N_{(x,t)}] + \ln[m'_{(x,t)}] + \varepsilon'_{(x,t)} \quad (23)$$

Onde:

- ⇒  $N_{(x,t)}$  = é a população com idade  $x$  no ano  $t$ ;
- ⇒  $\ln[m'_{(x,t)}] = a_{(x)} + b_{(x)}k'_{(t)}$ ;
- ⇒  $k'_{(t)}$  = é o  $k_{(t)}$  ajustado no modelo;
- ⇒  $\varepsilon'_{(x,t)}$  = são os resíduos após o ajuste de  $k_{(t)}$ .

O critério de minimização adotado pelos autores é o seguinte desvio (*deviance*):

$$deviance(t) = 2 \sum_x \left\{ \ln \left[ \frac{D_{(x,t)}}{D'_{(x,t)}} \right] - [D_{(x,t)} - D'_{(x,t)}] \right\} \quad (24)$$

Onde:

$\Rightarrow D'_{(x,t)} = N_{(x,t)} \{ \exp[a_{(x)} + b_{(x)}k'_{(t)}] \}$ , denota as mortes ajustadas;

Para o BMS, então, a equação do modelo é expandida da seguinte forma:

$$\ln(m_0(x, t)) = a_{(x)} + b_{1(x)}k_{1(t)} + b_{2(x)}k_{2(t)} + b_{3(x)}k_{3(t)} + \dots + b_{n(x)}k_{n(t)} \quad (25)$$

Onde:

$\Rightarrow b_{i(x)}k_{i(t)}$  = denota o i-ésimo termo do número n do *rank* de aproximações;

No BMS, qualquer variação sistemática nos resíduos do modelo ajustado, em relação ao modelo considerando apenas a primeira componente principal, pode ser capturada pela segunda componente principal ou termos de ordens superiores.

#### **4.8.1.4) Método de Brouhns, Denuit & Vermunt (2002) - BDV**

Em linhas gerais, Brouhns, Denuit, & Vermunt (2002) implementaram as recomendações de Wilmoth (1993) e Alho (2000) para aprimorar o método de Lee-Carter, ou seja, incorporaram, no método original, um modelo de regressão de Poisson, perfeitamente adequado para a modelagem de taxas específicas de mortalidade. De forma sucinta, então, os autores mudaram o modelo linear clássico para um modelo linear generalizado (MLG), substituindo a variação aleatória de Poisson para o número de mortes, por um termo de erro aditivo no logaritmo das taxas de mortalidade.

O modelo proposto foi ajustado à matriz de taxas de mortalidade para a população de homens e mulheres na Bélgica, no período 1960-1998 (39 anos).

Segundo Alho (2000), a principal desvantagem da estimativa por mínimos quadrados ordinários (*Ordinary Least Squares - OLS*), via decomposição de valores singulares (*Singular Value Decomposition - SVD*), é que os erros são considerados homocedásticos. Isso está relacionado ao fato de que, para inferência estatística, estamos assumindo que os erros são normalmente distribuídos, o que seria uma hipótese bastante irrealista. O logaritmo da força de mortalidade observada é muito mais variável nas idades mais avançadas do que em idades mais jovens, por conta do número absoluto muito menor de mortes no final da curva de mortalidade. Como o

número de mortes é uma variável aleatória de contagem, a hipótese da distribuição de Poisson parece plausível (Brillinger, 1986).

De forma a contornar os problemas associados à estimativa por mínimos quadrados ordinários, Brouhns, Denuit, & Vermunt (2002) consideram que:

$$D_{(x,t)} \sim \text{Poisson}(E_{x,t}\mu_x(t)), \text{ com } \mu_x(t) = \exp(\alpha_x + \beta_x k_t) \quad (26)$$

Tal qual no método LC original, os parâmetros estão sujeitos às restrições:

$$\sum_t k_t = 0 \quad e \quad \sum_x \beta_x = 1$$

Considera-se, então, que a força da mortalidade possui distribuição log-bilinear  $\ln(\mu_x(t)) = \alpha_x + \beta_x k_t$ , onde todos os parâmetros possuem o mesmo significado daqueles constantes no modelo clássico LC.

Em vez de recorrer à decomposição de valores singulares (SVD) para estimar  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$  e  $k_t$ , os autores propuseram determinar esses parâmetros maximizando a log-verossimilhança, com base no modelo proposto, da seguinte forma:

$$L(\alpha, \beta, k) = \sum_{x,t} \{D_{(x,t)}(\alpha_x + \beta_x k_t) - E_{x,t} \exp(\alpha_x + \beta_x k_t)\} + \text{constante} \quad (27)$$

Segundo Brouhns, Denuit, & Vermunt (2002), devido à presença do termo bilinear  $\beta_x k_t$ , não é possível estimar o modelo proposto com pacotes estatísticos comerciais que implementam a regressão de Poisson.

Ao contrário da abordagem clássica de Lee-Carter, onde a SVD é aplicada ao  $\ln(M_x)$ , na modelagem proposta por Brouhns, Denuit, & Vermunt (2002) o erro se aplica diretamente ao número de mortes estimados com base na regressão de Poisson, não existindo a necessidade de um segundo estágio de estimativas.

De forma idêntica ao LC, o índice de variação da mortalidade no tempo  $k_t$  é projetado por um modelo de séries temporais ARIMA, através do qual são calculadas as taxas específicas de mortalidade ( $M_x$ ) projetadas e suas respectivas expectativas de vida ( $e_x$ ).

#### 4.8.1.5) Método de Hyndman & Ullah (2007) – HU

O método proposto por Hyndman & Ullah (2007) difere dos anteriores porque os autores utilizam o paradigma de dados funcionais (*Functional Data Models - FDM*) de Ramsay & Silverman (2005), o que leva à utilização de suavização não paramétrica para reduzir parte da aleatoriedade inerente aos dados observados. Essa estratégia evita a ocorrência de problemas associados ao agrupamento dos dados em grupos quinquenais. Nesse sentido, o log das  $M_x$ 's é suavizado utilizando *p-splines*.

Apesar dos autores preferirem utilizar o método de *smoothing* com base em *constrained e weighted penalized regression splines* (Currie & Durban, 2002; Currie, Durban, & Eilers, 2003, 2004 e 2006; Eilers & Marx, 1996; Camarda, 2012; Wang, 2011; Wood, 1994, 2003 e 2017), os mesmos citam que o processo de suavização pode ser executado por meio de qualquer um dos métodos existentes<sup>48</sup>. Segundo Booth et al. (2015), a ponderação (*weighted*) resolve o problema da heterogeneidade, em função de  $\sigma_{t(x)}$ , enquanto que a restrição monotônica para as idades superiores (*constrained*) pode levar a estimativas mais precisas.

Os autores ajustaram o modelo proposto à matriz de taxas específicas de mortalidade dos homens na França para os anos de 1899–2001 (103 anos), obtidas no banco de dados da *Human Mortality Database (HMD)*.

Para enfatizar o fato de que a idade  $x$  agora é considerada uma variável contínua, os autores escrevem  $m_{t(x)}$ , para representar as taxas de mortalidade para a idade  $x \in [x_1, x_p]$  no ano  $t$ . Então, define-se  $z_t(x) = \log(m_t(x))$  e escreve-se a equação:

$$y_t(x_i) = f_t(x_i) + \sigma_t(x_i)\varepsilon_{t,i} \quad \text{para } i = 1, \dots, p, \text{ e } t = 1, \dots, n, \quad (28)$$

Onde:

- ⇒  $y_t(x_i)$  = taxa de mortalidade observada na idade  $x_i$  para o ano  $t$ ;
- ⇒  $f_t(x_i)$  = taxa de mortalidade suavizada na idade  $x_i$  para o ano  $t$ ;
- ⇒  $\sigma_t(x_i)$  = permite que o ruído do modelo varie conforme a idade  $x_i$  no ano  $t$ , consequentemente retificando a hipótese de erro homocedástico do LC;
- ⇒  $\varepsilon_{t,i}$  = variável aleatória com distribuição de probabilidade Normal Padrão Independente e Identicamente Distribuída (i.i.d.);

<sup>48</sup> Vide Ruppert, Wand, & Carrol (2003), Simonoff (1996), Yatchew (2003) e Keele (2008).

Dada a idade contínua  $x$ , os autores utilizam a Análise de Componentes Principais Funcionais para a decomposição da matriz de dados-base. O conjunto das  $M_x$ 's é então decomposto em componentes principais funcionais ortogonais e seus correspondentes *scores* não-correlacionados para essas componentes, resultando na seguinte equação:

$$f_t(x) = a(x) + \sum_{j=1}^J b_j(x)k_{t,j} + e_t(x) \quad (29)$$

Onde:

- ⇒  $a(x)$  = média da função estimada por  $\hat{a}(x) = \frac{1}{n} f_t(x)$ . É uma medida de localização de  $f_t(x)$ ;
- ⇒  $\{b_1(x), \dots, b_J(x)\}$  = conjunto das  $J$  primeiras componentes principais;
- ⇒  $\{k_{t,1}, \dots, k_{t,J}\}$  = conjunto dos *scores* não-correlacionados das componentes principais;
- ⇒  $e_t(x)$  = variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas do resíduo  $\sim N(0, v(x))$ ;
- ⇒  $J < n$  é o número de componentes principais utilizadas.

Como os *scores* das componentes principais são não-correlacionados, Hyndman & Ullah (2007) sugerem que cada série temporal univariada  $k_{t,j}$  (para  $j=1, \dots, J$ ) pode ser projetada independentemente, utilizando um modelo de séries temporais univariadas. Multiplicando os *scores* projetados das componentes principais  $k_{t,j}$  pelas próprias componentes principais, obtemos as curvas futuras projetadas.

Hyndman & Ullah (2007) utilizam múltiplas componentes principais<sup>49</sup>, em virtude das componentes adicionais capturarem padrões aleatórios que não são explicados a partir da primeira componente principal (Booth, Maindonald, & Smith, 2002; Renshaw & Haberman, 2003c; Koissi, Shapiro, & Högnäs, 2006). Para métodos que utilizam componentes principais de ordem superior que, por definição, são ortogonais em relação à primeira componente principal, outros tipos de séries temporais surgem para a determinação dos *scores*. Para todas as componentes, o método proposto seleciona o *modelo ótimo* de séries temporais utilizando procedimentos padrão de seleção de modelos (p.e. critério de informação de Akaike - AIC). Ao condicionar os dados observados na matriz  $M = \{y_t(x_i) : \text{ano } t=1, \dots, n ; \text{ idade } i=1, \dots, p\}$ , ao

---

<sup>49</sup> Os autores encontraram  $J = 6$  como sendo um número suficiente máximo de componentes principais requeridas para explicar grande parte da variabilidade dos dados.

conjunto de componentes principais funcionais  $B = \{b_1(x), \dots, b_j(x)\}$ , o  $h$ -ésimo ponto projetado  $z_{n+h}(x)$  pode ser obtido pela seguinte equação:

$$\hat{z}_{n+h/n}(x) = E[z_{n+h}(x)|T, B] = \hat{a}(x) + \sum_{j=1}^J b_j(x) \hat{k}_{n+h/n,j} \quad (30)$$

Onde  $\hat{k}_{n+h/n,j}$  denota  $h$ -ésimo ponto da projeção de  $k_{n+h,j}$  utilizando um modelo de séries temporais univariadas, tal qual o modelo ARIMA otimizado, selecionado pelo algoritmo automático implementado em pacote no R por Hyndman & Khandakar (2008), ou mesmo um modelo de suavização exponencial estado-espço (*state space*) sugerido em Hyndman et al. (2008).

Como os componentes são ortogonais, a variância projetada segue conforme a seguinte equação:

$$\hat{v}_{n+h/n}(x) = \text{var}[z_{n+h}(x)|T, B] = \sigma_a^2(x) + \sum_{j=1}^J b_j^2(x) u_{n+h/n,j} + v(x) + \sigma_t^2(x) \quad (31)$$

Onde:

- $\Rightarrow \sigma_a^2 =$  variância de  $\hat{a}(x)$ ;
- $\Rightarrow u_{n+h/n,j} =$  variância de  $k_{n+h,j}/k_{1,j}, \dots, k_{n,j}$  (obtido do modelo de séries temporais);
- $\Rightarrow \sigma_t(x) =$  permite que o ruído do modelo varie conforme  $x$  no ano  $t$ ;

De forma resumida, então, o HU é uma extensão do LC, diferindo do mesmo por quatro características básicas diferentes:

- 1) os logs das taxas de mortalidade são suavizados antes da modelagem;
- 2) é utilizada uma análise de componentes principais funcionais;
- 3) mais de uma componente principal é utilizada nas projeções; e
- 4) os modelos de previsão para os *scores* das componentes principais são tipicamente mais complexos que o modelo de *random walk with drift*.

#### 4.8.1.6) Método de Hyndman & Ullah (2007) Robust – HU<sup>rob</sup>

Com o objetivo de evitar os problemas ocasionados pela utilização de informações fora dos padrões, em determinados anos do período-base da projeção (*outlying years*), Hyndman & Ullah (2007) propuseram também uma versão robusta da metodologia apresentada na seção anterior, eliminando o possível viés gerado por *outliers*.

Segundo os autores, por conta dos anos atípicos (*outlying years*), devemos utilizar a estimativa robusta para as funções  $a_{(x)}$  e  $k_{t,j}$ , descritas na seção anterior. Já as séries temporais de  $b_{j(x)}$  não são estimadas de forma robusta, de modo que todos os anos atípicos são balizados pelos próprios *outliers* constantes na série temporal, permitindo, assim, a sua clara identificação no modelo.

O método utiliza o algoritmo de Análise de Componentes Principais baseada em reflexão (*Reflection Based Principal Component Analysis - RAPCA*), proposto por Hubert, Rousseeuw, & Verboven (2002), para obter as estimativas das componentes principais e seus *scores* associados. Segundo Hyndman & Ullah (2007), o erro quadrático integrado fornece uma medida da precisão da estimativa da componente principal a cada ano. Os anos atípicos resultam num erro quadrático integrado maior do que aquele obtido pela hipótese de normalidade de  $e_{t(x)}$ . Assumindo peso zero para os *outliers*, o método pode ser utilizado, então, para modelar e projetar a taxas de mortalidade, sem que as mesmas sejam influenciadas pelos valores atípicos.

#### 4.8.1.7) Método de Hyndman & Shang (2009) – HU<sup>wei</sup>

Os autores propuseram realizar a projeção da mortalidade utilizando um método de regressão de componentes principais funcionais ponderado e um método de regressão por mínimos quadrados funcionais parciais ponderados. Essas abordagens fornecem funções suaves, atribuem pesos maiores para dados mais recentes e fornecem um esquema de modelagem que é facilmente adaptado, para permitir restrições e outras informações.

Os autores aplicaram o método proposto à matriz de taxas de mortalidade feminina, por idade simples de 0-100+ da França, para os anos 1816 a 2006 (191 anos), oriundas das bases de dados que compõem a *Human Mortality Database (HMD)*, e concluíram que a ponderação proposta melhorou a precisão das projeções realizadas.

Hyndman & Shang (2009) estenderam, então, a abordagem proposta originalmente por Hyndman & Ullah (2007), em função das seguintes considerações:

- 1) foram introduzidos pesos geometricamente decrescentes na decomposição das componentes principais, de forma a permitir que dados mais recentes afetem os resultados com maior peso que dados no passado distante. Segundo os autores, isto é particularmente importante na demografia, onde, para alguns países, pode-se trabalhar com informações de mais de 200 anos, de forma que os dados dos séculos XVIII e XIX podem não ser tão úteis na determinação das melhores componentes principais para a projeção; e
- 2) foi utilizada a regressão de mínimos quadrados funcionais parciais, em vez de componentes principais funcionais. Os autores citam que essa proposta é vantajosa, pois a decomposição é realizada com foco na projeção, em vez de simplesmente modelar os dados históricos.

Além das duas extensões, os autores propuseram algumas novas abordagens para a construção de intervalos de confiança para as projeções, considerando séries temporais funcionais, baseadas em métodos de *bootstrap* não paramétricos.

Com isso, Hyndman & Shang (2009) estimam a função média  $a_{(x)}$ , considerando a seguinte média ponderada:

$$\hat{a}(x) = \sum_{t=1}^n w_t \hat{f}_t(x) \quad (32)$$

Onde:

- ⇒  $\hat{f}_t(x)$  = taxa de mortalidade suavizada a partir de  $y_t(x)$ ;
- ⇒  $y_t(x)$  = taxa de mortalidade observada no ano  $t$  para a idade  $x$ ;
- ⇒  $w_t = k(1-k)^{n-t}$ , é o peso geométrico decrescente onde  $0 < k < 1$ ;

Segundo Hyndman & Ullah (2007), caso se queira utilizar um estimador robusto, então a mediana  $L_1$  das curvas suavizadas estimadas poderá ser utilizada. A média ou a mediana de ajuste aos dados funcionais é denotada como:

$$\hat{f}_t^*(x) = \hat{f}_t(x) - \hat{a}(x) \quad (33)$$

Na sequência, pode-se aplicar a Análise de Componentes Principais Funcionais (*Functional Principal Components – FPC*) (vide Ramsay & Dalzell, 1991) em  $\{\hat{f}_t^*(x)\}$  para obter as

componentes principais  $\{b_j(x)\}$  e seus scores  $\{k_{t,j}\}$ . Hyndman & Shang (2009) citam que as Componentes Principais Funcionais são construídas pela maximização da variância entre os preditores, com o objetivo de um mínimo  $L_2$  de perda de informação. Ramsay & Silverman (2005) apresentam todas as propriedades estatísticas da Análise de Componentes Principais Funcionais (FPC), bem como diversas aplicações da metodologia descrita.

Combinando, então, as equações de  $y_t(x_i)$  e  $f_t(x)$  (descritas anteriormente no método de Hyndman & Ullah, 2007), temos que:

$$y_t(x_i) = a(x) + \sum_{j=1}^J b_j(x)k_{t,j} + e_t(x) + \sigma_t(x_i)\varepsilon_{t,i} \quad (34)$$

Os *scores*  $k_{t,j}$  são assumidos como modelos independentes de séries temporais univariadas. Consequentemente, podemos condicionar a matriz de dados observados  $M = \{y_t(x_i) : \text{ano } t=1, \dots, n ; \text{ idade } i=1, \dots, p\}$  ao conjunto de componentes principais funcionais  $B = \{b_1(x), \dots, b_J(x)\}$ , de forma a obter o  $h$ -ésimo ponto projetado  $z_{n+h}(x)$  conforme a equação que segue:

$$\hat{z}_{n+h/n}(x) = E[z_{n+h}(x)|M, B] = \hat{a}(x) + \sum_{j=1}^J b_j(x)\hat{k}_{n+h/n,j} \quad (35)$$

Onde:  $\hat{k}_{n+h/n,j}$  representa o  $h$ -ésimo ponto a frente da projeção de  $k_{n+h/n,j}$  no tempo.

O método proposto por Hyndman & Shang (2009) é idêntico àquele de Hyndman & Ullah (2007), com exceção do fato de que no método original os autores adotam pesos iguais a zero para os *outliers* e um para não *outliers*, com base num teste estatístico simples para a sua detecção, enquanto que na abordagem de Hyndman & Shang (2009) é sugerido a utilização de pesos geometricamente decrescentes, a serem aplicados à componente principal, de forma a levar em consideração as mudanças nas formas funcionais ocorridas ao longo do tempo. Segundo Hyndman & Ullah (2007), o valor do parâmetro  $j$  (nº de componentes principais funcionais) pode ser determinado empiricamente em função da minimização do erro médio integrado projetado (*Mean Integrated Forecast Error - MISFE*), em função da seguinte equação:

$$MISFE(h) = \int_{x_1}^{x_p} \left( y_{n+h}(x) - \hat{y}_{n+h/n}(x) \right)^2 dx \quad (36)$$

Hyndman & Booth (2008) demonstraram que um  $J=6$ , ou seja, um modelo de componentes principais de 6ª ordem é mais do que suficiente para descrever, da melhor forma possível, o fenômeno em estudo e, nesse sentido, a metodologia de Hyndman & Shang (2009) utiliza o  $J=6$  como número padrão (*default*).

#### 4.8.2) Métodos de Projeção Coerente da Mortalidade

Projeções coerentes da mortalidade são aquelas que exploram as correlações existentes entre os mais diversos sub-grupos numa população específica (p.e.: por sexo, cor/raça, nível de escolaridade, municipalidades, estados, unidades administrativas, etc), com base em um extenso histórico de observações e considerações teóricas, visando melhorar a qualidade dos resultados obtidos de forma independente, pois levam em consideração a participação de um grupo específico dentro de toda uma coletividade, ao invés de uma análise feita pura e simplesmente de forma individual e independente.

Nesse sentido, uma característica importante para a aplicação dos métodos LC e LM diz respeito à mudança no padrão observado nas tábuas de mortalidade do Brasil (principalmente masculinas), a partir do Censo Demográfico de 1991, em virtude do aumento da mortalidade pelas chamadas causas externas (homicídios, acidentes de trânsito, suicídios, etc) ocorrido no processo de urbanização e metropolização das cidades. Segundo Girosi & King (2007), vale aqui ressaltar que essa tendência pode influenciar as projeções da mortalidade conduzidas, visto que o LC pode não se ajustar bem aos dados de populações com altos níveis de mortalidade de adultos jovens, podendo, inclusive, acarretar numa distorção no padrão de mortalidade projetado. Esse aumento da mortalidade por causas externas, ocorrido no período intercensitário 1980-1991, acaba por gerar um calombo (*hump*) na função de mortalidade. Essa taxa de variação positiva nas  ${}_nM_x$ 's entre as idades de 15-40 anos, por exemplo, acarretou problemas tanto na projeção da mortalidade masculina para o município de São Paulo, conforme detectado por Silva (2009), quanto no exercício preliminar conduzido por Silva (2018a). Com isso, por projetar determinado tipo de relação existente entre as  ${}_nM_x$ 's dos sub-grupos populacionais, ao invés da própria  ${}_nM_x$  de forma independente, os métodos coerentes tendem a mitigar o problema encontrado de implausibilidade do padrão futuro das curvas masculinas projetadas, em localidades onde o *accident hump* surgiu de forma acentuada, tal como no Brasil.

Já faz mais de 15 anos que o problema da coerência entre as projeções da mortalidade de sub-grupos tem sido destacado por pesquisadores, nos trabalhos realizados (vide Lee & Nault, 1993; Lee, 2000), onde a primeira proposta de um modelo que apresentasse resultados efetivamente coerentes foi feita por Li & Lee (2005), com exemplos práticos aplicados à população de homens e mulheres (*two-sex forecast*) da Suécia, para os dados de 1950-2002 e projeções até 2100, e para os 15 países de menor mortalidade do mundo<sup>50</sup> (*Group Forecast*) com dados do período 1952-1996 e projeções até 2050. Na sequência da pioneira proposta de projeção da mortalidade de forma coerente por Li & Lee (2005), outros autores sugeriram alternativas, tais como Debón et al. (2011), Hyndman et al. (2013) com o método produto-razão, Li (2013) com o método poisson-fator-comum e De Jong, Tickle, & Xu (2016) com o Lee-Carter Complexo.

Como no presente trabalho os métodos coerentes utilizados para a realização das projeções da mortalidade para o Brasil e Grandes Regiões foram os de Hyndman et al. (2013) e Li & Lee (2005), suas características metodológicas e especificidades serão amplamente debatidas na sequência.

Uma característica contrastante do método de Hyndman et al. (2013) *vis-à-vis* o de Li & Lee (2005) é que, enquanto no primeiro as razões obtidas entre as taxas de mortalidade dos sub-grupos (p.e. as razões entre as  ${}_nM_x$ 's de homens e mulheres) evoluem, no segundo essas razões permanecem constantes ao longo do tempo.

Tratando especificamente do método coerente funcional de Hyndman et al. (2013), merece destaque o fato do mesmo ser, desde 2012, o método oficial de projeção da mortalidade utilizado pela Agência Oficial de Estatística da Nova Zelândia (Statistics New Zealand, 2012). Hyndman et al. (2013) definem o termo *coerente* como sendo a convergência, para determinadas constantes, das razões entre as  ${}_nM_x$ 's projetadas para cada um dos sub-grupos existentes. No *paper* de 2013, os autores utilizaram as médias históricas ponderadas das razões, como as constantes de convergência, mas citam que valores teóricos também poderiam ter sido utilizados, como, por exemplo, aqueles baseados em diferenciais biológicos existentes entre sexos (Kalben, 2002). Essa convergência para razões constantes não implica dizer que as diferenças de mortalidade entre os sub-grupos irão convergir para um conjunto de constantes,

---

<sup>50</sup> Segundo os dados da *Human Mortality Database* em 2002, a saber: Alemanha Ocidental, Áustria, Canadá, Dinamarca, Espanha, Estados Unidos, Finlândia, França, Holanda, Inglaterra, Itália, Japão, Noruega, Suécia e Suíça.

visto que as tendências nas diferenças dependem, concomitantemente, das funções razão e produto.

Existem diversas diferenças entre o método funcional produto-razão de Hyndman et al. (2013) e o proposto originalmente por Li & Lee (2005). A primeira diferença reside no fato do método coerente pioneiro de Li & Lee (2005) utilizar apenas a primeira componente principal, enquanto que o método produto-razão pode utilizar até seis componentes principais. As duas primeiras componentes principais possuem o maior efeito sobre a mortalidade, enquanto que as componentes de ordens mais elevadas capturam determinados padrões nos dados, suplementares ao padrão principal, e, com isso, podem ser significativos e melhorar a qualidade da projeção. A segunda diferença é que o método Li & Lee (2005) restringe os modelos de séries temporais em passeios aleatórios com tendência (*random walk with drift*) para  $k_t$  e em processos autoregressivos de primeira-ordem (AR(1)), para  $\gamma_{t,j}$ , enquanto que o método produto-razão permite uma maior variedade dinâmica a ser modelada, via um processo ARIMA mais geral para cada um dos  $\beta_{t,l}$  (com  $l = 1, \dots, L$ ), e qualquer processo estacionário ARMA(p,q) ou ARFIMA(p,d,q) para cada um dos  $\gamma_{t,l}$  (com  $l = 1, \dots, L$ ). A terceira diferença é que, na abordagem de Li & Lee (2005), os coeficientes de  $\gamma_{t,j}$  são altamente correlacionados uns com os outros ao longo dos  $j$  sub-grupos, necessitando de uma aproximação vetorial (Reinsel, 2003) para a modelagem dos coeficientes de  $\gamma_{t,j}$ , o que adiciona considerável complexidade ao método. Uma quarta diferença reside no fato do método de Li & Lee (2005) modelar  $\gamma_{t,j}$ , ao invés de  $f_{t,j}$ , o que implica em incluir no modelo o erro observacional, que será propagado nas projeções, diferentemente da abordagem funcional do método produto-razão, onde o erro da observação é removido por suavizamento (*p-splines*) e adicionado de volta ao modelo, como parte da estimativa da variância. De forma resumida, então, o método de Li & Lee (2005) é considerado um caso especial do método funcional mais geral produto-razão, sendo uma metodologia onde não há a suavização dos dados, cada modelo possui apenas uma componente principal, e os modelos de séries temporais utilizados são passeios aleatórios com tendência (*random walk with drift*) ou autoregressões de primeira-ordem.

O método sugerido por Li (2013) para projetar a mortalidade por sexo de forma coerente, em função de um fator-comum (que segue uma distribuição de Poisson), representa uma extensão do modelo poisson-Lee-Carter, proposto por Brouhns et al. (2002). Apesar do método de fator-comum conduzir a resultados melhores do que os obtidos de forma independente pelo método poisson-Lee-Carter, os trabalhos comparativos realizados até o presente limitam-se, basicamente, a buscar a coerência das projeções por sexo, inclusive com extensões propostas

para a captação dos efeitos das coortes (Yang et al., 2016). Por exemplo, Li et al. (2016), num estudo comparativo por sexo entre as duas metodologias, utilizando dados de Austrália, Canadá, Estados Unidos, Filândia, França, Inglaterra e País de Gales, Japão, Nova Zelândia, Noruega e Taiwan, de 1950 até 2013 da HMD, concluíram que o modelo poisson-fator-comum (*PCFM – Poisson Common Factor Model*) gera resultados mais desejáveis do que o poisson-Lee-Carter.

Woods & Dustan (2014), em estudo comparativo do Modelo Funcional Demográfico Coerente (*Coherent Functional Demographic Model*) de Hyndman et al. (2013), com os modelos de Lee & Carter (1992), Lee & Miller (2001), Booth, Maindonald, & Smith (2002) e Modelo Funcional Demográfico de Hyndman & Ullah (2007), concluíram que o modelo coerente produto-razão foi o único que não levou a resultados divergentes ao longo do horizonte da projeção, sendo que todos os outros resultaram em *crossovers* das  $e_0$ 's de homens e mulheres em algum ponto futuro do tempo.

Por seu turno, Flici (2016) comparou os métodos coerentes de Li & Lee (2005) e de Hyndman et al. (2013), utilizando dados de mortalidade de homens e mulheres do *Office of National Statistics (ONS)* da Argélia, no período mais recente de 1996 até 2014. Os resultados apresentados pelo autor na tabela 4.3 do *paper*, mostram que tanto o critério de informação Akaike (AIC) quanto o critério de informação bayesiano (BIC) foram menores para o modelo coerente produto-razão, indicando uma melhor qualidade do seu ajuste.

Em trabalho mais recente, Shair et al. (2017) compararam os modelos coerentes de Li (2013) (*Poisson Common Factor*) e Hyndman et al. (2013) (*Product-Ratio*) entre si, e em relação às suas versões independentes (LC, BDV e  $HU^{wei}$ ), utilizando os dados da Austrália (período 1921-2009 com  $M_x$ 's por idade simples de 0 até 110+ anos) e Malásia (período 1965-2011 com  $nM_x$ 's de 0 até 80+ anos). Os autores concluíram que as projeções obtidas de ambos os modelos coerentes eram consistentemente mais precisas do que aquelas realizadas de forma independente. Na comparação entre os dois métodos coerentes, os autores concluíram que a performance obtida difere em função do horizonte da projeção, tendo o modelo funcional produto-razão sido mais adequado aos dados da Austrália. Já o modelo Poisson-fator-comum obteve melhor desempenho para os dados da Malásia.

Em relação ao método Lee-Carter Complexo, proposto mais recentemente por De Jong, Tickle, & Xu (2016), os autores citam que a ideia é tanto prática, quanto sofisticada ao mesmo tempo, além de produzir ajustes precisos e parâmetros de fácil interpretação. Todavia, o novo método

ainda está em fase de desenvolvimento pelos autores, de forma a explorar as possíveis generalizações do modelo e avaliar se os promissores resultados, obtidos em termos de modelagens dos padrões históricos, também se aplicariam no contexto das projeções da mortalidade, cabendo ressaltar que as variáveis modeladas no método produto-razão de Hyndman et al. (2013) apresentam uma correlação muito próxima com aquelas propostas no método Lee-Carter Complexo (De Jong et al. 2016).

#### 4.8.2.1) Método de Li & Lee (2005) – (Lee-Carter coerente)

Para evitar a divergência de longo prazo nas projeções da mortalidade para determinado grupo ou população específica (p.e: homens ou mulheres), utilizando o LC clássico, uma condição necessária e suficiente é que todas as populações possuam o mesmo  $b_{(x)}$  e o mesmo termo de tendência para  $k_{(t)}$ . Nessas condições, as razões entre a média das TEM's das populações seria constante ao longo do tempo, para cada uma das idades  $x$  nas projeções, e assim a condição seria satisfeita. Caso os  $b_{(x)}$ 's ou os termos de tendência  $k_{(t)}$ 's das populações sejam diferentes uns dos outros, fato este que ocorre sempre na prática, as projeções das TEM's irão diferir de forma crescente, no decorrer dos anos.

Nesse sentido, Li & Lee (2005) propuseram considerar que, dado que todos os sub-grupos populacionais devem possuir os mesmos parâmetros  $b_{(x)}$  e  $k_{(t)}$ , basta, então, calcular as referidas estatísticas para a população conjunta, representando agora por  $B_{(x)}$  e  $K_{(t)}$ , respectivamente, aplicando o método LC ao grupo como um todo, ajustando então o  $K_{(t)}$  à expectativa de vida média da população em geral. Na sequência, modela-se o  $K_{(t)}$  como um *random walk with drift (RWD)* para a projeção da tendência comum futura, para a mudança no nível da mortalidade.

Os autores realizaram duas aplicações do método proposto. A primeira aplicação foi a projeção coerente, por sexo (*two-sex forecast*), considerando a matriz de taxas de mortalidade masculinas e femininas da Suécia, período 1950-2002 (53 anos). A segunda aplicação foi para um grupo de países (*group forecast*), considerando a matriz de taxas de mortalidade para a população de ambos os sexos de 15 países de alta expectativa de vida no mundo<sup>51</sup>, para os anos de 1952 a 1996 (45 anos). Ambas as bases de dados foram coletadas do banco eletrônico da *Human Mortality Database (HMD)*.

---

<sup>51</sup> Os autores utilizaram dados de: Alemanha Ocidental, Áustria, Canadá, Dinamarca, Espanha, Estados Unidos, Finlândia, França, Holanda, Inglaterra, Itália, Japão, Noruega, Suécia e Suíça.

Os  $a_{(x)}$ 's são estimados separadamente, para cada população individual, dentro do grupo ( $a_{(x,i)}$  para o país  $i$ ), uma vez que não causam divergência a longo prazo e, portanto, precisam seguir o padrão de cada população. Considerando, também, a taxa de mortalidade na idade  $x$  e no ano  $t$ , da  $i$ -ésima população, como sendo  $m_{(x,t,i)}$ . Os  $a_{(x,i)}$ 's, então, deverão minimizar o erro total na modelagem dos  $\log[m_{(x,t,i)}]$ 's e poderão ser obtidos pela regressão de mínimos quadrados ordinários (OLS), da seguinte forma:

$$\min \sum_{i=0}^T [\log(m_{(x,t,i)}) - a_{(x,i)} - B_{(x)}K_{(t)}]^2 \quad (37)$$

Como o somatório dos  $K_{(t)}$ 's é igual a zero, o  $a_{(x,i)}$ , que representa a média de  $\log(m_{(x,t,i)})$  ao longo do tempo, é calculado como:

$$a_{(x,i)} = \frac{\sum_{t=0}^T \log(m_{(x,t,i)})}{T + 1} \quad (38)$$

Li & Lee (2005) chamam o termo  $[a_{(x,i)} + B_{(x)}K_{(t)}]$  de modelo de fator-comum (*common factor model*) da  $i$ -ésima população. No modelo proposto, a mudança na mortalidade ao longo do tempo é descrita por  $B_{(x)}K_{(t)}$ , que é o fator-comum para cada população dentro do grupo. Pode-se, então, projetar a mortalidade para todos os membros do grupo utilizando este modelo, que possui a vantagem de manter as mesmas razões entre as  $M_x$ 's dos grupos utilizados para o cálculo da média geral ao longo dos anos.

Para mensurar o quão bem o modelo de fator-comum atuou na  $i$ -ésima população utilizada para o cálculo da média, os autores construíram a chamada “razão de explicação” (*explanation ratio*), denotada por  $R_c(i)$  e escrita da seguinte forma:

$$R_c(i) = 1 - \frac{\sum_{t=0}^T \sum_{x=0}^w [\log(m_{(x,t,i)}) - a_{(x,i)} - B_{(x)}K_{(t)}]^2}{\sum_{t=0}^T \sum_{x=0}^w [\log(m_{(x,t,i)}) - a_{(x,i)}]^2} \quad (39)$$

Caso não seja feito o ajuste em  $K_{(t)}$ , o  $R_c(i)$  não poderá ser maior do que a razão de explicação da aplicação do LC de forma separada, para a  $i$ -ésima população (denotado como  $R_s(i)$ ), pois o fator  $B_{(x)}K_{(t)}$  não é capaz de minimizar os erros modelados para a  $i$ -ésima população. Se  $R_c(i)$  for considerado muito pequeno, então um fator específico pode ser introduzido para melhorar a performance do modelo de fator-comum.

O fator específico da  $i$ -ésima população descreve a matriz de resíduos do modelo de fator-comum como  $[\log(m_{(x,t,i)} - a_{(x,i)} - B_{(x)}K_{(t)})]$ , que é um vetor de mudança nas idades ao longo do tempo. Seguindo a estratégia do método clássico LC, os autores aplicaram a decomposição de valores singulares (SVD) para trocar a tarefa de modelar esse vetor variável no tempo, pela modelagem de um escalar  $k_{(t,i)}$ , e utilizar um vetor constante  $b_{(x,i)}$  para descrever o padrão da mortalidade por idade. Em outras palavras, o fator específico da  $i$ -ésima população, denotado como  $b_{(x,i)}k_{(t,i)}$ , é obtido pela utilização dos vetores de primeira ordem  $b_{(x,i)}$  e  $k_{(t,i)}$ , derivados da aplicação da decomposição de valores singulares (SVD) à matriz de resíduos do modelo de fator-comum. Conseqüentemente, podemos obter o modelo de fator-comum aumentado (*augmented common factor*), pela seguinte equação:

$$\log(m_{(x,t,i)}) = a_{(x,i)} + B_{(x)}K_{(t)} + b_{(x,i)}k_{(t,i)} + \varepsilon_{(x,t,i)}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (40)$$

O último termo da equação anterior  $\varepsilon_{(x,t,i)}$  representa o termo de erro na modelagem, e  $b_{(x,i)}k_{(t,i)}$  permite uma diferença de curto ou médio prazo entre a taxa de mudança nas taxas de mortalidade do  $i$ -ésimo país e a taxa de mudança implícita no fator-comum. Caso essas diferenças persistissem no longo prazo, as projeções seriam divergentes. Portanto, esta abordagem só será bem sucedida se os fatores  $k_{(t,i)}$  tenderem para algum nível constante ao longo do tempo. Desta forma, o modelo ajustado resultará em algum tipo de continuação das tendências históricas convergentes ou divergentes para cada país, antes que ele permaneça em uma posição constante relativa na hierarquia das projeções da mortalidade de longo prazo no grupo.

Com isso, podemos avaliar o quão bem este modelo funciona para a  $i$ -ésima população, construindo uma nova razão de explicação, denominada como  $R_{AC}(i)$ , que pode ser escrita como:

$$R_{AC}(i) = 1 - \frac{\sum_{t=0}^T \sum_{x=0}^w [\log(m_{(x,t,i)}) - a_{(x,i)} - B_{(x)}K_{(t)} - b_{(x,i)}k_{(x,i)}]^2}{\sum_{t=0}^T \sum_{x=0}^w [\log(m_{(x,t,i)}) - a_{(x,i)}]^2} \quad (41)$$

A Razão de Explicação  $R_{AC}(i)$  é maior que a  $R_C(i)$  porque  $b_{(x,i)}k_{(x,i)}$  minimiza o erro modelado na equação (40).

O vetor  $b_{(x,i)}$  descreve as diferenças entre as mudanças de padrão na mortalidade por idade para a  $i$ -ésima população e para o grupo como um todo. Assim, os valores de  $b_{(x,i)}$  podem não ser positivos em todas as idades. Aumentar  $k_{(t,i)}$  significa aumentar as taxas específicas de

mortalidade em idades em que os valores de  $b_{(x,i)}$  são positivos, mas reduz também as taxas específicas de mortalidade quando o  $b_{(x,i)}$  é negativo, com efeitos compensatórios na expectativa de vida. Por esta razão, pode não ser possível escolher um valor de  $k_{(t,i)}$  que se ajuste exatamente a um dado nível de  $e_x$ , ou se tal nível existir, isso pode corresponder a uma redução significativa no  $R_{AC}(i)$ . Por estas razões, Li & Lee (2005) não modelam o  $k_{(t,i)}$  para ajustar a expectativa de vida da *i-ésima* população.

Como o  $k_{(t,i)}$  na equação (40) deve obrigatoriamente tender para um valor constante, para a abordagem proposta funcionar, o método falhará se  $k_{(t,i)}$  tiver uma tendência média de longo prazo, assim como o passeio aleatório com tendência diferente de zero, normalmente utilizado na metodologia clássica LC. Todavia, as aplicações da metodologia proposta podem ser bem sucedidas se  $k_{(t,i)}$  for um passeio aleatório sem tendência (*Random Walk Without Drift*) ou um modelo autorregressivo de primeira ordem (AR(1)) com um coeficiente que produza uma tendência limitada de curto prazo em  $k_{(t,i)}$ , tal que:

$$k_{(t,i)} = c_{0(i)} + c_{1(i)}k_{(t-1,i)} + \sigma_i e_{i(t)}, \quad e \quad e_{i(t)} \sim N(0,1) \quad (42)$$

Onde:  $c_{0(i)}$  e  $c_{1(i)}$  são os coeficientes e  $\sigma_i$  é o desvio-padrão do modelo AR(1).

Segundo Li & Lee (2005), a literatura aponta que os parâmetros de modelos de AR com uma constante, dos quais a equação (42) é o mais simples desse tipo de modelo, podem ser estimados por mínimos quadrados ordinários (OLS), utilizando valores defasados na série como variáveis independentes, de forma que tais estimativas por OLS serão assintoticamente não viesadas e eficientes, e que a qualidade do ajuste pode ser medida naturalmente pela razão de explicação. Se a  $R_{AC}(i)$  e a razão de explicação para o modelo RW ou AR(1) de  $k_{(t,i)}$  são grandes o suficiente e o  $c_{1(i)}$  estimado for menor que 1, então a *i-ésima* população poderá ser incluída no grupo. Caso contrário, a mesma deverá ser excluída do grupo ou modelos de AR de ordem superior devem ser utilizados, se a análise de  $k_{(t,i)}$  assim sugerir.

De forma resumida, então, para a *i-ésima* população, se  $R_C(i)$  for grande o suficiente ou se  $R_{AC}(i)$  for grande o suficiente e  $k_{(t,i)}$  puder ser bem modelado, a *i-ésima* população pode ser incluída no grupo; caso contrário, deve ser excluída. No entanto, Li & Lee (2005) salientam que esses critérios, que são intencionalmente um tanto vagos, devem ser avaliados pelo julgamento do pesquisador (*expert opinion*). Se  $R_C(i)$  for relativamente pequeno, mas as razões para o mau ajuste forem entendidas como sendo devidas a forças históricas que são

consideradas transitórias, então o pesquisador pode decidir incluir ou não esse país no grupo para fins de projeção, em qualquer caso. Se uma população for excluída do grupo, o fator-comum e o fator específico de outras populações devem ser reestimados, sendo a recíproca verdadeira, ou seja, se outra população for incluída no grupo, também deverá ser reexaminada a sua inclusão a partir do procedimento descrito.

Pensando na projeção em si, os erros padrão do termo de tendência,  $SE(\hat{d})$ , dos coeficientes de AR(1),  $SE(\hat{c}_{0(i)})$  e  $SE(\hat{c}_{1(i)})$ , são definidos como:

$$SE(\hat{d}) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{T}}, \quad SE(\hat{c}_{0(i)}) = \frac{\hat{\sigma}_i}{\sqrt{T}}, \quad SE(\hat{c}_{1(i)}) = \frac{\hat{\sigma}_i}{\sqrt{\sum_{t=0}^T k_{(t,i)}^2}} \quad (43)$$

de forma que  $\hat{\sigma}$  representa o valor estimado de  $\sigma$  na equação que segue, em que  $k_{(t)}$  será substituído por  $K_{(t)}$  e onde  $\hat{\sigma}_i$  será o valor estimado de  $\sigma_i$  na equação (42):

$$k_{(t)} = k_{(t-1)} + d + e_{(t)}\sigma, \quad e_{(t)} \sim N(0,1), \quad E(e_{(s)}e_{(t)}) = 0 \quad (44)$$

Onde:  $d$  (*drift*) é o termo de tendência, e  $\sigma$  é o desvio-padrão das mudanças aleatórias ocorridas em  $k_{(t)}$ .

Como nas projeções os erros estimados devem obrigatoriamente ser levados em consideração, as trajetórias de  $K_{(t)}$  e  $k_{(t,i)}$  serão dadas pelas seguintes fórmulas:

$$k_{(t)} = k_{(t-1)} + (\hat{d} + SE(\hat{d})\varepsilon) + \hat{\sigma}e_{(t)}, \quad t > T \quad (45)$$

$$k_{(t,i)} = [\hat{c}_{0(i)} + SE(\hat{c}_{0(i)})\eta_i] + [\hat{c}_{1(i)} + SE(\hat{c}_{1(i)})\eta_i]k_{(t-1,i)} + \hat{\sigma}_i e_{i(t)}, \quad t > T \quad (46)$$

Onde:  $\varepsilon$  e  $\eta_i$  são variáveis Normal Padrão independentes umas das outras. Quando  $k_{(t,i)}$  é modelado como um passeio aleatório sem tendência (RW), as suas projeções tomam a forma de  $K_{(t)}$ , com um termo de tendência igual a zero.

Os termos aleatórios puros nos modelos de  $K_{(t)}$  e  $k_{(t,i)}$  são assumidos como independentes porque o primeiro descreve a aleatoriedade do grupo e o segundo a aleatoriedade específica para a  $i$ -ésima população. Os modelos de  $k_{(t,i)}$  e  $k_{(t,j)}$  também podem ser considerados para descrever as mudanças aleatórias especiais nas diferentes populações. Para finalizar, então, trocando  $T$  da

equação (40) por  $t$ , as taxas específicas de mortalidade projetadas para a  $i$ -ésima população são dadas pela seguinte fórmula:

$$\log(m_{(x,t,i)}) = \log(m_{(x,T,i)}) + B_{(x)}[K_{(t)} - K_{(T)}] + b_{(x,i)}[k_{(t,i)} - k_{(T,i)}], t > T \quad (47)$$

Na equação anterior, o  $B_{(x)}K_{(t)}$  especifica a tendência de longo prazo e as flutuações aleatórias, que são comuns para todo o grupo, enquanto  $b_{(x,i)}k_{(t,i)}$  descreve as mudanças de curto prazo, específicas para a  $i$ -ésima população.

Li & Lee (2005) chamam esse procedimento de método LC de fator-comum aumentado (*augmented common factor*), do qual o método clássico LC é um caso especial que usa apenas um fator específico. Ainda segundo os autores, a estratégia sugerida por Lee & Nault (1993) seria outro caso especial, que inclui apenas o fator-comum.

#### 4.8.2.2) Método de Li, Lee & Gerland (2013) – LC estendido (rotação)

Nos países desenvolvidos, o declínio da mortalidade está desacelerando nas idades mais jovens e acelerando nas idades avançadas, um fenômeno chamado de rotação (*rotation*) do vetor das taxas específicas de declínio (o  $b_{(x)}$  do LC), previsto também de ocorrer nos países em desenvolvimento, como o Brasil, à medida que o país atinja ex's elevadas para homens e mulheres, tal qual nos países desenvolvidos. Se as taxas de declínio estão rotacionando, então as projeções que ignoram a rotação resultarão em erros, particularmente no padrão etário das taxas de mortalidade projetadas.

Segundo Li, Lee, & Gerland (2013), como o fenômeno da rotação ocorre de forma sutil ao longo do tempo, tem sido difícil lidar com a mesmo nos modelos de projeção da mortalidade de longo prazo e que incluem todas as idades ou faixas etárias. Por outro lado, quando não levamos em consideração as alterações ocorridas nas taxas de variação das  $M_x$ 's, os resultados obtidos poderão ser questionáveis ou mesmo implausíveis. Para simplificar o problema, os autores propuseram focar na magnitude relativa das taxas de mortalidade nas idades de 0 e 15-19 anos, em conjunto com suposições sobre as mudanças nas taxas de declínio da mortalidade em outras idades.

Os autores aplicaram o método proposto para projetar, de forma coerente, fazendo a rotação de  $b_{(x)}$ , a mortalidade por grupo de países (*group forecast*), em função da matriz de taxas de

mortalidade por grupo quinquenal para a população de ambos os sexos, dos 20 países de maior expectativa de vida no mundo<sup>52</sup> em 2008, para os anos de 1950 a 2010 (61 anos). As bases de dados utilizadas são oriundas dos Institutos de Estatística Oficiais dos países, da *University of California at Berkeley* e do *Max Planck Institute Research*.

Segundo Li, Lee, & Gerland (2013), a missão da metodologia proposta seria projetar a mortalidade para 100 anos no futuro. Como a abordagem básica realiza a extrapolação com base nos padrões e tendências das taxas de mortalidade ao longo das últimas décadas, três problemas surgirão no decorrer do longo horizonte da projeção: 1) Primeiro: diversos pesquisadores já detectaram que o calendário etário (*age schedule*) de  $b_{(x)}$  não permaneceu constante nos dados históricos; 2) Segundo: o longo período de 100 anos de projeção utilizando o método de Lee-Carter pode levar a padrões etários implausíveis. Por exemplo, pesquisadores observaram que as diferenças, ao longo das idades, para as taxas constantes de declínio, refletidas no vetor  $b_{(x)}$ , levam a diferenças proporcionais cada vez maiores das taxas de mortalidade em idades adjacentes. Tais discontinuidades ou perfis irregulares na mortalidade são inconsistentes com a crença de que o padrão deve variar suavemente e continuamente, ao longo das idades; e 3) Terceiro: como a mortalidade infantil declina mais rápido do que a mortalidade em outras idades jovens, os níveis projetados destas primeiras podem parecer implausivelmente baixos, quando comparados às segundas.

As projeções propostas pelos autores assumem que os coeficientes  $b_{(x)}$  das idades de 0 a 65 convergem para um único valor constante. Acima de 65 anos, os coeficientes  $b_{(x)}$  diminuem com a idade, garantindo que a mortalidade continuará aumentando, ou seja, a curva continuará monotônica e crescente a partir de determinada idade. Uma vez que  $b_{(x)}$  tenha convergido para um valor constante para idades de 0 a 64 anos, o padrão etário proporcional para essas idades permanecerá fixo no formato de "U" resultante, deste ponto em diante.

Ao longo dos anos, demógrafos tentaram, de todas as formas, mas sem sucesso, modelar o fenômeno da rotação, baseados em análises de dados históricos. O fracasso nas diversas tentativas se deu, parte em função da própria complexidade em se modelar as mudanças em  $b_{(x)}$  em todas as idades, e parte por conta de que as rotações não são consistentes para os diferentes países e para diferentes períodos de tempo. Nesse sentido, Li, Lee, & Gerland (2013)

---

<sup>52</sup> Os autores utilizaram dados de: Austrália, Áustria, Bélgica, Canadá, Dinamarca, Espanha, Finlândia, França, Hong Kong (China), Holanda, Irlanda, Israel, Itália, Japão, Nova Zelândia, Noruega, Reino Unido, Singapura, Suécia e Suíça.

propuseram uma abordagem muito simples, focando especificamente nos grupos 0 e 15-19 anos e fazendo várias suposições acerca dos padrões de mudança nas outras idades, ao longo do tempo. Segundo os próprios autores, a rotação sugerida fez pouca ou nenhuma diferença nas projeções para a maioria dos países testados, principalmente aqueles que já possuíam  $e_0$  acima dos 80 anos.

Espera-se que o risco de morte seja significativamente mais elevado na idade de 0 ano do que nas idades de 15-19 anos. Li, Lee, & Gerland (2013) descobriram que a mediana de  $m_0 / m_{(15-19)}$  entre os 20 países testados era aproximadamente igual a 11.

Os autores sugeriram, então, a solução em dois passos:

- 1) Primeiro Passo => Modificação do formato das curvas  $b_{(x)}$ , estimadas com base em dados históricos: foi feita uma suavização nas idades adolescentes e adultas (15-65 anos), para igualar o valor médio calculado para esta amplitude etária, e reduzindo esse valor médio nas idades infantis e de crianças (0-14 anos). A idade de 65 anos é geralmente tomada como o início da velhice em grupos demográficos. Como os valores de  $b_{(x)}$  somam 1, reduzir os valores de  $b_{(x)}$  em idades jovens significa aumentar os seus valores em idades mais avançadas. Primeiro são ajustados, proporcionalmente, os valores de  $b_{(x)}$  às idades de 70 e mais anos, para fazer  $b_{(70)} = b_{(65)}$ . Normalmente (quando  $b_{(70)} < b_{(65)}$ ), este ajuste aumentará o  $b_{(x)}$  nas idades mais avançadas e fortalecerá a rotação; em casos raros (quando  $b_{(70)} > b_{(65)}$ ), a curva ficará mais normal, no sentido da mortalidade ser mais difícil de reduzir em idades mais avançadas. Na sequência, os valores de  $b_{(x)}$  são ajustados proporcionalmente em todas as idades, para fazer o somatório de  $b_{(x)}$  ser igual a um, o que aumentará os valores de  $b_{(x)}$  nas idades avançadas, permitindo a rotação. Utilizando o  $b_{(x)}$  rotacionado ao invés do original, implica numa rotação instantânea e fornece uma solução que faz a taxa de declínio projetada de  $M_x$  ser idêntica para todas as idades abaixo de 65 anos, significando dizer que a razão  $m_{(0)}/m_{(15-19)}$  será mantida contante no nível calculado no ano de início da troca, pelo  $b_{(x)}$  rotacionado. O primeiro passo é suficiente para evitar que a razão  $m_{(0)}/m_{(15-19)}$  projetada seja muito baixa. Entretanto, este primeiro passo não é necessário, porque a razão  $m_{(0)}/m_{(15-19)}$  declinou ao longo da história e espera-se que continue declinando no futuro. Na metodologia proposta, os autores introduziram um valor subjetivo de  $m_{(0)}$  para o longo prazo, que frequentemente resulta num  $b_{(0)}$  rotacionado menor do que um  $b_{(15-19)}$  rotacionado;

2) Segundo Passo => Rotação suave de  $b_{(x)}$ , começando nos valores originais de  $b_{(x)}$  do LC, até os últimos  $b_{(x)}$ 's (*ultimate  $b_{(x)}$* ): os valores finais de  $b_{(x)}$  são obtidos assumindo que o declínio da mortalidade desacelera em idades mais jovens e acelera em idades mais avançadas, com base em evidências empíricas e discussões teóricas. Sabe-se muito pouco sobre o padrão de mudança de longo prazo na mortalidade de adultos e, com isso, é assumido que o padrão futuro é uma versão suavizada das taxas de declínio histórico.

Denotemos agora a projeção da expectativa de vida para ambos os sexos, no tempo  $t$ , como  $e_{0(t)}$ , e o padrão das taxas de declínio da mortalidade, como  $b_{0(x)}$ , ambos calculados pelo método LC original. Além disso, seja o último padrão (*ultimate  $b_{(x)}$* ) de declínio da mortalidade denotado como  $b_{u(x)}$ , e o nível da expectativa de vida a partir do qual a rotação termina, como  $e_0^u$ . Com isso, o padrão das taxas de declínio da mortalidade no ano  $t$ , pelo método Lee-Carter estendido, será dado por  $B_{(x,t)}$ , e denotemos, ainda, a função linear de pesos (do  $b_{(x)}$  original e último) e a função de pesos suavizados pelas seguintes equações, respectivamente:

$$w(t) = \frac{[e_{0(t)} - 80]}{(e_0^u - 80)} \quad (48) \quad e$$

$$w_s(t) = \left\{ 0,5 \left[ 1 + \text{seno} \left[ \frac{\pi}{2} (2 * w(t) - 1) \right] \right] \right\}^p \quad (49)$$

Com isso, o  $B_{(x,t)}$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$B_{(x,t)} = \begin{cases} b_{0(x)}, & \text{se } e_0(t) < 80 \\ (1 - w_s(t))b_{0(x)} + w_s(t)b_{u(x)}, & \text{se } 80 \leq e_0(t) < e_0^u \\ b_{u(x)}, & \text{se } e_0^u \leq e_0(t) \end{cases} \quad (50)$$

Na equação (48) a função de pesos lineares varia de 0 (quando  $e_0(t) = 80$ ) até 1 (quando  $e_0(t) = e_0^u$ ) mas a sua derivada não existe nos pontos 0 e 1, o que leva a mudanças descontínuas na taxa de declínio da mortalidade nos pontos inicial e final da rotação. A função de pesos suavizados na equação (49) faz a mudança na taxa contínua de declínio da mortalidade ao longo da projeção. O poder da função de pesos suavizados, denotado por “ $p$ ”, toma valores entre 0 e 1, o que torna a rotação mais rápida nos anos iniciais da projeção e mais lenta nos anos finais. No *paper*, Li, Lee, & Gerland (2013) tomaram  $p = 0,5$  como valor padrão (*default*). Ainda segundo os autores, na equação (50) o valor de 80 anos foi a mediana aproximada da  $e_0$  dos 20 países investigados no estudo, idade para  $e_0$  a partir da qual o problema ocorre, e a rotação deve iniciar.

De forma resumida, então, quando  $e_0(t) < 80$  anos,  $B_{(x,t)} = b_{0(x)}$ ; a rotação se inicia quando  $80 \leq e_0(t) \leq e_0^u$ ; e a rotação finda quando  $e_0(t) = e_0^u$  e com isso,  $B_{(x,t)} = b_{u(x)}$ . Quando tomamos um valor pequeno de  $e_0^u$ , teremos uma rotação mais rápida e uma grande razão  $m_{(0)}/m_{(15-19)}$  ao final do período da projeção, o que seria menos questionável. De outro lado, ao utilizarmos um valor elevado de  $e_0^u$ , teremos uma rotação mais suave e uma pequena razão  $m_{(0)}/m_{(15-19)}$  ao final do período da projeção, o que pode ser mais questionável.

Conforme já citado, Li, Lee, & Gerland (2013) consideraram a razão entre a mortalidade infantil e a mortalidade entre 15-19 anos de idade, uma estatística que serve como resumo de característica da mortalidade nas idades mais jovens. Apesar do nível de  $m_{(0)}/m_{(15-19)}$  ter declinado historicamente e ainda se esperar que essa situação continue no futuro, os autores detectaram nas 20 populações de estudo, que pode ocorrer um nivelamento nessa estatística calculada. Nesse sentido, o último valor de  $m_{(0)}/m_{(15-19)}$  parece ser razoável, mas não pode ser considerado de forma irrestrita, pois essa razão difere entre as diversas populações, ao longo da história, indicando heterogeneidade, salientando, ainda, que outras escolhas de modelos ou períodos pode levar a diferentes últimos níveis (*ultimate levels*). Dado um último nível de  $m_{(0)}/m_{(15-19)}$ , derivado do ajuste AR(1), um valor de  $e_0^u$  na equação (48) é encontrado para o ajustá-la de forma exata. Com isso, os autores aplicaram um valor universal de  $e_0^u = 102$  anos para todas as 20 populações em estudo, considerando o valor como adequado, inclusive para a aplicação em países com  $e_0 < 80$  anos, assumindo, como pressuposto, que a mudança na mortalidade do país em questão será similar aos respectivos países no estudo dos autores, a partir do momento que a  $e_0$  atinja os 80 anos de idade.

Finalizando os aspectos metodológicos, Li, Lee, & Gerland (2013) sugerem a estratégia de, primeiramente, projetar a  $e_0$ , utilizando o LC clássico e então encontrar os valores ajustados de  $K_{(t)}$  que resultem na  $e_0$  projetada, em função da utilização do  $B_{(x,t)}$  rotacional. Importante destacar que introduzir a rotação não significa alterar os valores projetados da  $e_0$ , mas, sim, alterar apenas o padrão da mortalidade que resulta na  $e_0$  projetada. De posse, então, do conhecimento dos valores de  $b_{u(x)}$ ,  $e_0^u$  e  $B_{(x,t)}$ , pode-se ajustar as  $e_0(t)$ , por sexo, por exemplo, encontrando o valor de  $K_{(t)}$ , diferente daquele  $k_{(t)}$  obtido no método LC, de forma que podemos escrever as seguintes equações, para o agora chamado método de Lee-Carter estendido (*Extended Lee-Carter Method*), para mulheres e homens, respectivamente:

$$\log[m_{f(x,t)}] = a_{f(x)} + B_{(x,t)}K_{f(t)} \quad (51)$$

$$\log[m_{m(x,t)}] = a_{m(x)} + B_{(x,t)}K_{m(t)} \quad (52)$$

Quando  $e_0(t) < 80$  anos, então o método Lee-Carter estendido se reduz ao método Lee-Carter clássico. Quando  $e_0(t)$  projetada é maior que 80 anos, o LC estendido vai gradualmente tomando o lugar do LC, enquanto o declínio das taxas de mortalidade nas idades mais jovens desacelera e nas idades mais avançadas acelera.

Li, Lee, & Gerland (2013) destacam que o método proposto é capaz de fornecer projeções plausíveis do padrão etário de mortalidade para as populações em geral, mesmo no horizonte de prazo muito longo.

#### **4.8.2.3) Método de Hyndman, Booth & Yasmeen (2013) – coerente produto-razão (COE)**

Quando a independência é assumida, as projeções da mortalidade para subpopulações são quase sempre divergentes no longo prazo. De forma sucinta, Hyndman, Booth, & Yasmeen (2013) propuseram um método para a projeção coerente das taxas de mortalidade, para duas ou mais subpopulações, com base em métodos de componentes principais funcionais, considerando simples e interpretáveis funções das taxas. O então chamado método Funcional produto-razão (*product-ratio*) fornece as taxas projetadas, a partir da modelagem e projeção da média geométrica e da razão entre taxas dos subgrupos populacionais. A coerência é imposta restringindo a função-razão da projeção através de modelos de séries temporais estacionárias.

Segundo Hyndman, Booth, & Yasmeen (2013), até então o termo *coerência* tinha sido utilizado somente no sentido de não divergência entre as projeções dos diversos grupos populacionais. Hyndman et al. (2013) definem como projeções coerentes, aquelas em que as razões entre as taxas de mortalidade projetadas para cada par de subpopulações convergem para um determinado conjunto de constantes apropriadas.

Os autores realizaram duas aplicações para o método proposto. A primeira aplicação foi a projeção coerente, por sexo (*two-sex forecast*), considerando a matriz de taxas de mortalidade, por idade simples, de 0 até o grupo aberto 100+ anos, de homens e mulheres da Suécia, para os anos de 1950 a 2007 (58 anos). Essas taxas de mortalidade foram oriundas dos arquivos eletrônicos da *Human Mortality Database (HMD)*.

A segunda aplicação foi a projeção coerente, por grupo de estados (*group forecast*), considerando a matriz de taxas de mortalidade para a população de ambos os sexos dos seis

estados da Austrália<sup>53</sup>, para os anos de 1950 a 2003 (54 anos), obtidas do pacote “*addb*” (*Australian Demographic Data Base*) (Hyndman, 2008) do R.

Pensando no caso mais simples, que seria a projeção coerente por sexo, sejam então,  $m_{t,M}(x)$  e  $m_{t,F}(x)$ , as taxas de mortalidade para a idade  $x$  e no ano  $t$  ( $t = 1, \dots, n$ ), para homens e mulheres, respectivamente. Considere, também, o logaritmo da taxa de mortalidade, representado por  $y_{t,M}(x) = \log[m_{t,M}(x)]$ , para os homens, e  $y_{t,F}(x) = \log[m_{t,F}(x)]$ , para as mulheres.

No paradigma dos dados funcionais, assume-se que existe uma função suave observada,  $f_{t,M}(x)$ , para os homens e,  $f_{t,F}(x)$ , para as mulheres, tal que:

$$y_{t,M}(x_i) = \log[f_{t,M}(x_i)] + \sigma_{t,M}(x_i)\varepsilon_{t,M,i} \quad (53)$$

$$y_{t,F}(x_i) = \log[f_{t,F}(x_i)] + \sigma_{t,F}(x_i)\varepsilon_{t,F,i} \quad (54)$$

Onde:

⇒  $x_i$  é o centro do grupo etário  $i$  ( $i = 1, \dots, p$ );

⇒  $\varepsilon_{t,M,i}$  e  $\varepsilon_{t,F,i}$  = erro definido como uma variável aleatória normal independente e identicamente distribuída (i.i.d.), para homens e mulheres, respectivamente;

⇒  $\sigma_{t,M}(x)$  e  $\sigma_{t,F}(x)$  = variância observacional para homens e mulheres, respectivamente.

Permite que o ruído do modelo varie conforme a idade  $x$ . Estimada, separadamente, via regressão com *penalized splines*, de  $\{y_t(x_i) - \log[f_{t,M}(x_i)]\}^2$ , contra  $x_i$ , para cada ano  $t$ , para homens; e de  $\{y_t(x_i) - \log[f_{t,F}(x_i)]\}^2$ , contra  $x_i$ , para cada ano  $t$ , para mulheres.

Hyndman et al. (2013) sugerem, então, suavizar as taxas observadas, utilizando *Weighted Penalized Regression Splines* (Wood, 1994, 2003 e 2017), mas restringindo (*constrained*) os resultados, de forma que cada curva seja monotonicamente crescente, a partir dos 65 anos de idade (Hyndman & Ullah, 2007). Segundo os autores, os pesos (*weighted*) controlam a heterogeneidade nas taxas de mortalidade, ao longo das idades.

Depois disso, os autores calculam e modelam a raiz quadrada dos produtos (média geométrica) e a raiz quadrada das razões das taxas suavizadas, para cada sexo, como segue:

---

<sup>53</sup> Foram considerados os Estados: Victoria (VIC), New South Wales (NSW), Queensland (QLD), South Australia (SA), Western Australia (WA) e Tasmania (TAS). A capital do Estado Australiano e o Território do Norte foram excluídos da análise por conta de muitos *missing values* no banco de dados.

$$p_t(x) = \sqrt{f_{t,M}(x) * f_{t,F}(x)} \quad (55) \quad \text{e} \quad r_t(x) = \sqrt{\frac{f_{t,M}(x)}{f_{t,F}(x)}} \quad (56)$$

Onde:

- ⇒  $p_t(x)$  = produto para a idade  $x$  no ano  $t$ ;
- ⇒  $r_t(x)$  = razão para a idade  $x$  no ano  $t$ ;
- ⇒  $f_{t,M}(x)$  = taxa específica de mortalidade suavizada de homens, de idade  $x$ , no ano  $t$ ;
- ⇒  $f_{t,F}(x)$  = taxa específica de mortalidade suavizada de mulheres, de idade  $x$ , no ano  $t$ ;
- ⇒  $M$  = sexo masculino
- ⇒  $F$  = sexo feminino.

A grande vantagem desse tipo de abordagem é que tanto o produto, quanto a razão, terão comportamentos independentes um do outro, desde que as subpopulações tenham variâncias aproximadamente iguais. Quando tomamos a escala log nas equações (55) e (56) acima, os resultados equivalem a somas e diferenças de taxas, que são aproximadamente não-correlacionadas<sup>54</sup>. Segundo Hyndman et al. (2013), se existirem diferenças substanciais nas variâncias das subpopulações, o produto e a razão não serão mais não-correlacionados na escala log. Apesar desse fato tornar as projeções menos eficientes do que seriam, isso não viesaria os resultados, que acabam sendo melhores do que se fossem projetados de forma independente, em virtude da imposição das restrições de coerência.

Os autores modelaram então o  $\log[p_t(x)]$  e o  $\log[r_t(x)]$ , como séries temporais funcionais, dentro da proposta de Hyndman & Ullah (2007), da seguinte forma:

$$\log[p_t(x)] = \mu_p(x) + \sum_{k=1}^K \beta_{t,k} \phi_k(x) + e_t(x) \quad (57)$$

$$\log[r_t(x)] = \mu_r(x) + \sum_{l=1}^L \gamma_{t,l} \psi_l(x) + w_t(x) \quad (58)$$

Onde:

- ⇒  $\phi_k(x)$  e  $\psi_l(x)$  são as componentes principais obtidas via decomposição de  $p_t(x)$  e  $r_t(x)$ , respectivamente;
- ⇒  $\beta_{t,k}$  e  $\gamma_{t,l}$  são os respectivos scores correspondentes para  $\phi_k(x)$  e  $\psi_l(x)$ ;

<sup>54</sup> Se  $X$  e  $Y$  são duas variáveis aleatórias, então  $\text{Corr}(X-Y, X+Y) = \text{Var}(X) - \text{Var}(Y)$ . Como  $X$  e  $Y$  possuem variâncias iguais, então  $X-Y$  e  $X+Y$  são não-correlacionados.

- ⇒  $\mu_p(x)$  e  $\mu_r(x)$  são médias do conjunto de curvas  $p_t(x)$  e  $r_t(x)$ , respectivamente; e
- ⇒  $e_t(x)$  e  $w_t(x)$  são os termos de erro com média zero e não-correlacionados em série.

Os modelos das equações (57) e (58) são estimados, então, pelo algoritmo de componentes principais ponderadas (*weighted principal components algorithm*), sugerido por Hyndman & Shang (2009), que dá maiores pesos aos dados mais recentes, evitando, assim, o problema de mudança nas funções  $\phi_k(x)$  e  $\psi_l(x)$  ao longo do tempo.

Os coeficientes do modelo produto  $\{\beta_{t,1}, \dots, \beta_{t,K}\}$  são projetados, utilizando modelos ARIMA sem restrição (*nonstationary autoregressive integrated moving average*) (Shumway & Stoffer, 2017), pelo algoritmo sugerido por Hyndman and Khandakar (2008) para selecionar a ordem apropriada dos modelos. Já os coeficientes do modelo razão  $\{\gamma_{t,1}, \dots, \gamma_{t,L}\}$  são projetados, utilizando modelos ARMA<sub>(p,q)</sub> (*stationary autoregressive moving average*) (Box et al., 2015) ou ARFIMA<sub>(p,d,q)</sub> (Granger & Joyeux, 1980; Hosking, 1981). Para garantir a coerência nas projeções, o método força que os coeficientes de  $\{\gamma_{t,l}\}$  sejam processos estacionários. Na sequência, multiplicam-se os coeficientes projetados pelas funções-base, resultando em projeções para as curvas  $p_t(x)$  e  $r_t(x)$ , no tempo futuro  $t$ . Como passo final, se  $p_{n+h|n}(x)$  e  $r_{n+h|n}(x)$  são projeções para  $h$  passos no futuro, das funções-produto ( $p_t(x)$ ) e razão ( $r_t(x)$ ), respectivamente, então as projeções das taxas específicas de mortalidade, por sexo, serão obtidas para homens e mulheres, considerando as seguintes fórmulas:

$$f_{n+h|n,M}(x) = p_{n+h|n}(x) * r_{n+h|n}(x) \quad (59)$$

$$f_{n+h|n,F}(x) = \frac{p_{n+h|n}(x)}{r_{n+h|n}(x)} \quad (60)$$

De forma mais geral, o método pode ser estendido para projetar, de forma coerente, a mortalidade de diversos sub-grupos  $J$ , ao mesmo tempo (p.e. diversas regiões, estados ou unidades administrativas). Podemos, então, supor um determinado número de sub-grupos  $J > 2$ , de forma que:

$$p_t(x) = \sqrt[J]{f_{t,1}(x) * f_{t,2}(x) * \dots * f_{t,J}(x)} \quad (61)$$

$$r_{t,j}(x) = \frac{f_{t,j}(x)}{p_t(x)} \quad (62)$$

Onde:

- ⇒  $j = 1, \dots, J$  são os sub-grupos da população;
- ⇒  $p_t(x)$  é a média geométrica das taxas suavizadas e representa o comportamento conjunto (não-estacionário) de todos os sub-grupos ao mesmo tempo;
- ⇒  $r_{t,j}(x)$  = razão de cada  $f_{t,j}(x)$  em relação à  $p_t(x)$ ;

Pode-se assumir uma correlação aproximadamente igual a zero entre as funções-produto  $p_t(x)$  e cada conjunto de funções  $r_{t,j}(x)$ . As funções-razão devem satisfazer a restrição de que  $r_{t,1}(x) * r_{t,2}(x) * \dots * r_{t,J}(x) = 1$ .

No modelo de Hyndman et al. (2013) não existe a necessidade de ajuste para o ano de *jump-off*, tal qual sugerido por Lee & Miller (2001), pois são utilizadas até seis componentes principais. Nesse sentido, Booth et al. (2006) salientam que utilizar o ajuste para corrigir o viés do ano de *jump-off*, nesse caso, implicaria em aumento no viés da projeção.

Utilizando modelos de séries temporais funcionais em  $p_t(x)$  e  $r_{t,j}(x)$ , para todo  $j=1, 2, \dots, J$ , teremos as seguintes equações:

$$\log[p_t(x)] = \mu_p(x) + \sum_{k=1}^K \beta_{t,k} \phi_k(x) + e_t(x) \quad (63)$$

$$\log[r_{t,j}(x)] = \mu_{r,j}(x) + \sum_{l=1}^L \gamma_{t,l,j} \psi_{l,j}(x) + w_{t,j}(x) \quad (64)$$

Com isso, apesar de ser necessário ajustar apenas  $J-1$  modelos das funções-razão, por conta da restrição (no caso do ajuste por sexo, ou seja,  $J=2$ , foi necessário ajustar apenas um modelo de razão), ajustar todos os  $J$  modelos torna mais simples o cálculo da variância para os intervalos de confiança produzidos. Conseqüentemente, o modelo implícito para cada um dos sub-grupos é dado pela seguinte equação, idêntica à fórmula (15) em Hyndman & Ullah (2007):

$$\log[f_{t,j}(x)] = \log[p_t(x) * r_{t,j}(x)] = \mu_j(x) + \sum_{k=1}^K \beta_{t,k} \phi_k(x) + \sum_{l=1}^L \gamma_{t,l,j} \psi_{l,j}(x) + z_{t,j}(x) \quad (65)$$

Onde:

- ⇒  $\mu_j(x) = \mu_p(x) + \mu_{r,j}(x)$  é a média do grupo;
- ⇒  $z_{t,j}(x) = e_t(x) + w_{t,j}(x)$  é o termo de erro.

Seja então  $\hat{\beta}_{n+h|n,k}$ , o  $h$ -ésimo passo à frente da projeção de  $\beta_{n+h,k}$ , e  $\hat{\gamma}_{n+h|n,l,j}$ , o  $h$ -ésimo passo à frente da projeção de  $\gamma_{n+h,l,j}$ . Então, o  $h$ -ésimo passo à frente da projeção do log  $m_{n+h,j}(x)$  é dado pela equação:

$$\log[\hat{m}_{n+h|n,j}(x)] = \hat{\mu}_j(x) + \sum_{k=1}^K \hat{\beta}_{n+h|n,k} \phi_k(x) + \sum_{l=1}^L \hat{\gamma}_{n+h|n,l,j} \psi_{l,j}(x) \quad (66)$$

Como todos os termos são correlacionados, pode-se somar todas as variâncias, de tal forma que:

$$\text{var}\{\log[m_{n+h,j}(x)]|I_n\} = \hat{\sigma}_{\mu_j}^2(x) + \sum_{k=1}^K u_{n+h|n,k} \phi_k^2(x) + \sum_{l=1}^L v_{n+h|n,l,j} \psi_{l,j}^2(x) + s_e(x) + s_{w,j}(x) + \sigma_{n+h,j}^2(x) \quad (67)$$

Onde:

- ⇒  $I_n$  = todos os dados observados até o tempo  $n$  mais as funções-base  $\{\phi_k(x)\}$  e  $\{\psi_l(x)\}$ ;
- ⇒  $u_{n+h|n,k} = \text{var}(\beta_{n+h,k} / \beta_{1,k}, \dots, \beta_{n,k})$ , obtida por modelos de séries temporais;
- ⇒  $v_{n+h|n,k} = \text{var}(\gamma_{n+h,k} / \gamma_{1,k}, \dots, \gamma_{n,k})$ , obtida por modelos de séries temporais;
- ⇒  $\hat{\sigma}_{\mu_j}^2(x)$  = variância das médias suavizadas, obtida pelo método de suavização utilizado;
- ⇒  $s_e(x)$  = estimado pela média de  $\hat{e}_t^2(x)$  para cada  $x$ ;
- ⇒  $s_{w,j}(x)$  = estimado pela média de  $\hat{w}_{t,j}^2(x)$  para cada  $x$ ;

Como a variância observacional,  $\sigma_{t,j}^2(x)$ , é muito estável de um ano para outro, a mesma é estimada pelo cálculo da variância da média observacional nos dados históricos. O intervalo de confiança é construído em função da hipótese de que os erros são normalmente distribuídos.

Segundo Hyndman et al. (2013), o método funcional produto-razão pode ser visto, também, como uma generalização da abordagem de Li & Lee (2005), que empregaram o seguinte modelo, expresso por sexo da população:

$$y_{t,j}(x) = \mu_j(x) + \beta_t \phi(x) + \gamma_{t,j} \phi_j(x) + e_{t,j}(x) \quad (68)$$

Onde:

- ⇒  $J$  = nº de sug-grupos,  $M$  = masculino e  $F$  = feminino;
- ⇒  $J \in \{M, F\}$ ;
- ⇒  $\beta_t$  = passeio aleatório com tendência;

⇒  $\phi(x)$  = primeira componente principal do modelo LC de fator-comum (combinando os dados de homens e mulheres);

⇒  $e_{t,j}(x)$  = erro do modelo.

Apesar de não ter sido apresentado nenhum trabalho a respeito até o presente, Hyndman et al. (2013) sugerem que uma possível extensão da metodologia, seria incorporar duas ou mais dimensões na definição do *produto*, de forma a obter coerência entre dimensões e dentro de cada dimensão, citando, como exemplo, a projeção coerente da mortalidade de homens e mulheres para diferentes estados ou regiões administrativas.

#### 4.9) Testes realizados e abordagem metodológica final adotada

Inicialmente, a ideia do trabalho da tese seria utilizar apenas o método independente de Lee-Miller e o método coerente produto-razão de Hyndman, para realizar as projeções da mortalidade para o Brasil e Grandes Regiões. Todavia, dada a disponibilidade dos diversos outros métodos em pacotes do R, considerando os mesmos dados-base gerados, optou-se por testar nove metodologias diferentes, sendo sete independentes e duas coerentes.

Para a aplicação dos métodos constantes no pacote *Mortcast* (Sevcikova, Li, & Gerland, 2018) do R é necessário, além da matriz de taxas de mortalidade (no caso do pacote, em específico, por grupo quinquenal), possuímos, *a priori*, um vetor de expectativas de vida projetadas para o horizonte desejado.

O *Quadro 2*, a seguir, apresenta os métodos de projeção da mortalidade testados, pacote do R utilizado e respectivos autores e ano da última atualização:

Quadro 2 – Métodos de projeção da Mortalidade, pacote do R utilizado e Autores

Método	Qtd.	Pacote do R	Autor
Lee & Carter (1992), Lee & Miller (2001), Booth, Maindonald, & Smith (2002), Hyndman & Ullah (2007) e sua versão robusta, Hyndman & Shang (2009) e Hyndman, Booth & Yasmeen (2013)	7	<i>Demography</i>	Hyndman (2017)
Brouhns, Denuit, & Vermunt (2002)	1	<i>ilc</i>	Butt, Haberman, & Shang (2015)
Li & Lee (2005) => Li, Lee, & Gerland (2013)	1	<i>Mortcast</i>	Sevcikova, Li, & Gerland (2018)
<b>Total de Métodos Testados</b>	<b>9</b>		

Fonte: [www.R-project.org](http://www.R-project.org)

Como nas projeções com horizonte de 100 anos, aqui conduzidas, entende-se como fundamental a aplicação da rotação no vetor de variação das taxas de mortalidade ao longo do tempo, só foi testado o método Lee-Carter estendido (Li, Lee, & Gerland, 2013), que gera melhores resultados no longo prazo, não tendo sido testada sua versão em que não ocorre a referida rotação (Li & Lee, 2005).

Esperava-se, de início, que o método de Lee-Miller (o mais simples de todos) fosse resultar em padrões futuros possivelmente plausíveis das curvas de mortalidade para homens e mulheres, depois dos diversos testes realizados (p.e: de escolha de período-base, múltiplo-decremento, etc), entretanto com níveis projetados de  $e_0$  provavelmente divergentes, conforme observado anteriormente em Silva (2018a). Isso de fato ocorreu para o Brasil, não apenas em relação ao método de Lee-Miller, como, também, com todos os outros métodos independentes testados, uns, em maior, e outros, em menor escala, onde os níveis de  $e_0$ , além de divergentes, foram elevadíssimos e implausíveis. Esperava-se, também, que o método coerente produto-razão de Hyndman apresentasse resultados consistentes, com padrões e níveis projetados adequados, situação essa ocorrida apenas na projeção da  $e_0$ , sendo os padrões projetados altamente implausíveis para os anos mais distantes do início da projeção, resultando em curvas com *double hump* e mortalidade infantil irrisória e improvável, para não dizer impossível.

Em virtude da maior robustez dos resultados, quando considerados os dados do país como um todo, considerando os ganhos inerentes às informações em grande escala, optou-se por fazer todos os testes, a serem discutidos na sequência, apenas para o Brasil, que resultaram na metodologia final em dois estágios adotada para a projeção da mortalidade, sendo esta então aplicada para as Regiões Norte, Nordeste, Sudeste, Sul e Centro-Oeste.

Como veremos adiante, foram realizados exercícios com diversos períodos-base para as projeções, além de alguns testes de múltiplo-decremento, em relação às causas externas de mortalidade, para as tábuas do Brasil em 1991, 2000 e 2010. Com o objetivo de documentar cada uma das etapas do trabalho realizado nesta tese, foi criado o ANEXO 3, com tabelas e gráficos em painel (frequências e pirâmides dos óbitos), construídos com base nos microdados do Sistema de Informação sobre Mortalidade (SIM/DATASUS) do Ministério da Saúde, dos óbitos de homens, mulheres e ambos os sexos, por idade simples de 0 até 100+ anos, para o Brasil. Como as informações anuais dos óbitos estão sujeitas a flutuações, por conta de determinados eventos sazonais porventura ocorridos em determinado ano calendário específico, os dados foram então suavizados, pelo cálculo das médias dos óbitos por idade, observadas para

os triênios 1990-1991-1992, 1999-2000-2001 e 2009-2010-2011. Essas médias calculadas foram utilizadas para mensurar o peso das causas externas na distribuição dos óbitos por idade, de homens e mulheres, em cada unidade territorial específica (BR e GR's).

Pensando, agora, nas projeções propriamente ditas, em primeiro lugar, para calibrar os resultados, foram realizados testes de sensibilidade em relação ao período-base da projeção, para os métodos de Lee-Miller e coerente produto-razão de Hyndman, comparando, então, as tábuas projetadas com aquelas observadas em 2000 e 2010. Foram testados, ao todo, oito períodos-base distintos, com as duas metodologias. Para a aplicação final, como veremos adiante, optou-se por trabalhar com toda a série histórica 1950-2010 construída, de forma a considerar, na matriz temporal de  $M_x$ 's, toda variabilidade ocorrida ao longo desses 61 anos, seguindo o conselho de Lee & Miller (2001), que sugerem que sejam considerados dados a partir de 1950.

No capítulo 5, serão apresentados apenas os resultados das projeções pelos métodos de Lee-Miller e coerente de Hyndman, com período-base 1950-2010. O ANEXO 4 mostra os principais resultados das 16 simulações feitas (2 métodos X 8 períodos-base), apresentando painéis com gráficos das  $M_x$ ,  $I_x$  e  $e_x$  projetadas e observadas, em 2000 e 2010.

Na sequência, para dois períodos-base distintos (1950-2010 e 1980-2010), foram testadas sete metodologias independentes e o método coerente produto-razão de Hyndman. O único método que apresentou resultados não-divergentes da  $e_0$ , de homens e mulheres, para o horizonte de 100 anos de projeção, foi o método coerente de Hyndman et al. (2013), tal qual preconiza a literatura, mas o padrão resultante das curvas masculinas e femininas mostrou-se implausível. Infelizmente para o caso do Brasil, nenhuma das oito metodologias aqui testadas resultou em plausibilidade conjunta para o binômio padrão X nível da mortalidade projetada. O ANEXO 5 apresenta os principais resultados das projeções considerando as oito metodologias testadas, com os dois períodos-base 1950-2010 e 1980-2010. São apresentados, então, 16 painéis de gráficos das  $M_x$ 's e  $e_0$ 's observadas e projetadas, para 2110, para homens e mulheres. Analisando o ANEXO 5, percebe-se, visualmente, de forma bem clara, que os resultados para o período-base completo 1950-2010 ficaram bem melhores do que aqueles para o menor período 1980-2010. Isso ocorre, em particular, pelo fato do maior período de 61 anos, entre 1950-2010, ter o efeito de diluir no tempo a forte variabilidade positiva ocorrida nas curvas de mortalidade masculinas entre os adultos jovens, no Brasil, a partir da década de 1990.

O Gráfico 2 anterior mostra que o *accident hump* surgiu de forma proeminente na curva de mortalidade masculina no ano censitário de 1991, permanecendo intenso nos censos subsequentes de 2000 e 2010. Conforme pode-se observar no ANEXO 3, as causas externas de mortalidade têm um impacto muito grande no padrão das curvas de homens e também de mulheres, mesmo que em menor intensidade, não apenas no Brasil em geral, como em todas as Grandes Regiões. Na tentativa de melhorar o padrão resultante da mortalidade projetada pelo método coerente de Hyndman et al. (2013), foram realizados testes de múltiplo-decremento na mortalidade masculina, alterando, então, as tábuas de homens do Brasil em 1991, 2000, 2010. Primeiramente, foram criadas novas tábuas masculinas, considerando que os óbitos não ocorreriam mais pelas causas externas de mortalidade, mas agora por todas as outras causas. Como essa hipótese é muito forte e pouco provável de ocorrer, foi feito, também, um teste muito mais factível, considerando a hipótese de que a mortalidade masculina por causas externas seria distribuída, tal como a feminina, nos mesmos triênios tomados para o cálculo da média dos óbitos. Obviamente, temos que ter ciência de que esse tipo de alteração na tábua aumenta a expectativa de vida masculina em diversas idades, inclusive ao nascimento, visto que grande parte dos óbitos se deslocará dos 15-39 anos para idades acima dos 40 anos. Infelizmente, essa alteração proposta nas tábuas-base masculinas de 1991, 2000 e 2010 não corrigiu os problemas observados no padrão das curvas de mortalidade projetadas pelo método de Hyndman para homens e mulheres, notadamente nos anos mais distantes do início da projeção.

Como teste derradeiro, foi aplicada a seguinte ideia: como o nível da mortalidade projetada ( $e_0$ ) para o Brasil, pelo método coerente de Hyndman et al. (2013), ficou extremamente razoável, até o último ano da projeção em 2110, tanto para homens, quanto para mulheres, conforme veremos adiante (sendo o único método a gerar resultados não-divergentes por sexo), aplicou-se, então, o método coerente de Li & Lee (2005) com a rotação no  $b_{(x)}$  proposta por Li, Lee, & Gerland (2013), utilizando, como insumos, tanto a matriz de taxas de mortalidade de homens e mulheres para os anos de 1950-2010, como o vetor de  $e_0$  projetado pelo método de Hyndman et al. (2013). Esse tipo de projeção em dois estágios resolveu o problema da implausibilidade no padrão futuro da mortalidade, resultando, então, num formato adequado e ajustado ao nível da  $e_0$  projetada, no primeiro estágio.

No próximo capítulo é feita uma discussão detalhada dos testes realizados e resultados obtidos para as projeções da mortalidade, objeto desta tese. Como o ANEXO 5 apresenta os resultados das projeções para as sete metodologias independentes, além do método coerente produto-razão de Hyndman, no capítulo 5 serão apresentados apenas alguns dos resultados obtidos.

## **CAPÍTULO 5 - RESULTADOS DA PROJEÇÃO DA MORTALIDADE PARA BR E GR'S**

Antes da apresentação dos resultados das projeções, cabe destacar que tanto os cálculos realizados nesta tese, como todos os gráficos e tabelas apresentados, foram construídos nas seguintes ferramentas / softwares: Excel, SPSS (*Statistical Package for the Social Sciences*) e R<sup>55</sup>.

Na sequência, serão apresentadas as diferentes etapas e testes realizados na tentativa de obtenção de projeções da mortalidade efetivamente consistentes para homens, mulheres e a população total, dentro do horizonte de 100 anos, bem como a metodologia final proposta e os resultados obtidos para o Brasil e Regiões Norte, Nordeste, Sudeste, Sul e Centro-Oeste.

### **5.1) Sensibilidade dos métodos de Lee-Miller (LM) e coerente de Hyndman (COE) em relação ao período-base da projeção para o Brasil**

Para testar qual metodologia seria a mais adequada à população específica em estudo, um importante exercício a ser executado é uma simulação, projetando a mortalidade para determinados anos históricos já observados, e comparar as diferenças encontradas entre os resultados da simulação e os efetivamente calculados com base nos dados disponíveis de óbitos e população exposta ao risco de morte.

Utilizando o período-base 1950-1990, para as  $M_x$ 's de homens e mulheres no Brasil, as curvas de mortalidade foram projetadas para os anos censitários de 2000 e 2010, considerando duas metodologias, uma independente e outra coerente.

Como metodologia que projeta a mortalidade de homens e mulheres de forma independente, foi utilizado o método de Lee & Miller (2001), por ser o mais simples e que conduz a resultados tão bons, quanto suas variantes e extensões mais complexas. Como método coerente, foi utilizado aquele proposto por Hyndman et al. (2013), por ser uma metodologia relativamente nova, promissora e, conforme já citado, adotada oficialmente pela Agência de Estatística da Nova Zelândia (*Statistics New Zealand, 2012*).

---

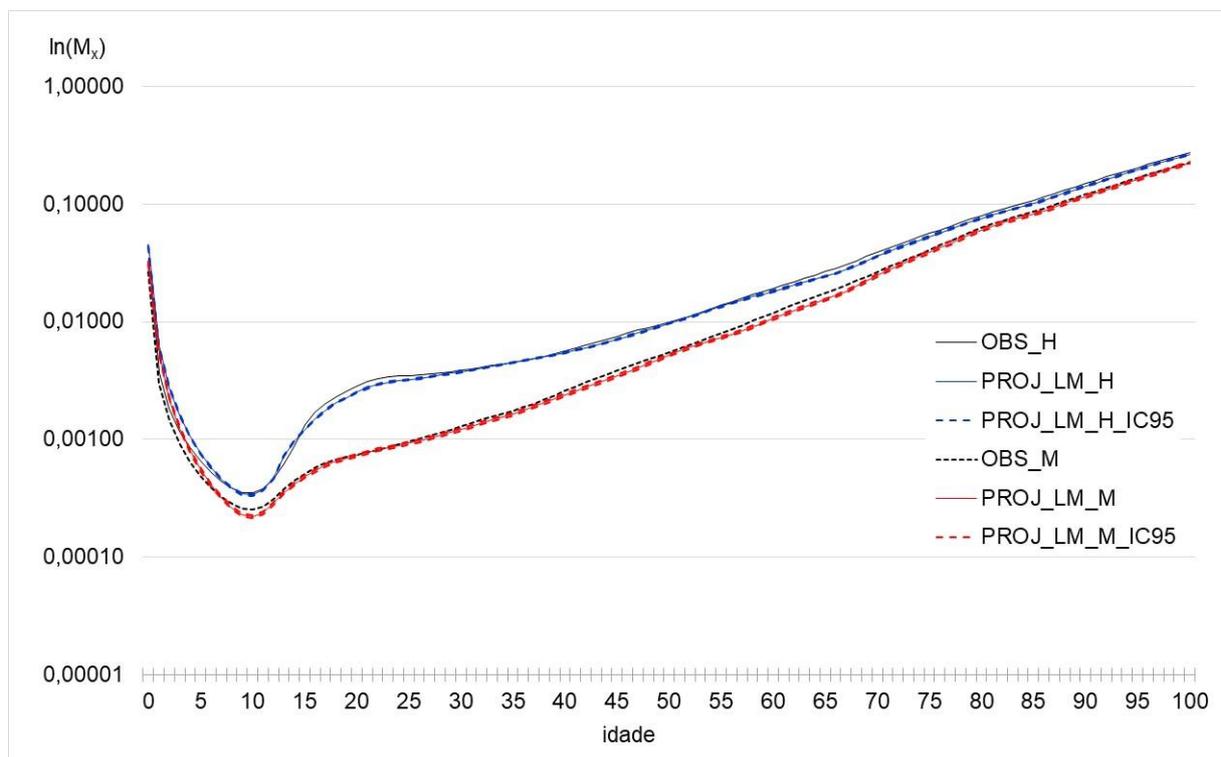
<sup>55</sup> *The R Project for Statistical Computing*. Vide: <https://www.r-project.org/>

Os quatro gráficos, na sequência, apresentam os resultados do exercício aqui conduzido. O *Gráfico 17* e o *Gráfico 18* apresentam os resultados da projeção com o método LM, enquanto que o *Gráfico 19* e o *Gráfico 20* apresentam os resultados da projeção com o método coerente de Hyndman, para os anos de 2000 e 2010, respectivamente.

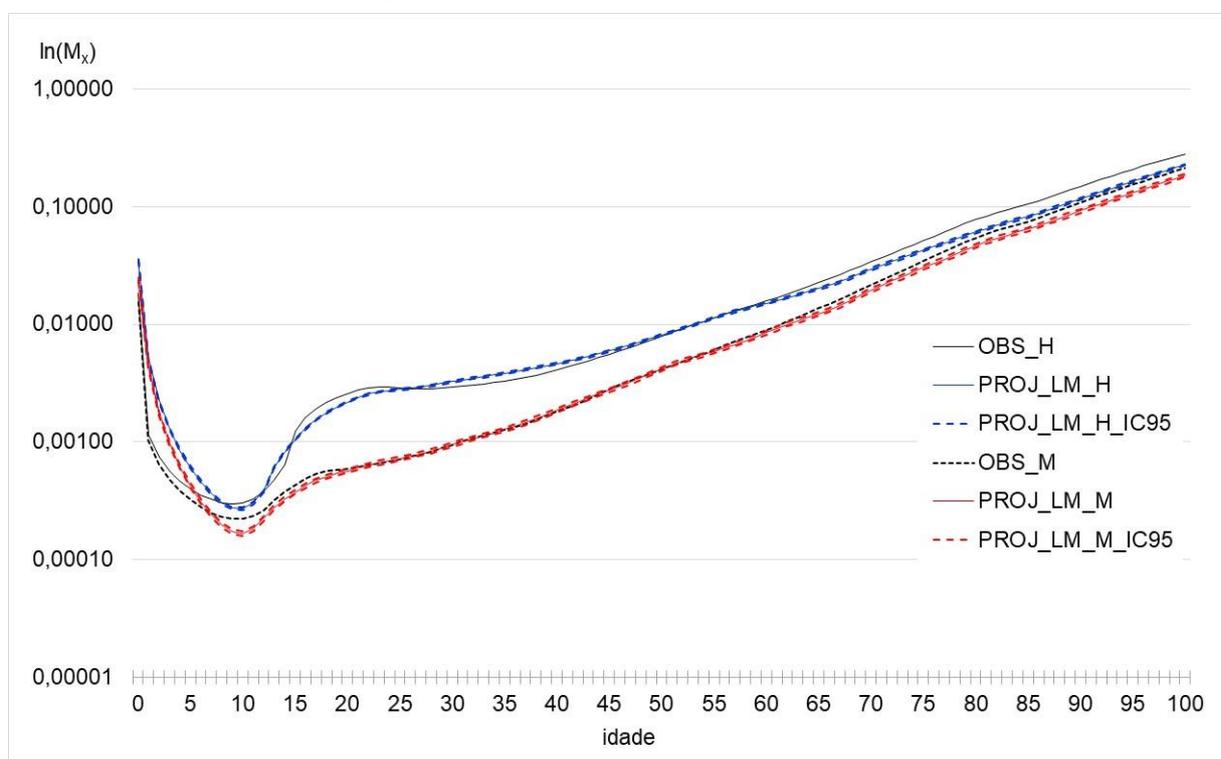
Como para o ano de 2000 são 10 anos de projeção e para o ano de 2010, 20 anos de projeção, quanto mais distante do ano-base, nesse caso 1990, maior será a divergência entre os valores observados/calculados e aqueles projetados das  $M_x$ 's para 2000 e 2010, respectivamente. A análise visual dos quatro gráficos mostra resultados mais calibrados ou com menos *gaps* entre as  $M_x$ 's projetadas X observadas, para o método LM, comparado ao método coerente de Hyndman, para homens e mulheres, tanto no ano de 2000, quanto em 2010.

Por exemplo, o *Gráfico 17* mostra que as  $M_x$ 's observadas/calculadas no ano de 2000 estão dentro do intervalo de confiança de 95% dos seus valores projetados pelo método LM, para o mesmo ano, em praticamente todas as idades de 0 até 100+ anos, tanto para os homens, quanto para as mulheres. Nas poucas idades onde o valor observado das  $M_x$ 's encontra-se fora das bandas de confiança projetadas, mesmo assim ainda está muito próximo dos seus limites inferior ou superior projetados. Já o *Gráfico 18* mostra que, no ano de 2010, o padrão projetado da curva de mortalidade masculina diverge um pouco do calculado, sendo sistematicamente menor até a idade de 7 anos e maior a partir da idade de 54 anos, ocorrendo ainda três *crossovers* entre as  $M_x$ 's observadas e projetadas, entre as idades de 8 até 53 anos. Para a mortalidade feminina, as divergências entre os valores observados e projetados são semelhantes às masculinas, ainda que em menor escala, ou seja, o *gap* entre as referidas curvas é menor. No caso das mulheres, a mortalidade observada é sistematicamente menor que a projetada até a idade de 6 anos e maior a partir da idade de 53 anos, ocorrendo ainda quatro *crossovers* entre as  $M_x$ 's observadas e projetadas, no intervalo entre 7 e 52 anos de idade.

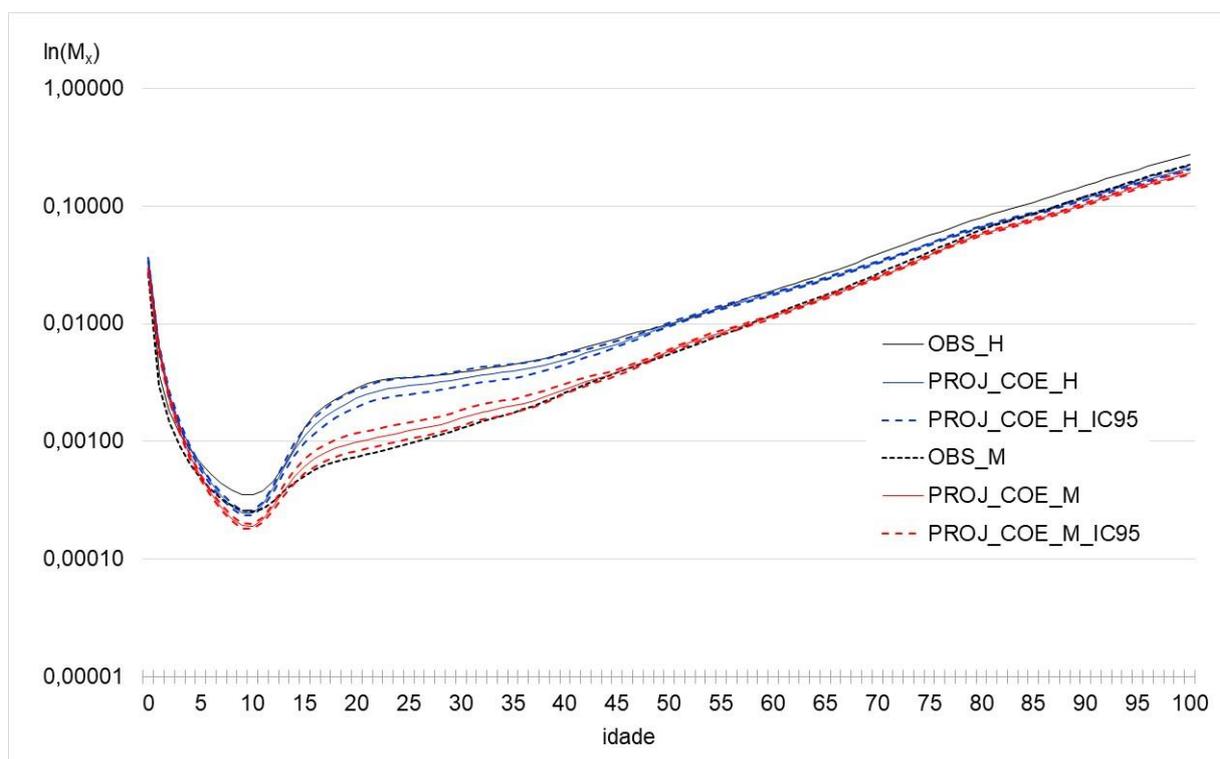
Em relação ao método de Hyndman (COE), o *Gráfico 19* mostra que as  $M_x$ 's masculinas observadas/calculadas no ano de 2000 estão dentro das bandas de confiança de 95% projetadas, para grande parte das idades até os 57 anos (exceto para algumas idades infantis até os 12 anos). A partir de então, as  $M_x$ 's projetadas subestimam sempre a mortalidade observada. Para a mortalidade de mulheres, tal qual ocorrido com o método anterior, as divergências entre os valores observados e projetados são semelhantes às masculinas, porém em menor escala. Em relação às projeções para 2010, como já esperado, o *Gráfico 20* mostra que as mesmas divergências apontadas 10 anos atrás se intensificaram, tanto para homens, quanto para mulheres.

Gráfico 17 – Brasil –  $M_x$ 's Proj. X Obs. – Ano 2000 – método LM – Período 1950-1990 – H e M

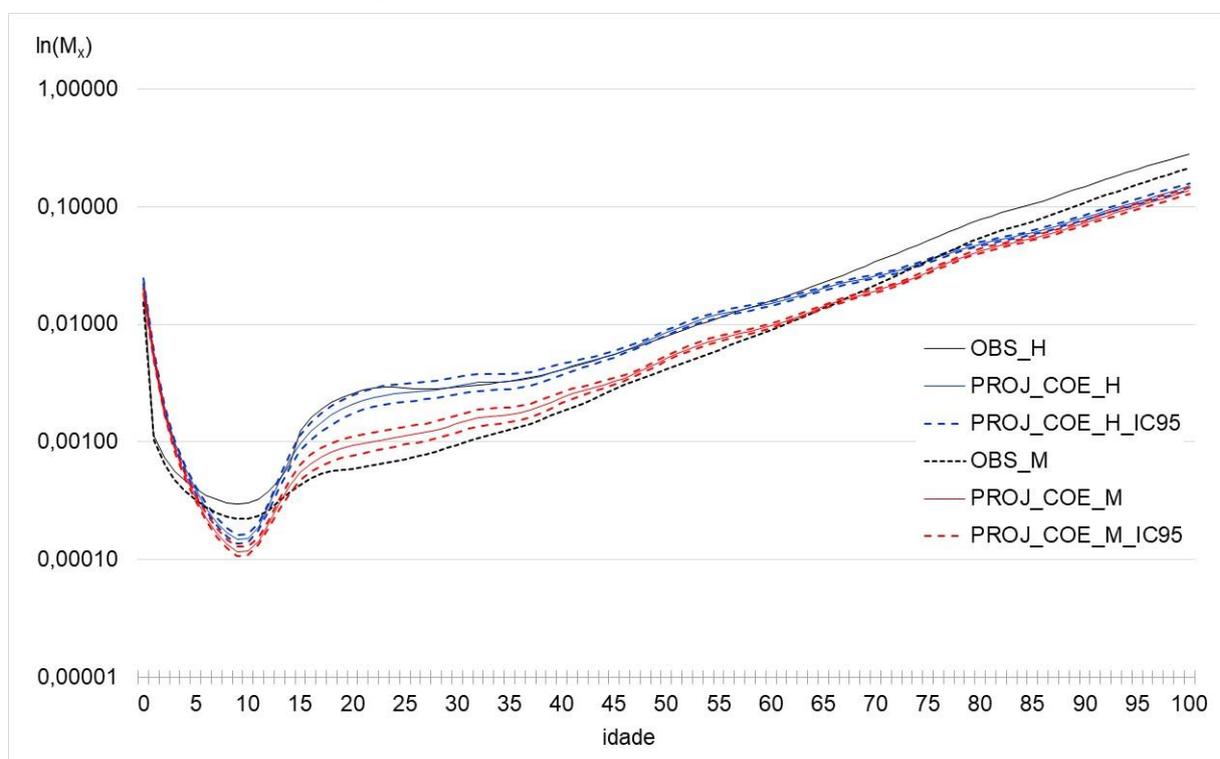
Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade de 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 18 – Brasil –  $M_x$ 's Proj. X Obs. – Ano 2010 – método LM – Período 1950-1990 – H e M

Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade de 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 19 – Brasil –  $M_x$ 's Proj. X Obs. – Ano 2000 – método COE – Período 1950-1990 – H e M

Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade de 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 20 – Brasil –  $M_x$ 's Proj. X Obs. – Ano 2010 – método COE – Período 1950-1990 – H e M

Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade de 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

### 5.1.1) Diferenciais de Nível Geral ( $e_0$ ) da Mortalidade Projetada para o Brasil, em função do período-base

Nesse tópico, a ideia é mostrar a influência que os vários períodos-base de dados exercem na expectativa de vida ao nascer ( $e_0$ ), projetada pelos métodos LM e COE. Diferentes períodos-base conduzirão a diferentes resultados em determinado ano futuro, não apenas em relação à expectativa de vida ao nascer ( $e_0$ ), estatística resumo que determina o nível geral da mortalidade, como, também, ao padrão ou formato da curva projetada. Além disso, a forma como variaram as taxas específicas de mortalidade entre o primeiro e o último ano, dentro do período-base selecionado (o  $b_x$  do LM), fará toda a diferença no resultado dos níveis e padrões futuros projetados. Apesar de existirem alguns métodos que indicam qual seria o melhor período-base a ser utilizado nas projeções, por meio de determinados critérios estatísticos, como o proposto por Booth, Maindonald, & Smith (2002) (BMS), cabe ao pesquisador definir, no limite, com base na literatura e no conhecimento técnico adquirido ao longo do trabalho, e, considerando, obviamente, a especificidade do lugar em estudo, qual será o melhor período-base a ser utilizado nas projeções finais.

Foi realizado, então, o exercício de projeção da mortalidade considerando as duas metodologias aplicadas no tópico anterior, para 10 períodos-base distintos: 1) 1950-1990; 2) 1950-1995; 3) 1950-2000; 4) 1970-1990; 5) 1970-1995; 6) 1970-2000; 7) 1980-1995; 8) 1980-2000, 9) 1950-2010 e 10) 1980-2010.

A *Tabela 5* apresenta os resultados obtidos para os diferenciais na  $e_0$ , no ano de 2050, considerando 20 simulações distintas (2 métodos X 10 períodos). Os períodos-base foram ordenados da maior para a menor  $e_0$  em 2050, dentro do método específico. O *Gráfico 21* e o *Gráfico 22*, na sequência, apresentam, para cinco períodos-base distintos e para cada uma das duas metodologias em tela, a evolução da  $e_0$  entre 1950-2010 e projeções até 2050. Não foram colocados, nos referidos gráficos, todas as 20 curvas obtidas, em prol de uma melhor visualização, visto que algumas das curvas geradas para homens e mulheres percorrem caminhos semelhantes ao longo do horizonte de 40 anos aqui considerado. Para facilitar a correspondência entre a *Tabela 5* e os referidos gráficos, foi incluída, na referida tabela, uma coluna com o tipo de tracejado e cor da linha, para determinado período selecionado. Todos os comentários na sequência e estatísticas apresentadas, referem-se aos 10 períodos-base elencados no parágrafo anterior.

Por exemplo, considerando o **método coerente de Hyndman** e a população de homens, o período-base 1) 1950-1990 obteve a maior  $e_0$  em 2050 (1º lugar, com 98,21 anos), seguido do período 4) 1970-1990 (2º lugar, com 97,75 anos), sendo os dois últimos colocados, o período 3) 1950-2000 (9º lugar, com 81,14 anos) e o período 7) 1980-1995 (10º lugar, com 80,75 anos). A  $e_0$  média em 2050 foi calculada em 85,47 anos, enquanto a mediana foi de 82,90 anos. A amplitude, dada pela diferença entre a maior e a menor  $e_0$ , em 2050, foi de 17,46 anos, com desvio-padrão calculado de 6,71 anos.

Considerando, agora, a população feminina, o período-base 4) 1970-1990 obteve a maior  $e_0$  em 2050 (1º lugar, com 106,21 anos), seguido do período 1) 1950-1990 (2º lugar, com 105,97 anos), sendo os dois últimos colocados, o período 9) 1950-2010 (9º lugar, com 85,47 anos) e o período 3) 1950-2000 (10º lugar, com 81,14 anos). No caso feminino, a  $e_0$  média em 2050 foi calculada em 90,71 anos, com mediana de 88,46 anos. A amplitude das  $e_0$ 's em 2050 foi de 25,08 anos, 7,62 anos maior que a calculada para os homens, com desvio-padrão de 8,49 anos.

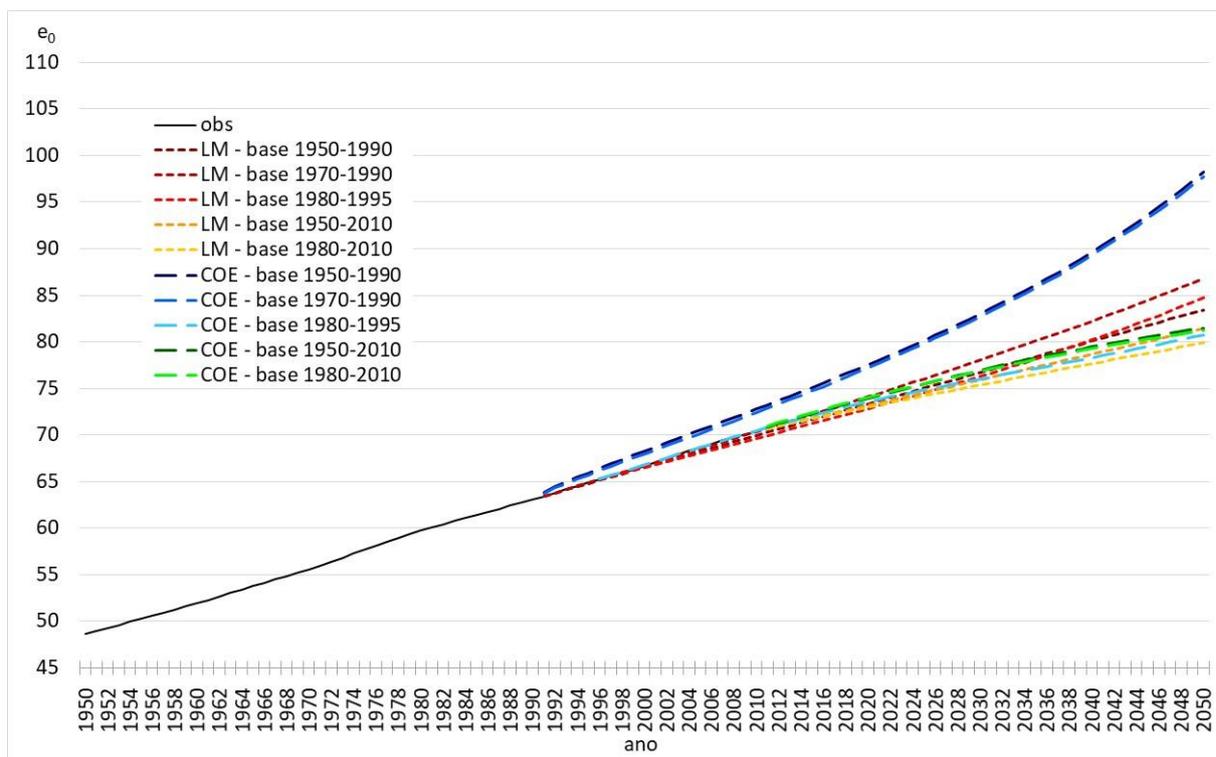
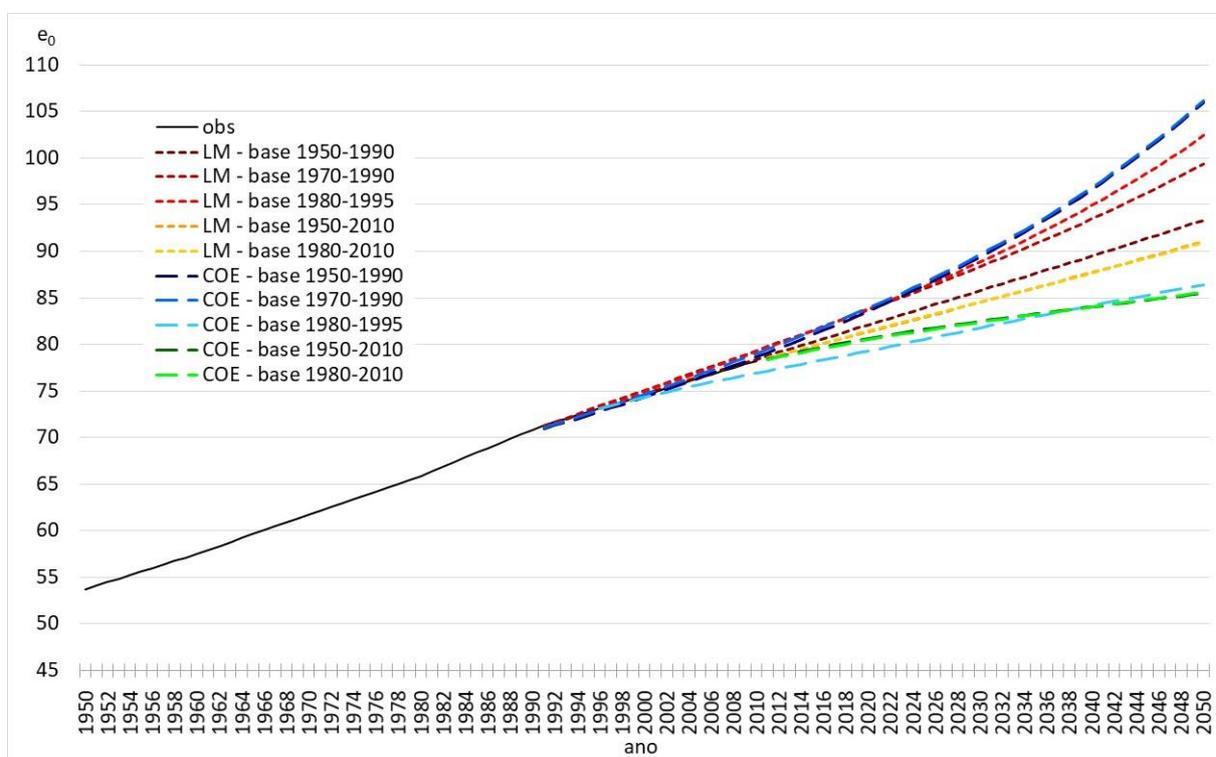
Considerando, agora, o **método de Lee & Miller** e a população masculina, o período-base 4) 1970-1990 obteve a maior  $e_0$  em 2050 (1º lugar, com 86,82 anos), seguido do período 5) 1970-1995 (2º lugar, com 86,03 anos), sendo os dois últimos colocados, o período 9) 1950-2010 (9º lugar, com 81,45 anos) e o período 10) 1980-2010 (10º lugar, com 79,89 anos). A  $e_0$  média em 2050 foi calculada em 83,50 anos, com mediana de 83,53 anos. A amplitude das  $e_0$ 's em 2050 foi de 6,93 anos, equivalendo a 39,67% da amplitude obtida pelo método de Hyndman, com desvio-padrão de 2,08 anos.

Considerando, agora, a população feminina, o período-base 7) 1980-1995 obteve a maior  $e_0$  em 2050 (1º lugar, com 102,42 anos), seguido do período 4) 1970-1990 (2º lugar, com 99,37 anos), sendo os dois últimos colocados, o período 10) 1980-2010 (9º lugar, com 90,94 anos) e o período 3) 1950-2000 (10º lugar, com 82,96 anos). A  $e_0$  média em 2050 foi calculada em 94,31 anos, com mediana de 94,43 anos. A amplitude, entre a maior e a menor  $e_0$  em 2050, foi de 19,46 anos, 12,54 anos maior que a calculada para os homens, e 77,61% da amplitude obtida para as mesmas mulheres, pelo método de Hyndman. Foi calculado para as mulheres, um desvio-padrão para a  $e_0$ , de 5,40 anos.

Tabela 5 – Brasil – e<sub>0</sub>'s projetadas por sexo para 2050 em função do método e período-base

Método	HOMEM				MULHER				
	nº Período	Período	Linha	e <sub>0</sub> 2050	nº Período	Período	Linha	e <sub>0</sub> 2050	
coerente Hyndman	1	1950-1990	--	98,21	4	1970-1990	--	106,21	
	4	1970-1990	--	97,75	1	1950-1990	--	105,97	
	5	1970-1995		84,45	5	1970-1995		89,72	
	2	1950-1995		83,93	8	1980-2000		89,68	
	8	1980-2000		83,16	2	1950-1995		88,81	
	6	1970-2000		82,65	6	1970-2000		88,11	
	<b>9</b>	<b>1950-2010</b>	---	<b>81,50</b>	7	1980-1995	--	86,40	
	10	1980-2010	---	81,21	10	1980-2010	---	85,60	
	3	1950-2000		81,14	<b>9</b>	<b>1950-2010</b>	---	<b>85,47</b>	
	7	1980-1995	--	80,75	3	1950-2000		81,14	
	Estatísticas	Média			<b>85,47</b>	Estatísticas	Média		<b>90,71</b>
		Mediana			<b>82,90</b>		Mediana		<b>88,46</b>
		Desvio Padrão			<b>6,71</b>		Desvio Padrão		<b>8,49</b>
		Amplitude			<b>17,46</b>		Amplitude		<b>25,08</b>
Lee-Miller	4	1970-1990	----	86,82	7	1980-1995	----	102,42	
	5	1970-1995		86,03	4	1970-1990	----	99,37	
	7	1980-1995	----	84,77	5	1970-1995		98,09	
	6	1970-2000		83,92	8	1980-2000		96,09	
	2	1950-1995		83,61	6	1970-2000		95,29	
	1	1950-1990	----	83,44	2	1950-1995		93,57	
	3	1950-2000		82,96	1	1950-1990	----	93,33	
	8	1980-2000		82,07	<b>9</b>	<b>1950-2010</b>	----	<b>91,06</b>	
	<b>9</b>	<b>1950-2010</b>	----	<b>81,45</b>	10	1980-2010	----	90,94	
	10	1980-2010	----	79,89	3	1950-2000		82,96	
	Estatísticas	Média			<b>83,50</b>	Estatísticas	Média		<b>94,31</b>
Mediana			<b>83,53</b>	Mediana			<b>94,43</b>		
Desvio Padrão			<b>2,08</b>	Desvio Padrão			<b>5,40</b>		
Amplitude			<b>6,93</b>	Amplitude			<b>19,46</b>		

Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 21 – Brasil –  $e_0$ 's Projetadas – métodos LM e COE – Vários Períodos Base – HomemGráfico 22 – Brasil –  $e_0$ 's Projetadas – métodos LM e COE – Vários Períodos Base – Mulher

## 5.2) Definição do período-base utilizado nas Projeções da Mortalidade para o Brasil

Conforme dito, o Brasil carece de longas séries históricas de taxas específicas de mortalidade, razão pela qual foram estimadas as curvas de 1950, 1960 e 1970 que, em conjunto com as curvas construídas para 1980, 1991, 2000 e 2010, com base nas tábuas do IBGE, representam uma tentativa de preencher parte da lacuna existente, com uma superfície de mortalidade criada com 61 pontos no tempo, obtida pela interpolação log-linear das  $M_x$ 's para os períodos intercensitários. A idéia aqui neste tópico foi testar se os resultados das projeções seriam melhores quando consideramos apenas o período observado/calculado de 1980-1991-2000-2010, ou se a incorporação do período estimado de 1950-1960-1970 melhoraria a qualidade dos resultados obtidos. De fato, os melhores resultados foram obtidos para o período completo 1950-2010, razão pela qual o mesmo foi considerado nas projeções finais executadas.

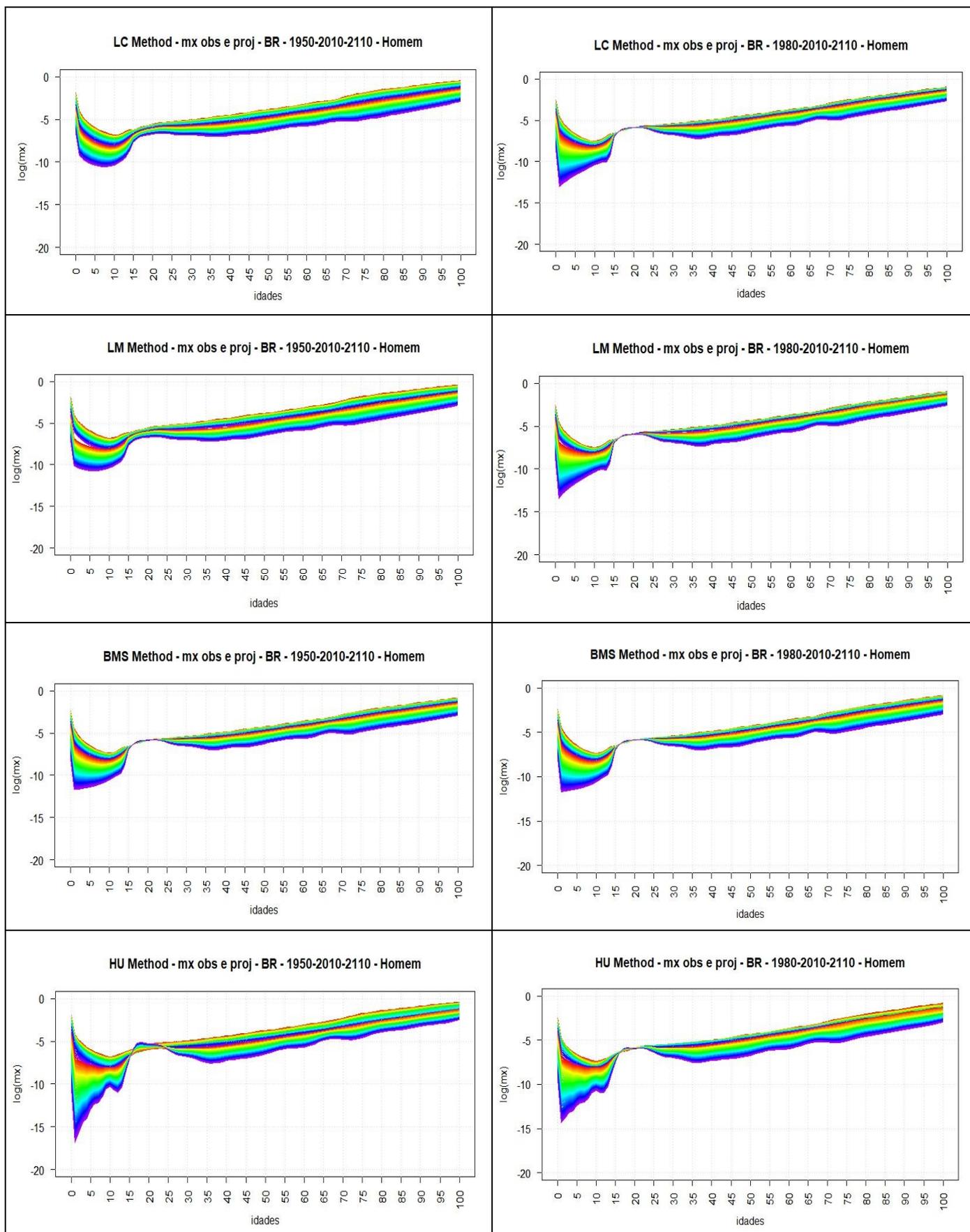
Foram aplicadas, então, para os períodos-base de 1950-2010 e 1980-2010, as oito metodologias de projeção da mortalidade que seguem: 1) Lee & Carter (1992) - LC, 2) Lee & Miller (2001) - LM, 3) Booth, Maindonald, & Smith (2002) - BMS, 4) Hyndman & Ullah (2007) - HU e sua versão robusta - 5)  $HU^{rob}$ , 6) Hyndman & Shang (2009) -  $HU^{wei}$ , 7) Brouhns, Denuit, & Vermunt (2002) - BDV e 8) Hyndman, Booth & Yasmineen (2013) - COE.

O *Painel 3* de gráficos apresenta, para os homens, as  $M_x$ 's observadas e projetadas até 2110, considerando os oito métodos e os dois períodos-base citados no parágrafo anterior. Cada linha do painel representa o método de projeção da mortalidade, na sequência apresentada no parágrafo anterior. A primeira coluna do painel apresenta os resultados da projeção, para o período-base 1950-2010, e a segunda coluna, para o período-base 1980-2010. O *Painel 4* apresenta os resultados correspondentes para as mulheres. Para o método específico de Booth, Maindonald, & Smith (2002), dentre todo o período de 1950-2010 disponível, o período-base selecionado para os homens foi de 1975-2010 e para as mulheres de 1980-2010.

Analisando os resultados para os homens, fica cristalino, para os métodos LC, LM e BDV, que o período-base cheio 1950-2010 gera padrões de mortalidade muito mais factíveis do que os resultantes do período de 1980-2010. No caso do período-base mais curto, o *accident hump* praticamente não reduz em nível, ao longo dos 100 anos da projeção, resultando em padrões altamente improváveis no futuro projetado, situação essa já observada por Silva (2018a), em exercício preliminar conduzido. Isso ocorre porque o  $a_x$  dos métodos é calculado como a média

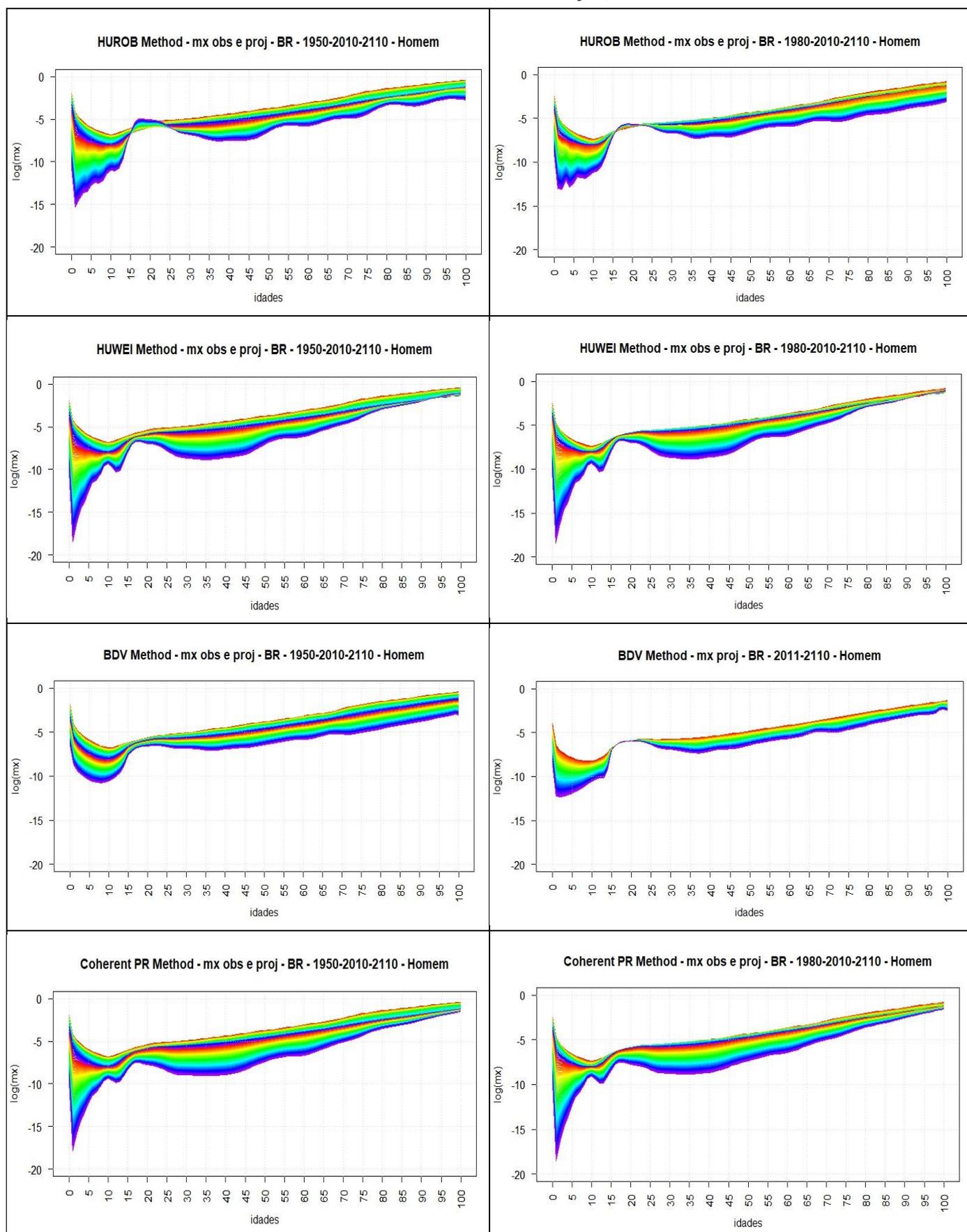
das  $M_x$ 's observadas ao longo do período-base. Aqui, uma importante observação acerca das curvas das  $M_x$ 's de 1980 do Brasil, precisa ser feita: seu padrão ainda não tinha sido influenciado/alterado pelo advento do *accident hump*, ocorrido desde o Censo Demográfico de 1991, notadamente para a população masculina. Quando aumentamos, então, o período-base da projeção, incluindo as estimativas de 1950, 1960 e 1970, que equivalem às curvas das  $M_x$ 's de 1980, só que em níveis mais elevados, o  $a_x$  calculado acaba por *diluir* o efeito do calombo por causas externas, no padrão-base resultante (*main effects*), situação essa que melhora, consideravelmente, os resultados das projeções para os métodos LC, LM e BDV. Em relação ao método BMS, o período-base selecionado 1975-2010 acabou por prejudicar os resultados das projeções, que ficaram semelhantes aos da segunda coluna do painel (1980-2010). Para os métodos HU,  $HU^{rob}$  e  $HU^{wei}$ , os padrões projetados das curvas, principalmente aquelas mais distantes do ano-base da projeção, mostraram-se altamente implausíveis, com o surgimento de *double humps* (entre as idades de 6-12 e 15-35 anos), conforme vamos nos aproximando dos últimos anos da projeção, independentemente do período-base (1950-2010 ou 1980-2010). Em relação ao método de Hyndman et al. (2013), o único coerente (COE) testado no comparativo desta seção, os padrões resultantes das curvas projetadas apresentaram os mesmos problemas detectados nas projeções com os métodos HU's, independentemente do período-base utilizado.

Em relação aos resultados para as mulheres, o *Painel 4* mostra que, para os métodos LC, LM e BDV, o período-base cheio de 1950-2010 parece resultar em padrões de mortalidade mais factíveis do que os resultantes do período de 1980-2010, analisando, principalmente, os anos mais próximos ao final da projeção, em 2110. Para todos os outros anos, as curvas de mortalidade projetadas aparentam-se factíveis e semelhantes, independentemente do período-base. Em relação ao método BMS, como o período-base selecionado foi o de 1980-2010 (primeira coluna), acabou tornando-se idêntico ao período da segunda coluna do painel. Tal qual ocorre nos três métodos anteriores, as curvas projetadas aparentam-se factíveis até determinado ano futuro, tornando-se improváveis nos últimos anos da projeção. Para os métodos HU,  $HU^{rob}$  e  $HU^{wei}$ , os padrões projetados das curvas, principalmente as mais distantes do ano-base da projeção, mostraram-se altamente implausíveis. Observa-se o surgimento de *double humps* (entre as idades de 6-12 e 15-25 anos) nas curvas mais próximas ao fim da projeção, ainda que em intensidade bem menor quando comparada ao caso masculino, independentemente do período-base adotado (1950-2010 ou 1980-2010). Em relação ao método COE, os padrões resultantes das curvas projetadas apresentaram os mesmos problemas detectados nas projeções com os métodos HU's, independentemente da amplitude do período-base utilizado.

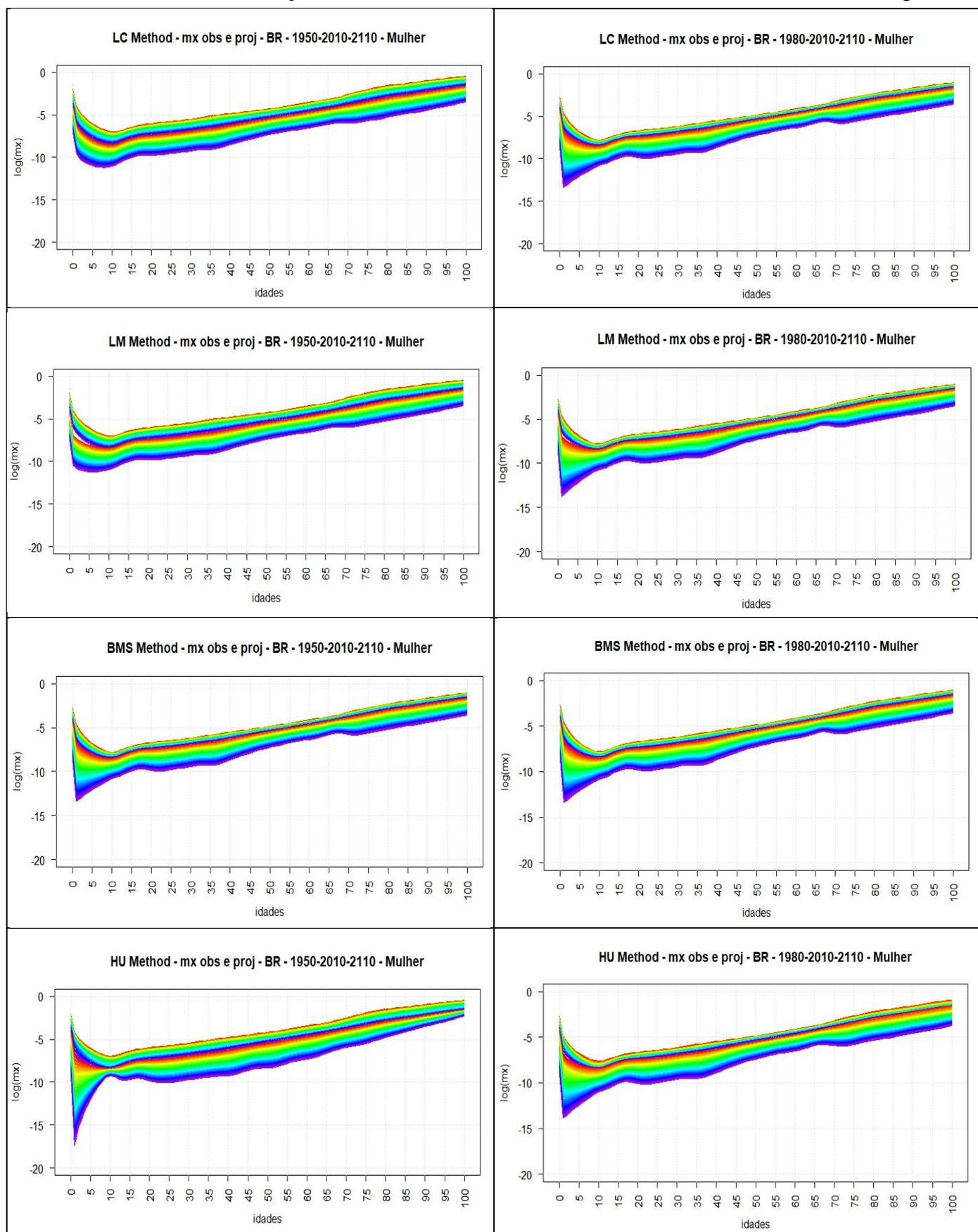
Painel 3 – Brasil –  $M_x$ 's Proj. Homem – Períodos: 1950-2010 e 1980-2010 – Diversas Metodologias

Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

## Painel anterior (continuação)

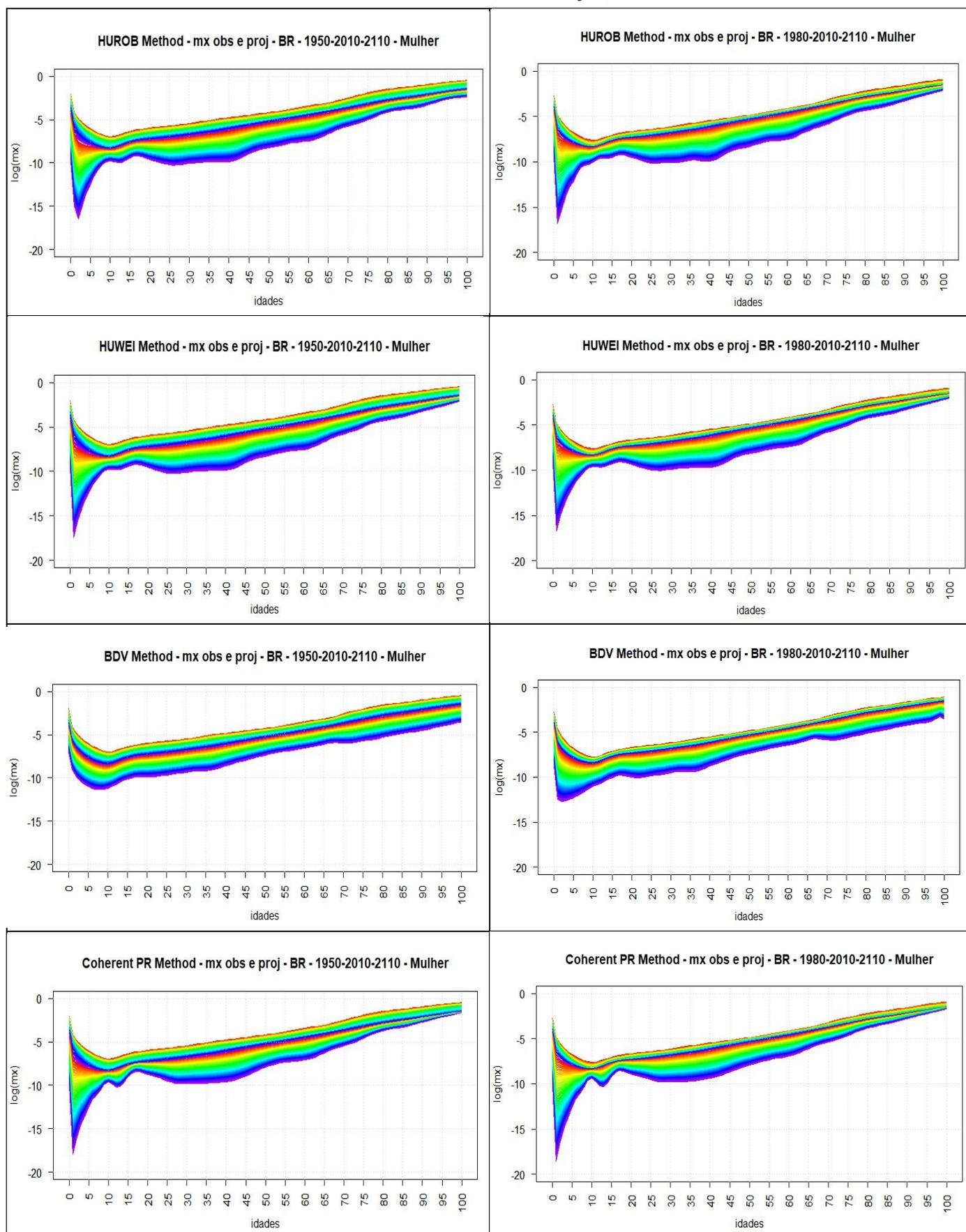


Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Painel 4 – Brasil –  $M_x$ 's Proj. Mulher – Períodos: 1950-2010 e 1980-2010 – Diversas Metodologias

Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

## Painel anterior (continuação)



Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

### 5.3) Projeções da Mortalidade de Homens e Mulheres no Brasil pelo método de Lee-Miller e coerente de Hyndman – Características, Níveis e Padrões resultantes

Depois da definição da utilização do período-base mais amplo 1950-2010, para as projeções da mortalidade no Brasil e suas Grandes Regiões, nesta seção o objetivo é aprofundar-nos, um pouco mais, nos detalhes dos resultados dos métodos de Lee & Miller e coerente produto-razão de Hyndman, metodologias selecionadas para a execução dos exercícios conduzidos neste capítulo.

#### 5.3.1) Projeção da Mortalidade pelo método de Lee-Miller (LM)

O método de Lee & Miller, tal qual o método original de Lee & Carter, de todas as metodologias testadas nesta tese, é considerado o mais simples, em função das suas características básicas. Com isso, aplicou-se o método LM à matriz de  $M_x$ 's de homens e de mulheres, no Brasil, para o período-base de 1950-2010, tendo resultado em padrões plausíveis das curvas projetadas. Todavia, como já esperado em função de ser um método que projeta, de forma independente, a mortalidade dos sub-grupos populacionais (p.e. homens e mulheres), as  $e_0$ 's projetadas divergiram, tendo atingido valores elevadíssimos em 2110, com paulatino aumento do *gap* de anos de vida a mais, existente entre mulheres e homens.

Conforme explicado no capítulo 4, o modelo LM utiliza apenas a 1ª componente principal da técnica de decomposição de valores singulares (*singular value decomposition*). Com isso, um primeiro importante resultado seria a determinação da capacidade do referido modelo em explicar a variabilidade observada na matriz temporal das taxas de mortalidade. A *Tabela 6*, a seguir, apresenta a proporção da variabilidade dos dados explicada pelo modelo LM. Nesse sentido, o referido método consegue explicar 96,35% da variabilidade dos dados masculinos e 98,80% da variabilidade dos dados femininos, valores esses bem elevados.

Tabela 6 – Proporção da Variabilidade dos dados explicada – modelo LM

Estatística	Modelo Lee-Miller	
	Homem	Mulher
VAR PROP	96,35%	98,80%

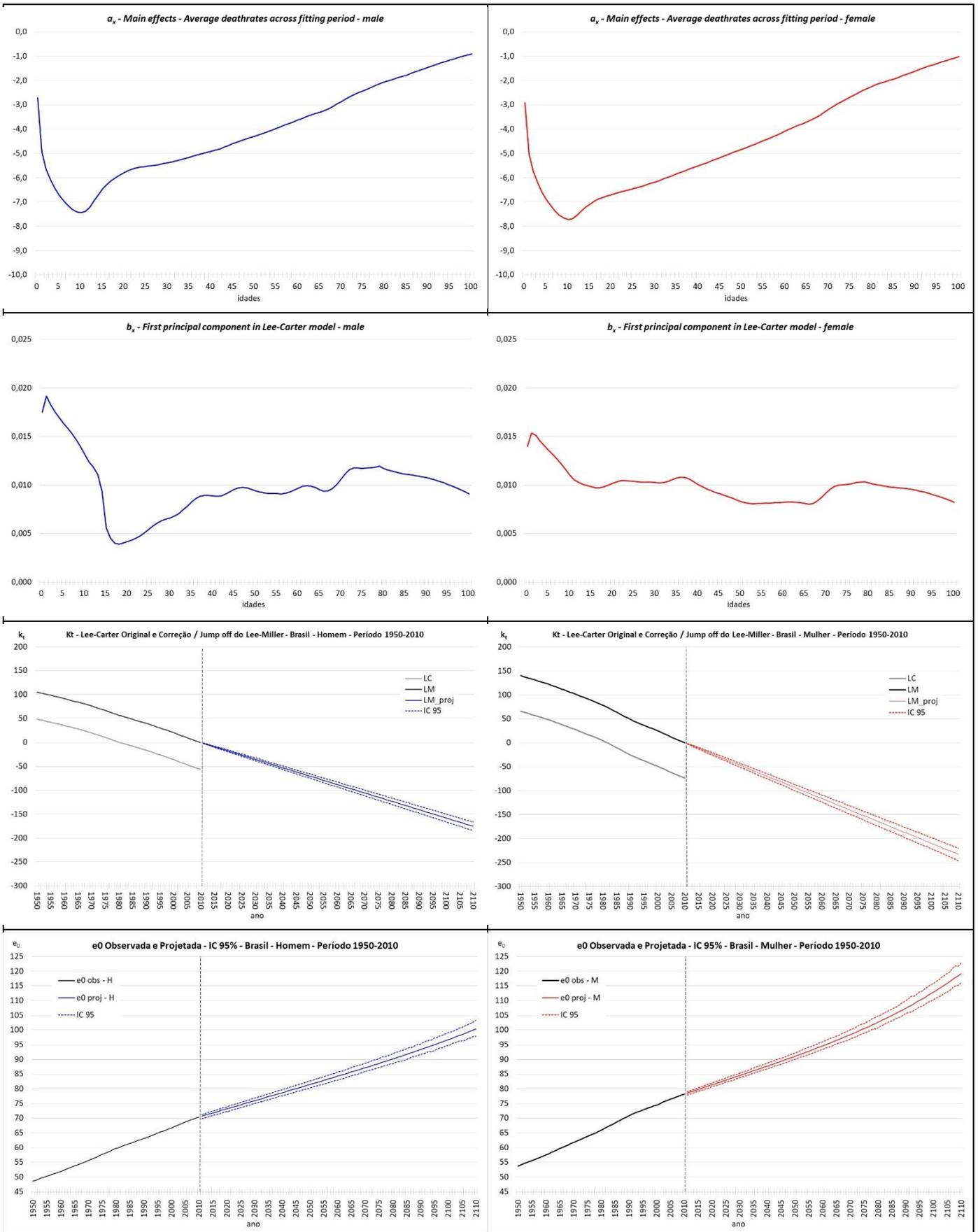
Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

O *Painel 5* de gráficos apresenta, em suas quatro linhas, e na seguinte ordem, as variáveis do modelo LM: 1)  $a_x$  (*main effects*), 2)  $b_x$  (*interaction*), 3)  $k_t$  (nível) e 4)  $e_0$ . A coluna da esquerda no painel apresenta os resultados dos homens, enquanto a da direita, os das mulheres.

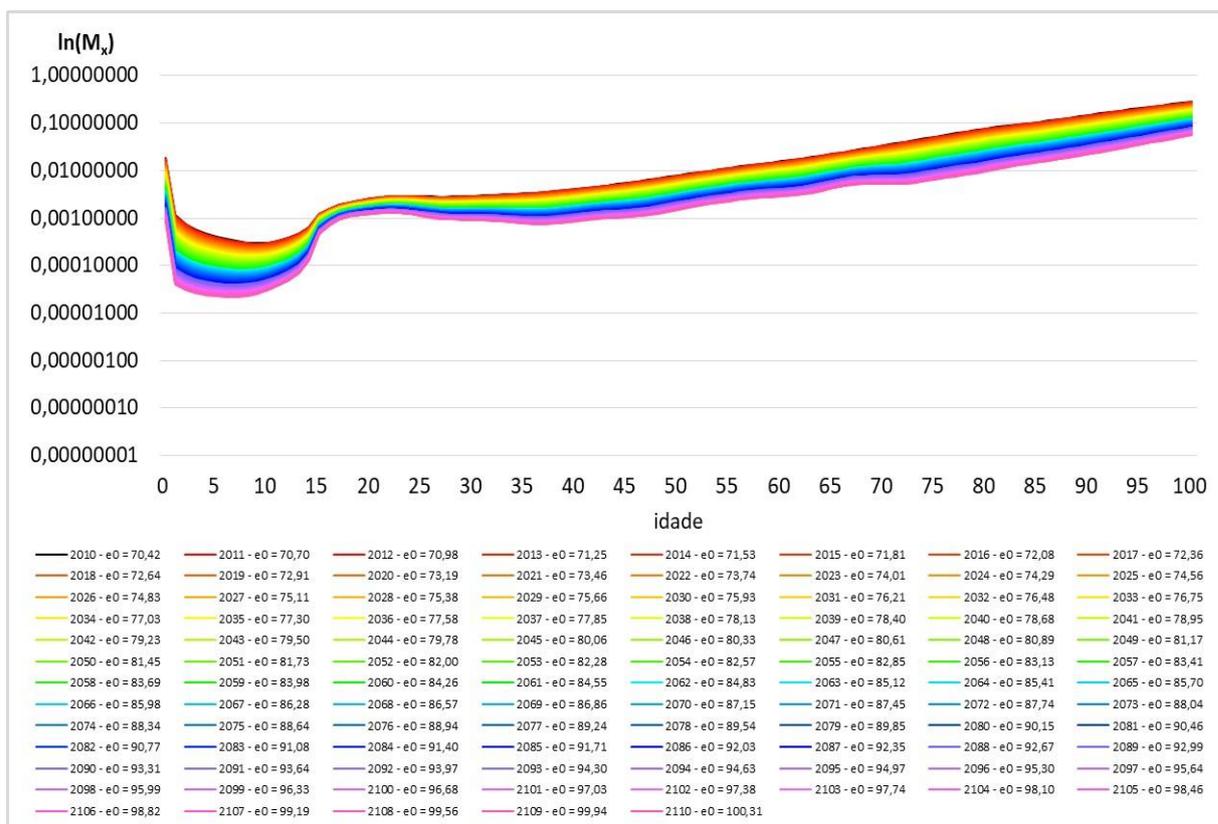
Analisando os resultados dos  $a_x$ 's (1ª linha do painel), percebem-se padrões médios semelhantes nas curvas calculadas, com uma proeminência maior do *accident hump* para a população masculina *vis-à-vis* à feminina, como era esperado. Em relação ao  $b_x$  do modelo (2ª linha do painel), que determina como as taxas irão variar ao longo do horizonte da projeção, percebe-se, claramente, que a mortalidade infantil e de crianças, dos homens, irá variar proporcionalmente (no caso decrescer) mais do que a das mulheres, situação essa que se inverte, quando levamos em consideração as idades de 15-35 anos, onde as causas externas de mortalidade atuam, de forma mais incisiva, sobre a população masculina. Para as idades acima dos 35 anos, a variabilidade expressa pelas curvas de  $b_x$  tende a ser mais próxima entre os sexos. Em relação ao  $k_t$ , que determina o nível da mortalidade ao longo do tempo (3ª linha do painel), observa-se a curva feminina numa posição bem superior à masculina, em relação aos dados históricos de 1950-2010, situação essa que vai se invertendo ao longo do horizonte da projeção até o ano de 2110. Na última linha do painel são apresentados os gráficos da projeção da expectativa de vida ao nascer –  $e_0$  (4ª linha do painel). Aqui fica clara a divergência retratada na literatura, quando se projeta, de forma independente, a mortalidade de homens e mulheres. Quanto mais distante do ano-base da projeção, maior a divergência ou diferença entre as curvas de mulheres e homens. O método prevê que, em 2110, as mulheres brasileiras (caso as condições de mortalidade projetadas se fizessem verificar no futuro para todas as idades consideradas ao longo do *age span*) viveriam, em média, até os 119,16 anos, numa banda de confiança (95%) entre 116,03 e 122,72 anos. Já para os homens brasileiros, a  $e_0$  projetada para 2110 seria de 100,31 anos, numa banda de confiança (95%), entre 97,91 e 103,27 anos. Nesse cenário, o *gap* de  $e_0$  entre homens e mulheres passaria de 7,78 anos, em 2010, para 18,84 anos, em 2110, deixando bem nítida a divergência ocorrida.

O *Gráfico 23* e o *Gráfico 24* apresentam as  $M_x$ 's projetadas pelo método LM, no horizonte de 2011-2110, para homens e mulheres, respectivamente. O mínimo da escala do eixo de y está como uma morte a cada 100 milhões de pessoas, apenas, para a comparação, em mesma escala, com os resultados das projeções pelo método coerente de Hyndman, que será apresentado na próxima seção, e que resultou em baixíssimas  $M_x$ 's projetadas nas idades infantis, notadamente nos anos mais distantes do início da projeção.

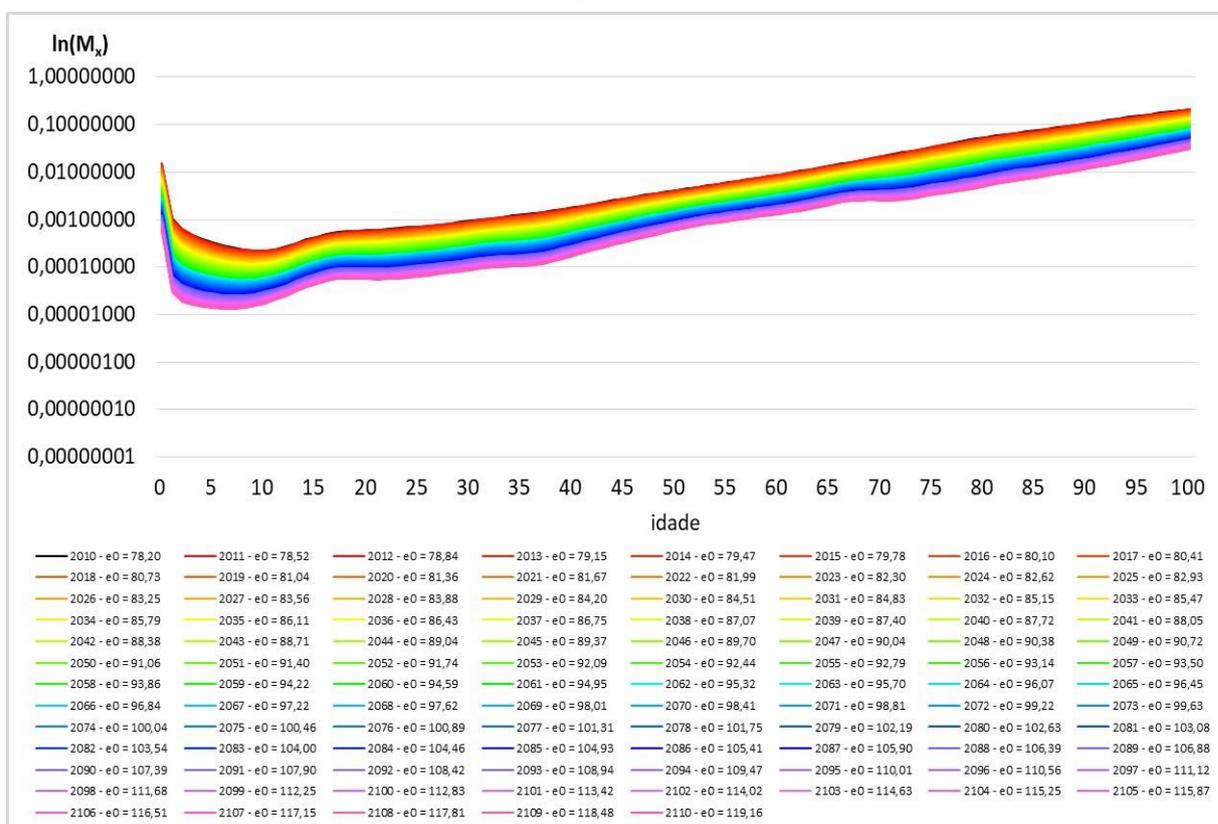
Painel 5 – Brasil – Resultados método LM – Homem e Mulher



Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 23 – Brasil –  $M_x$ 's Projetadas método Lee-Miller – Homem

Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 24 – Brasil –  $M_x$ 's Projetadas método Lee-Miller – Mulher

Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Apesar dos gráficos das  $M_x$ 's projetadas pelo método LM mostrarem padrões futuros das curvas que aparentemente seriam razoáveis no contexto de 100 anos de projeção, principalmente no caso das mulheres, o nível geral da mortalidade (dado por  $e_0$ ) mostrou-se extremamente alto e inaceitável para o Brasil. Aqui merece destacar que a mulher mais longeva de toda história da humanidade foi a Francesa Jeanne Calment, que viveu até os 122,45 anos, enquanto que o homem mais longevo foi o japonês Jiroemon Kimura, que viveu até os 115,69 anos. Fazendo uma comparação, *grosso modo*, com os resultados das projeções do método LM para o Brasil, em 2110, isso significaria dizer que a madame Calment estaria no limite superior da banda de confiança para as mulheres brasileiras, enquanto que o sr. Kimura estaria 12 anos acima do limite superior da banda de confiança para os homens. O *gap* de idades entre a mulher mais longeva e o homem mais longevo do mundo foi de 6,76 anos, enquanto que o *gap* entre as  $e_0$  de mulheres e homens no Brasil, em 2110, considerando a projeção pelo método LM, resultaria em 18,84 anos, praticamente três vezes maior.

Apenas para ilustrar, a *Tabela 7* resume os feitos de madame Calment e do sr. Kimura:

Tabela 7 – Pessoas mais longevas em toda a história da humanidade

Nome	Sexo	País	Anos	Dias	Data de Nascimento	Data de Morte
Jeanne Louise Calment	Feminino	França	122	164	21/02/1875	04/08/1997
Jiroemon Kimura	Masculino	Japão	115	253	19/04/1897	17/12/2012

Fonte: <http://www.guinnessworldrecords.com>

### 5.3.2) Projeção da Mortalidade pelo método coerente de Hyndman (COE)

Antes do início do exercício das projeções conduzido nesta tese, acreditava-se que o método coerente produto-razão de Hyndman resolveria os problemas de divergência da  $e_0$  projetada de homens e mulheres, inerentes às projeções de longo prazo, com paulatina redução no *gap* de  $e_0$  ao longo do horizonte da projeção.

Com isso, aplicou-se o referido método coerente à matriz de  $M_x$ 's de homens e mulheres no Brasil, para o período-base de 1950-2010, onde os resultados obtidos demonstraram a convergência das  $e_0$ 's por sexo, ao longo dos anos projetados. A diferença entre a  $e_0$  feminina e a masculina passou de 7,78 anos em 2010, para 2,25 anos em 2110. Todavia, infelizmente, o padrão resultante das curvas de mortalidade de homens e mulheres para os anos mais distantes do início da projeção mostrou-se extremamente implausível. No limite, em 2110, as taxas de mortalidade infantil e de crianças resultaram em valores extremamente baixos e implausíveis, sem contar o advento de um improvável *double hump* (entre as idades de 6-12 e 15-35 anos).

Conforme já explicitado no capítulo 4, o método de Hyndman e colegas utiliza até a 6ª componente principal funcional, na tentativa de melhor explicar a variabilidade observada na matriz temporal das taxas de mortalidade. A *Tabela 8*, a seguir, apresenta a proporção da variabilidade dos dados explicada por cada uma das seis componentes principais funcionais do método COE, para a função-produto e função-razão. Por exemplo, as três primeiras componentes principais da função-produto conseguem explicar 99,99% da variabilidade dos dados, enquanto que para a função-razão, esse percentual é de 99,94%.

Tabela 8 – Proporção da Variabilidade dos dados explicada por componente principal – Funções Produto e Razão – modelo COE

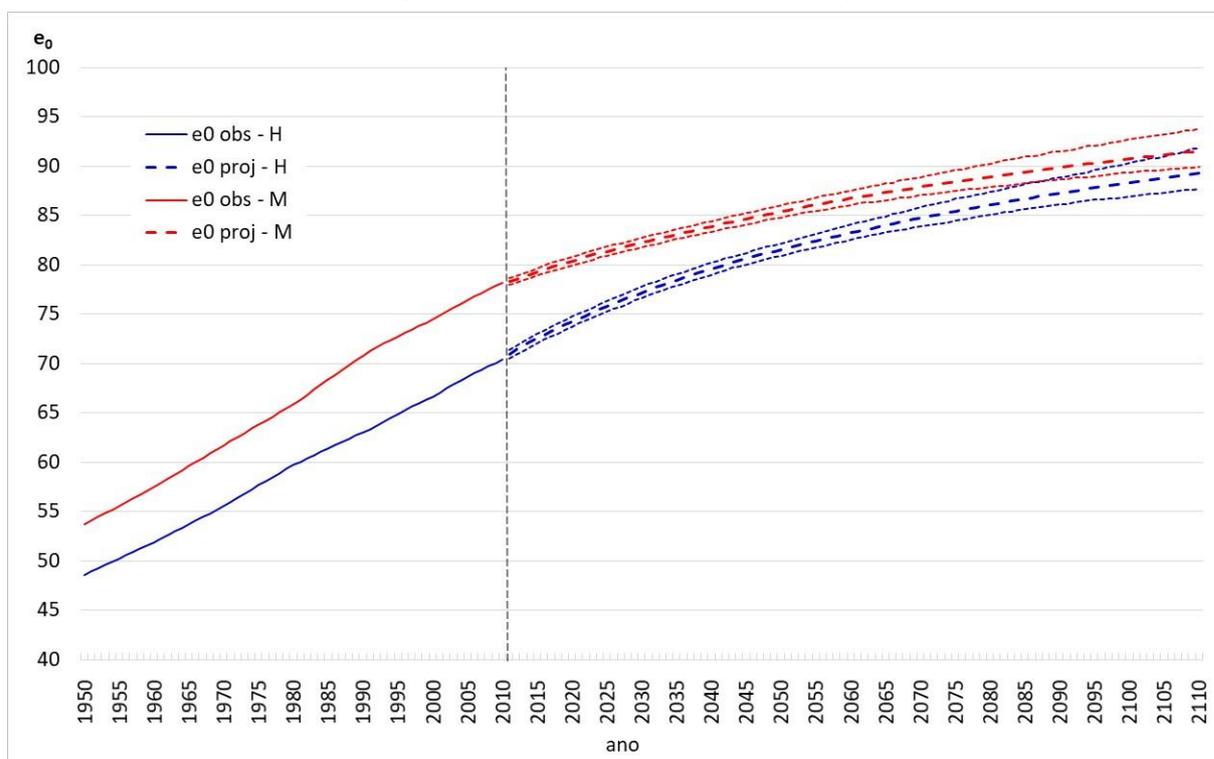
FUNÇÃO PRODUTO			FUNÇÃO RAZÃO		
Componente	VAR PROP	ACUM.	Componente	VAR PROP	ACUM.
$f_1(x)$	98,76%	98,76%	$y_1(x)$	98,26%	98,26%
$f_2(x)$	0,88%	99,64%	$y_2(x)$	1,04%	99,30%
$f_3(x)$	0,35%	99,99%	$y_3(x)$	0,64%	99,94%
$f_4(x)$	0,01%	100,00%	$y_4(x)$	0,05%	99,99%
$f_5(x)$	0,00%	100,00%	$y_5(x)$	0,01%	100,00%
$f_6(x)$	0,00%	100,00%	$y_6(x)$	0,00%	100,00%
<b>TOTAL</b>	<b>100,00%</b>		<b>TOTAL</b>	<b>100,00%</b>	

Fonte: IBGE, *Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970*

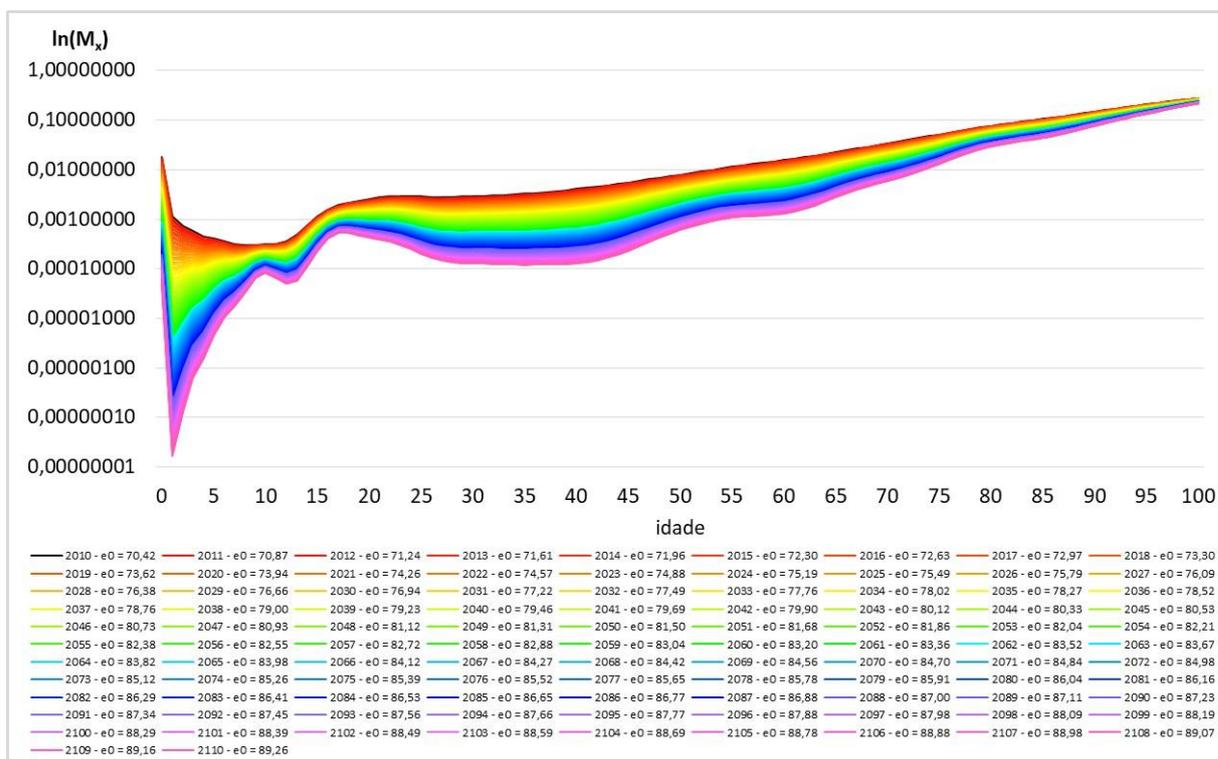
A seguir, são apresentados três gráficos. O *Gráfico 25* ilustra os resultados não-divergentes obtidos para a projeção da  $e_0$ , por sexo, no Brasil. No ano de 2088, ocorre o *crossover* entre o limite superior da banda de confiança masculina e o limite inferior da banda de confiança feminina, deixando nítida a convergência entre as  $e_0$  no longo prazo. O *Gráfico 26* e o *Gráfico 27* ilustram os resultados das  $M_x$ 's projetadas, para homens e mulheres, respectivamente, que resultaram nas  $e_0$  apresentadas do *Gráfico 25*. Aqui fica bem clara a implausibilidade do padrão das curvas de mortalidade resultantes. Quanto mais distante o ano projetado, em relação ao ano-base da projeção, 2010, mais implausível é o padrão da curva de mortalidade.

Para finalizar essa seção, são apresentados o *Painel 6* e o *Painel 7* de gráficos, sendo o primeiro referente à função-produto e o segundo, à função-razão, do método de Hyndman. Os painéis mostram os resultados para a função  $a_x$  (*main effects*), além dos valores das três primeiras componentes principais funcionais do modelo e seus respectivos coeficientes (*scores*). A interpretação dos visuais gráficos é mais complexa do que a do método LM, visto que, além de ser mostrada a relação entre as  $M_x$ 's de homens e mulheres (o produto e a razão), ao invés da própria  $M_x$ , são apresentadas também as três primeiras componentes principais funcionais. Por exemplo, o  $a_x$  da função-produto representa, claramente, o padrão clássico de uma curva de mortalidade, enquanto que o  $a_x$  da função-razão mostra a sobremortalidade masculina.

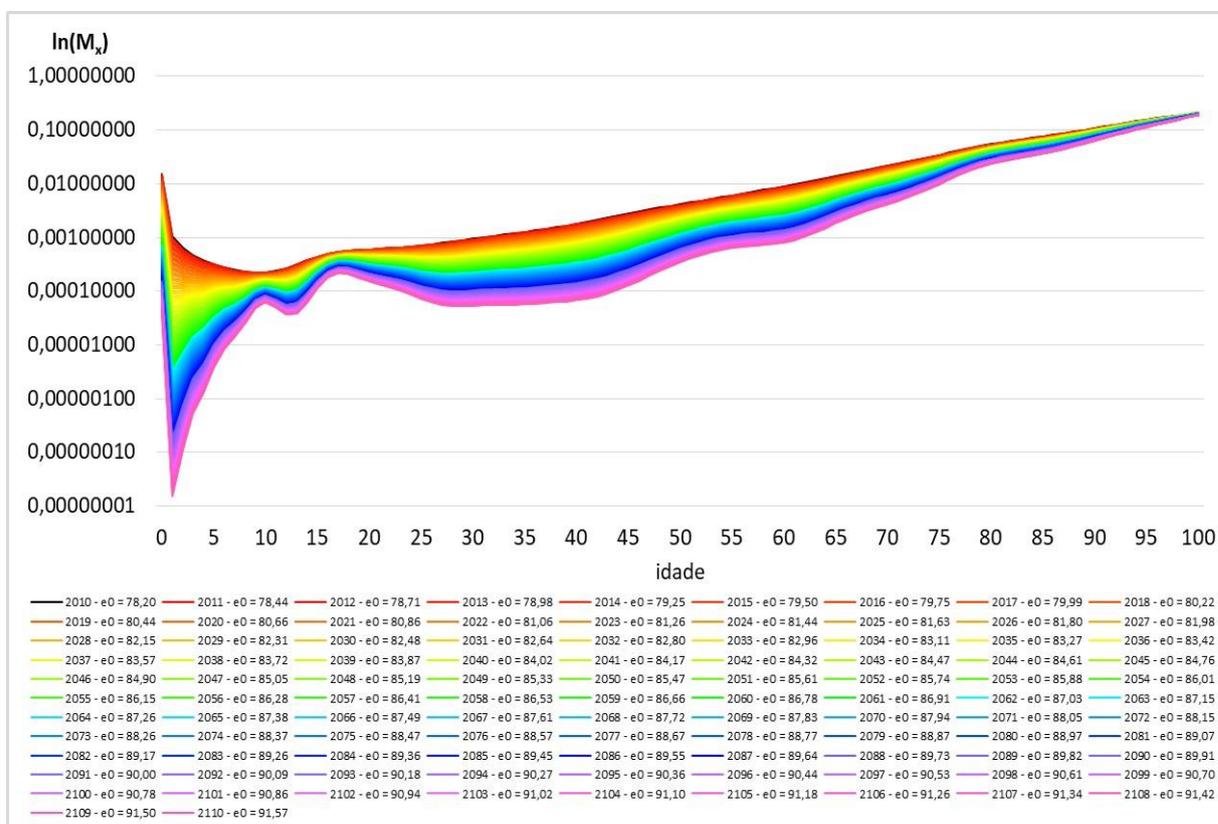
Gráfico 25 – Brasil –  $e_0$ 's Projetadas IC95 – método coerente Hyndman – Homem e Mulher



Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

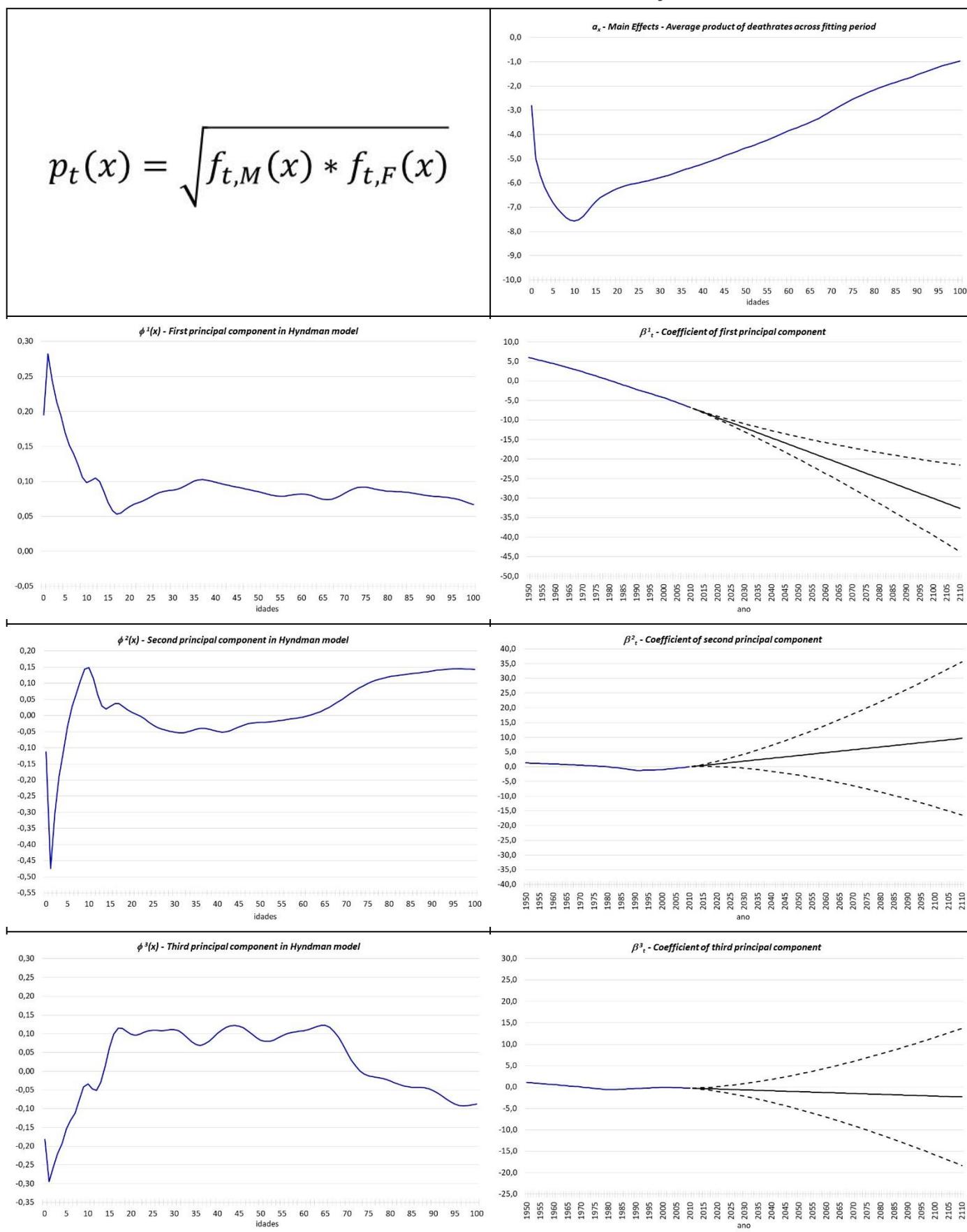
Gráfico 26 – Brasil –  $M_x$ 's Projetadas método coerente Hyndman – Homem

Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 27 – Brasil –  $M_x$ 's Projetadas método coerente Hyndman – Mulher

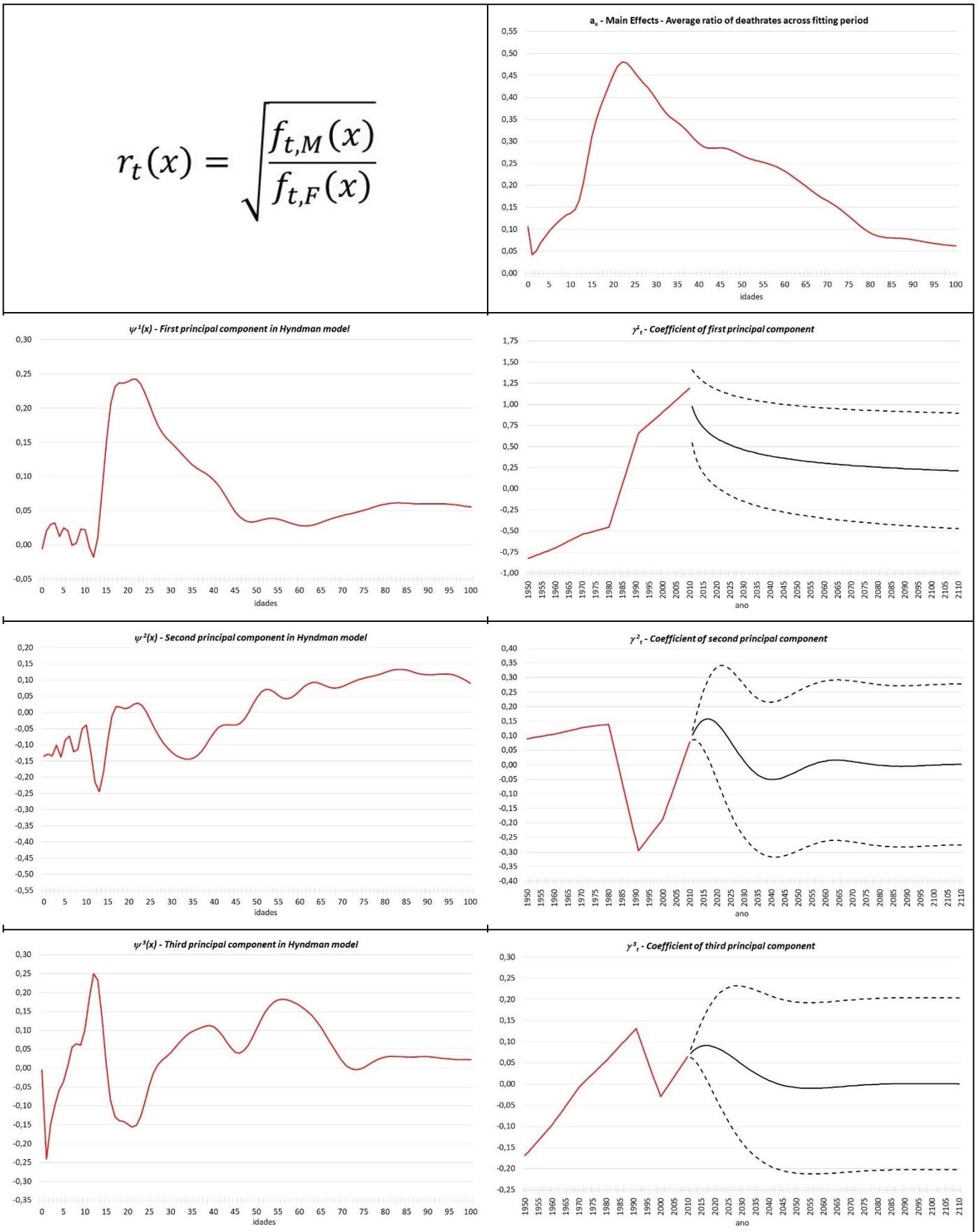
Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

## Painel 6 – Brasil – Resultados método COE – Função Produto



Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Painel 7 – Brasil – Resultados método COE – Função Razão



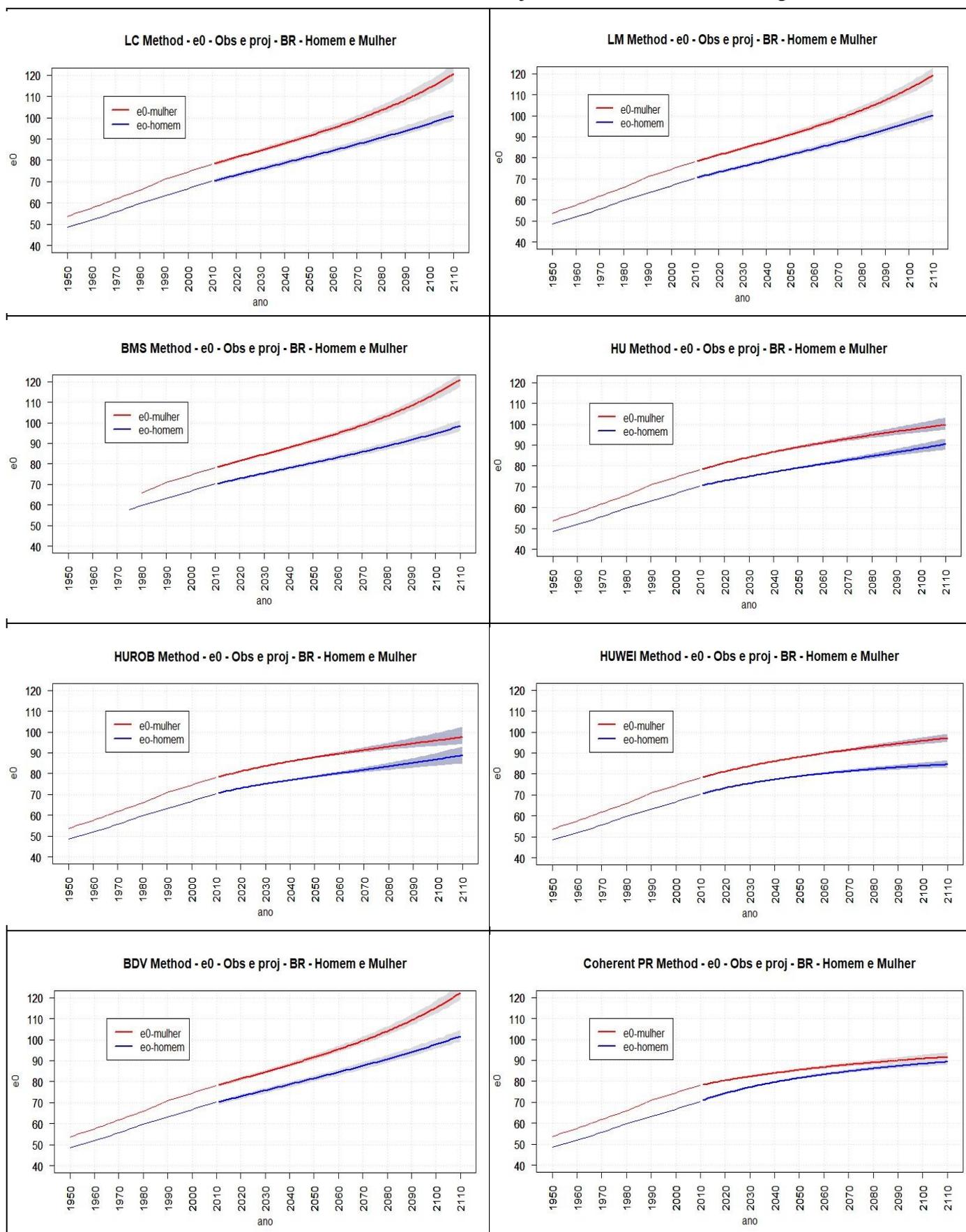
Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

#### 5.4) Projeção da Mortalidade por diferentes metodologias para o Brasil

Não querendo tornar o assunto repetitivo, mas atento à riqueza da gama de resultados obtidos nos exercícios de projeção da mortalidade executados, a ideia nessa seção é apresentar um resumo geral dos níveis e padrões das taxas de mortalidade projetadas, para homens e mulheres no Brasil, até 2110, em função da matriz das  $M_x$ 's de 1950-2010, para as oito metodologias diferentes de projeção da mortalidade já testadas na seção 5.2, ou seja: 1) Lee & Carter (1992) - LC, 2) Lee & Miller (2001) - LM, 3) Booth, Maindonald, & Smith (2002) - BMS, 4) Hyndman & Ullah (2007) – HU e sua versão robusta – 5)  $HU^{rob}$ , 6) Hyndman & Shang (2009) -  $HU^{wei}$ , 7) Brouhns, Denuit, & Vermunt (2002) - BDV e 8) Hyndman, Booth & Yasmineen (2013) – COE.

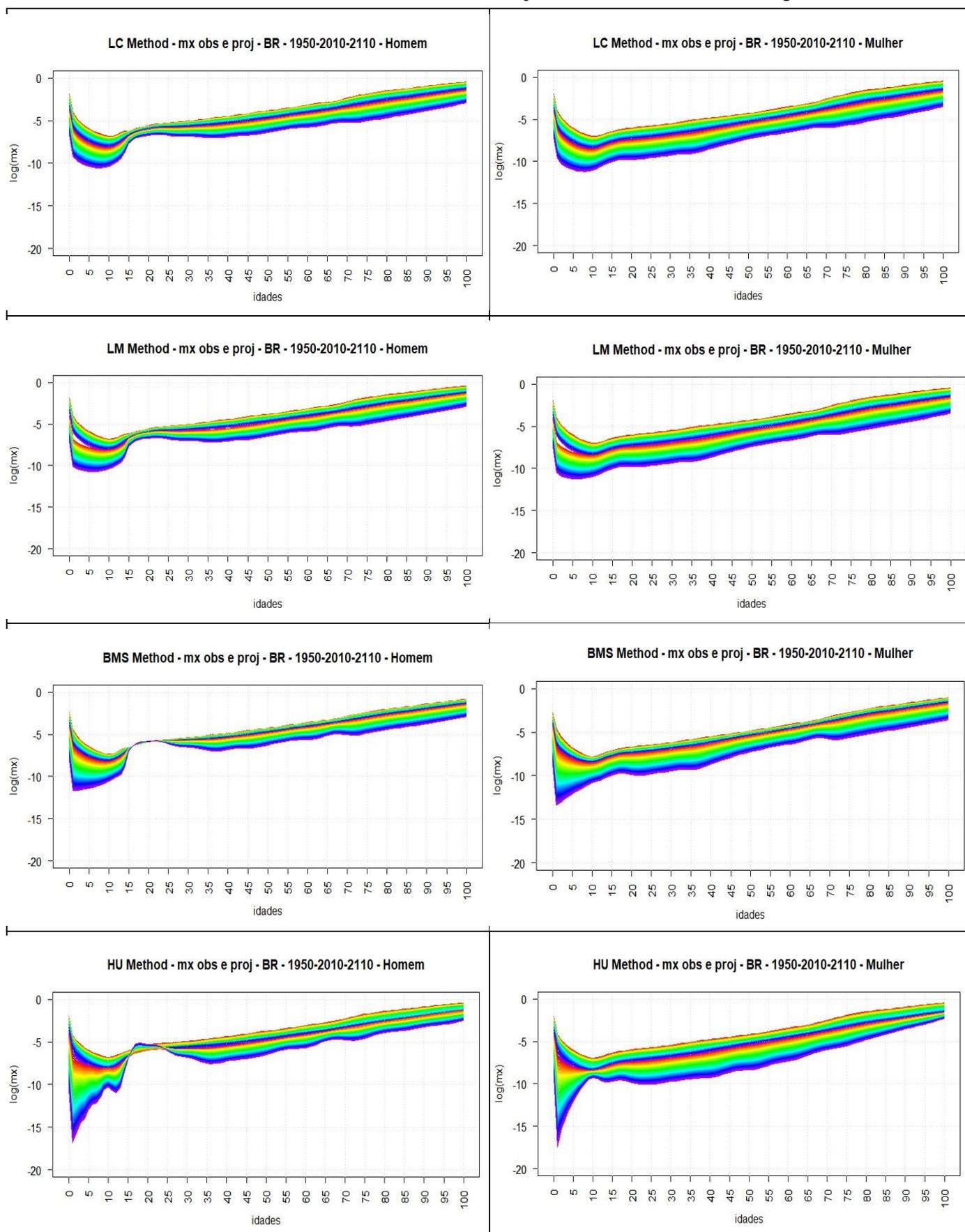
Foram construídos nesta seção mais dois painéis de gráficos. O *Painel 8* apresenta as  $e_0$ 's observadas no período de 1950-2010 e as projetadas no horizonte de 2011-2110, considerando cada uma das oito metodologias acima elencadas. Cada gráfico contempla os resultados de homens e mulheres e seus respectivos intervalos de confiança, de 95%. Pela análise dos referidos gráficos, fica claro que, no longo prazo, todos os métodos conduzem a resultados divergentes de  $e_0$ 's, uns em maior, outros em menor escala, exceto o COE, onde as  $e_0$ 's projetadas de homens e mulheres são convergentes ao longo da projeção (não-divergentes, com diminuição paulatina do *gap* ao longo do tempo).

O *Painel 9* apresenta, em cada linha, os gráficos com as  $M_x$ 's observadas no período 1950-2010 e as projeções 2011-2110, para cada uma das oito metodologias citadas. A primeira coluna do painel mostra os resultados para os homens, enquanto que a segunda coluna, para as mulheres, o que facilita a comparação dos diferenciais de nível entre as curvas, com as mulheres em nível sempre abaixo. Aqui, é possível perceber que os padrões das curvas projetadas pelos métodos LC, LM e BDV podem ser plausíveis, tanto para as mulheres quanto para os homens, situação essa não ocorrida com nenhum dos outros métodos aqui testados, notadamente para as curvas mais distantes do ano-base da projeção, 2010.

Painel 8 – Brasil –  $e_0$ 's Observadas e Projetadas – Diversas Metodologias

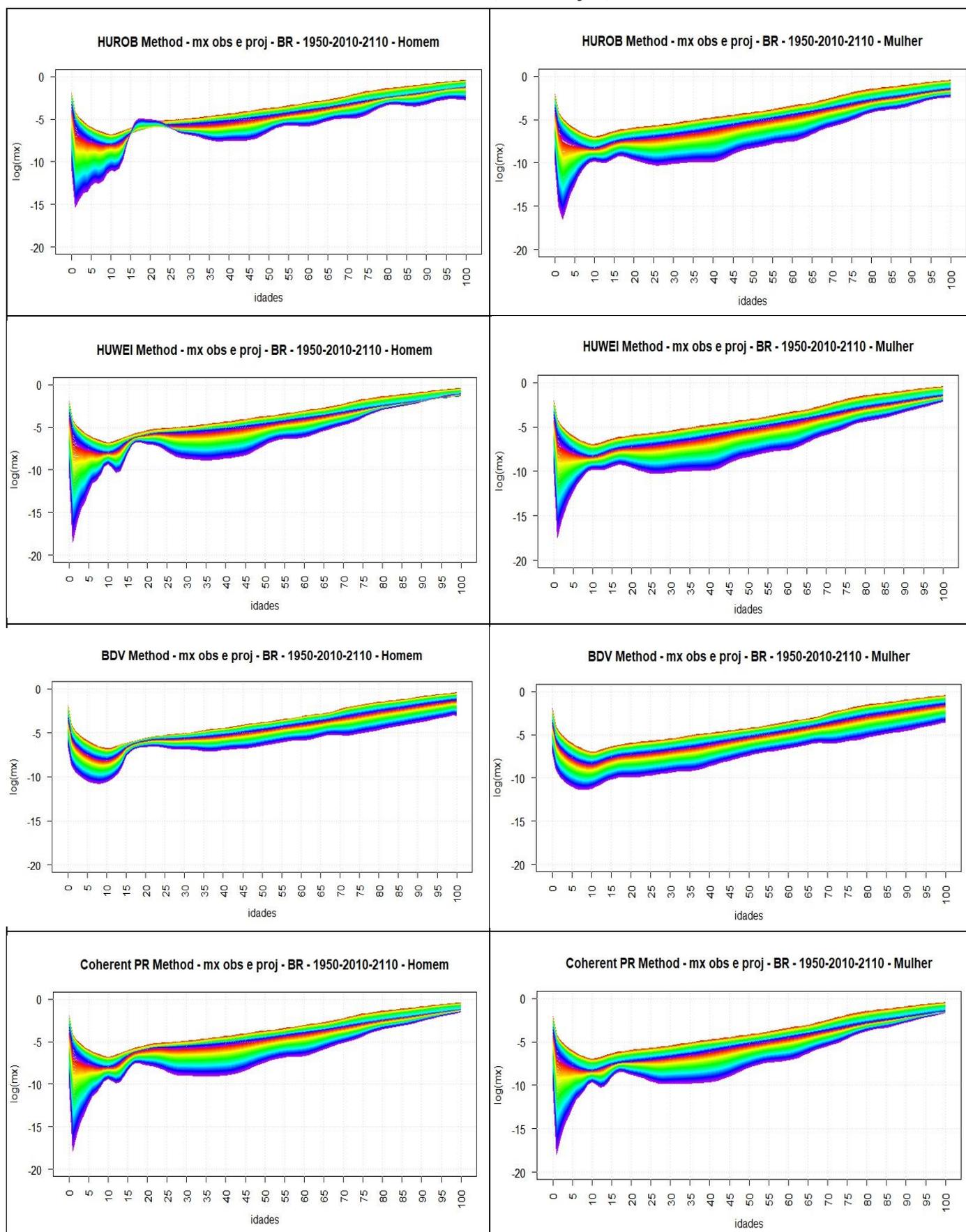
Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Painel 9 – Brasil –  $M_x$ 's Observadas e Projetadas – Diversas Metodologias



Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

## Painel anterior (continuação)



Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

### 5.5) Diferenciais de Nível ( $e_0$ ) e Padrão da Mortalidade Projetada para o Brasil, por metodologia

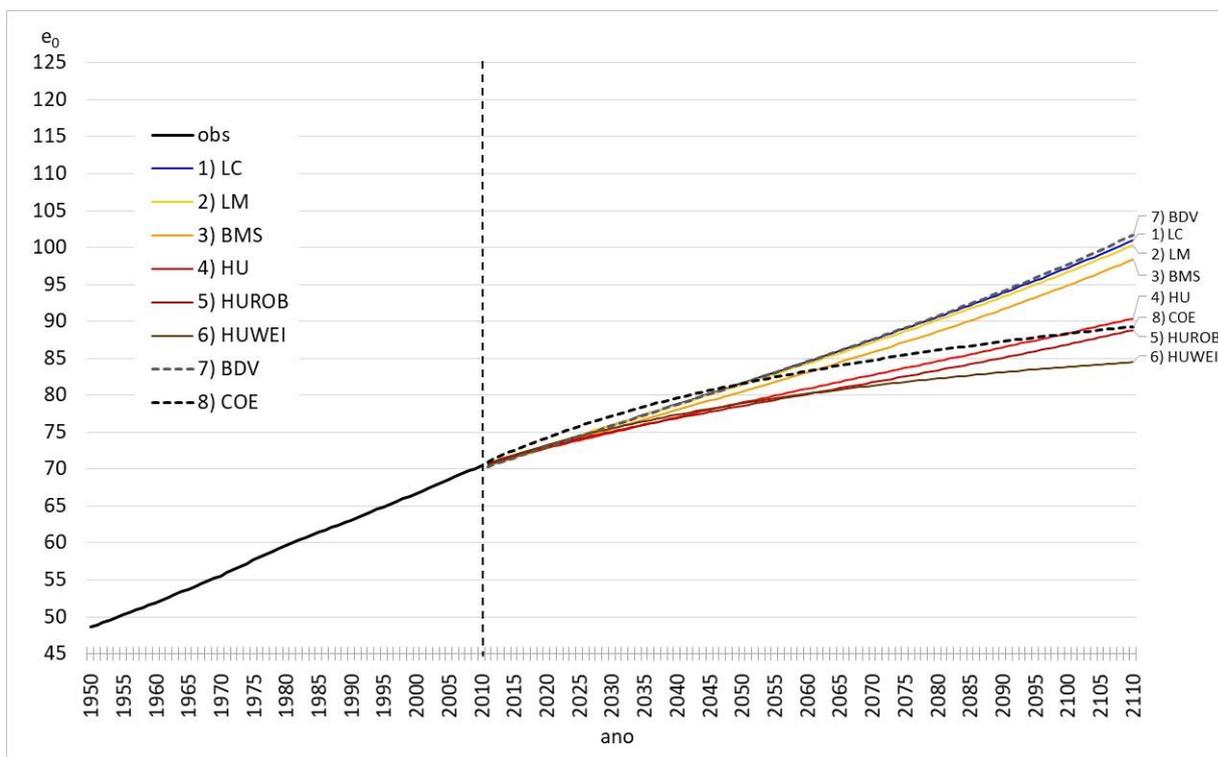
Tal qual ocorre quando utilizamos diferentes períodos-base para uma mesma metodologia, a aplicação de diferentes métodos de projeção para um mesmo período-base resulta, normalmente, em diferentes níveis e padrões de mortalidade futura projetada. Essa seção tem, como objetivo, apresentar uma comparação dos níveis e padrões resultantes da aplicação das oito metodologias elencadas na seção anterior, mas, agora, com alguns resultados condensados em forma de tabela e alguns gráficos, para efeito de comparação visual direta.

A *Tabela 9* apresenta a  $e_0$  projetada para homens e mulheres no Brasil, no último ano da projeção, 2110, para os métodos testados. Na sequência são apresentados o *Gráfico 28* e o *Gráfico 29*, com as  $e_0$ 's observadas, de 1950-2010, e as projeções de 2011-2110, para os diferentes métodos, para homens e mulheres, respectivamente. A *Tabela 9* apresenta o *ranking* dos métodos, ordenado da maior para a menor  $e_0$  em 2110. Em linhas gerais, o ordenamento do *ranking* masculino é bem parecido com o feminino, com algumas mudanças ou inversões de posições para homens e mulheres, para determinados métodos. Os métodos teoricamente menos complexos, como LC, LM, BDV e BMS, foram aqueles que resultaram nas maiores  $e_0$ 's. Os métodos que utilizam a análise de componentes principais funcionais HU, HU<sup>ROB</sup>, HU<sup>WEI</sup> e COE resultaram nas menores  $e_0$ 's. A amplitude, entre a maior e a menor  $e_0$ , foi de 17,19 anos, para homens, e 30,67, para mulheres, quase o dobro.

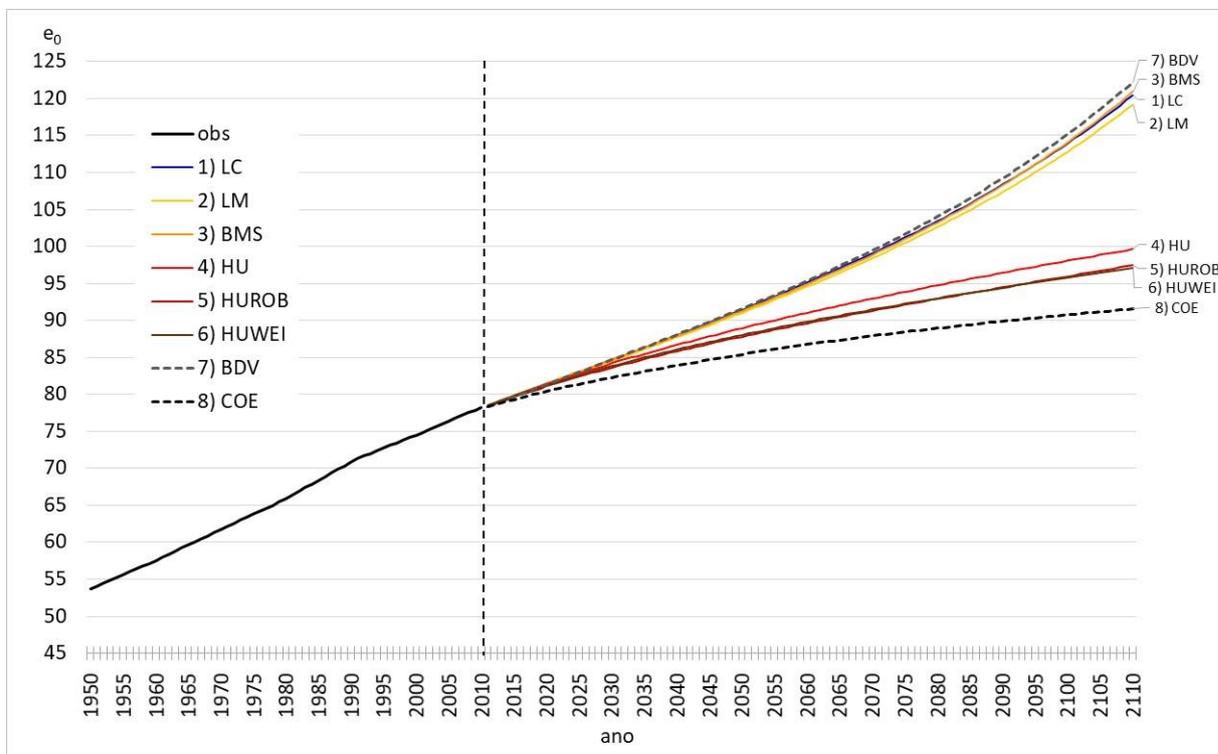
Tabela 9 – Brasil –  $e_0$ 's projetadas para 2110 por diversos métodos – Homem e Mulher

MÉTODO	$e_0$ – HOMEM (em anos)	MÉTODO	$e_0$ - MULHER (em anos)
7) BDV	101,69	7) BDV	122,22
1) LC	100,96	3) BMS	120,91
2) LM	100,31	1) LC	120,45
3) BMS	98,40	2) LM	119,16
4) HU	90,38	4) HU	99,65
8) COE	89,31	5) HU <sup>ROB</sup>	97,46
5) HU <sup>ROB</sup>	88,85	6) HU <sup>WEI</sup>	97,07
6) HU <sup>WEI</sup>	84,50	8) COE	91,55
<b>Média</b>	<b>94,30</b>	<b>Média</b>	<b>108,56</b>
<b>Mediana</b>	<b>94,39</b>	<b>Mediana</b>	<b>109,40</b>
<b>Desvio Padrão</b>	<b>6,74</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>13,18</b>
<b>Amplitude</b>	<b>17,19</b>	<b>Amplitude</b>	<b>30,67</b>

Fonte: IBGE, *Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970*

Gráfico 28 – Brasil –  $e_0$ 's Obs. 1950-2010 e Proj. 2011-2110 – Diversas Metodologias – Homem

Fonte: IBGE, *Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970*

Gráfico 29 – Brasil –  $e_0$ 's Obs. 1950-2010 e Proj. 2011-2110 – Diversas Metodologias – Mulher

Fonte: IBGE, *Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970*

Para finalizar essa seção, o *Painel 10* apresenta os gráficos das taxas específicas de mortalidade projetadas para os anos de 2035 (25 anos após o ano-base), 2050 (40 anos após ano-base), 2075 (65 anos após o ano-base) e 2110 (100 anos após o ano-base), para cada uma das oito metodologias citadas. A primeira coluna no painel apresenta os resultados para os homens, enquanto que a segunda coluna, para as mulheres.

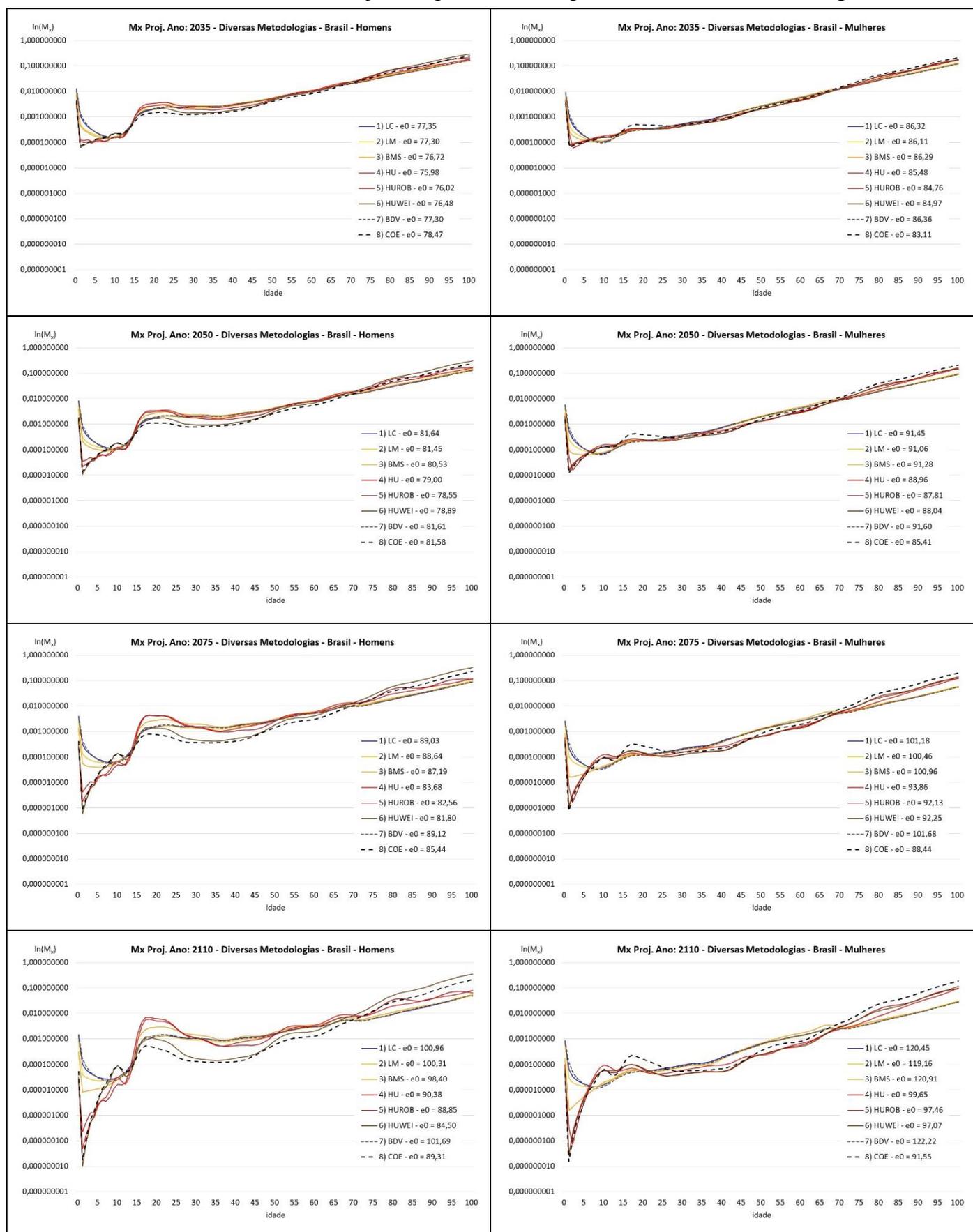
Em linhas gerais, quanto mais o tempo avança a partir do ano-base de 2010, mais as curvas projetadas pelos diferentes métodos tendem a divergir entre si, exceto para os métodos LC, LM e BDV, que resultam em curvas muito próximas, mesmo no último ano da projeção, 2110. Essa convergência de resultados no caso desses três métodos em específico já era esperada, visto que são pequenas as diferenças metodológicas entre os mesmos. Para facilitar a comparabilidade, vamos convencionar chamar, neste tópico, as curvas LC, LM e BDV, de curvas ou modelos Lee-Carter. Indo na mesma toada, os métodos independentes que utilizam Análise de Componentes Principais Funcionais, a partir da proposta inicial de Hyndman & Ullah (2007), ou seja, HU, HU<sup>rob</sup> e HUwei, vamos chamar de curvas ou métodos HU's.

No ano de 2035, todas as oito curvas de mortalidade da população masculina ainda se encontrariam próximas umas das outras, nas idades acima dos 5 anos. Para as idades de 0-5 anos, os métodos HU's e COE já apresentariam  $M_x$ 's bem menores do que aquelas geradas pelos outros métodos. No caso da população feminina, os resultados são similares aos dos homens, sendo suas curvas mais próximas nas idades acima dos 5 anos. Para as idades de 0-5 anos, os métodos HU's e COE também resultariam em menores  $M_x$ 's, quando comparadas aos outros métodos.

No ano de 2050, aumentaria a divergência entre as curvas Lee-Carter e as dos outros métodos aplicados à população masculina, em todas as idades, sendo que os métodos HU's e COE resultariam em  $M_x$ 's bem menores do que as geradas pelos outros métodos, para idades até 5 anos. No caso das mulheres, as curvas a partir dos 5 anos de idade ainda se encontrariam próximas umas das outras, sendo que os métodos HU's e COE resultariam em  $M_x$ 's até os 5 anos de idade, inferiores às outras metodologias.

Para os anos de 2075 e 2110, excessão feita às curvas Lee-Carter, todas as outras metodologias resultam em  $M_x$ 's divergentes entre si, para todas as idades, para os homens e, em menor intensidade, para as mulheres.

### Painel 10 – Brasil – $M_x$ Projetadas para um ano específico – Diversas Metodologias



Fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

## **5.6) Análise de Múltiplo-Decremento nas Tábuas Masculinas de 1991, 2000 e 2010, para a projeção da mortalidade no Brasil**

Dos resultados obtidos nos exercícios de projeção conduzidos até esta etapa, o que se mostrou mais razoável e promissor foi o da projeção da expectativa de vida ao nascer pelo método coerente de Hyndman, mas, infelizmente, o padrão das curvas projetadas para os anos mais distantes de 2010 mostrou-se improvável.

Como tentativa de melhorar o padrão resultante da mortalidade projetada pelo método de Hyndman et al. (2013), foram realizados testes de múltiplo-decremento na mortalidade masculina (ver Preston et al., 2001, cap. 4, Siegel & Swanson, 2004, cap. 13) no que concerne às causas externas de mortalidade no Brasil, para os anos censitários de 1991, 2000 e 2010.

As tábuas de mortalidade para 1991, 2000 e 2010 foram reconstruídas considerando duas hipóteses básicas: 1) que os óbitos masculinos não ocorreriam mais pelas causas externas de mortalidade, mas por todas as outras causas; e 2) que a mortalidade masculina por causas externas seria distribuída tal qual a feminina, nos mesmos anos-calendários específicos.

Obviamente a segunda hipótese é bem menos forte do que a primeira, visto que a mortalidade feminina por causas externas no Brasil, em virtude da sua considerável magnitude, não pode ser negligenciada, como perceberemos nos gráficos a seguir. Esse tipo de alteração na tábua masculina aumentará a expectativa de vida em diversas idades, inclusive ao nascimento ( $e_0$ ), que representa um indicador do nível geral de mortalidade na população. Isso ocorre porque, em virtude das alterações aqui sugeridas, grande parte dos óbitos ocorridos dos 15 aos 39 anos se deslocará para idades acima dos 40 anos.

Para o exercício de múltiplo-decremento para o Brasil, foram coletados os microdados dos óbitos, por sexo e idade, oriundos do SIM/DATASUS/MS. São disponibilizadas diversas informações nos referidos microdados, dentre elas a “causa do óbito”. Para evitar possíveis flutuações anuais que podem ocorrer em determinados anos específicos nos dados por idade simples, optou-se, ao invés de trabalhar com os dados pontuais dos anos de 1991, 2000 e 2010, tomar a média para os triênios 1990-1991-1992, 1999-2000-2001 e 2009-2010-2011, suavizando assim a informação dos óbitos. Como as causas de morte das informações do primeiro triênio são classificadas segundo a antiga CID-9, foi feita uma compatibilização das mesmas para a atual CID-10, utilizada nos dois triênios subsequentes. Depois da compatibilização das causas de morte de todos os anos utilizados no estudo, foi criada uma

variável *dummy* no banco de dados, indicando “0”, quando a morte não foi causada por causa externa, e “1”, quando a morte foi resultante de causa externa. Os óbitos por idade simples foram agrupados por grupos quinquenais (0-4, 5-9, 10-14,....., 90-94, 95-99, 100+) e os casos omissos de idade e/ou sexo, distribuídos de forma proporcional, segundo à distribuição estatística observada naquele ano. Importante ressaltar que foi identificada, no decorrer do estudo, uma significativa melhoria na qualidade dos dados do SIM, com cada vez menos casos omissos ao longo do tempo, situação esta observada principalmente desde da virada do século XX.

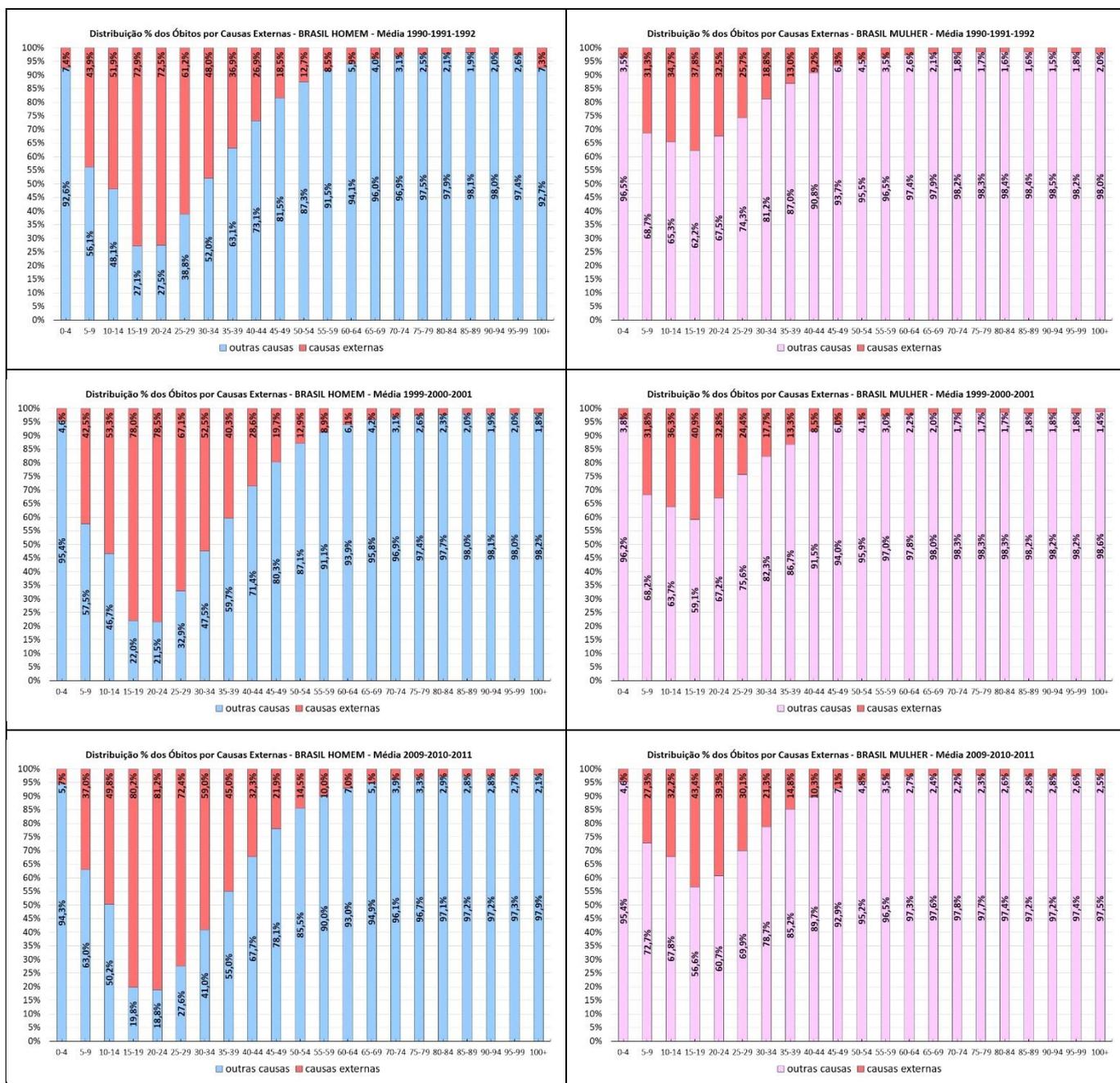
Para ilustrar um pouco mais a questão da severidade das causas externas de mortalidade no Brasil, claramente já percebida no calombo (*accident hump*) observado nas curvas de mortalidade apresentadas anteriormente, notadamente para a população masculina, o Painel II de gráficos apresenta, para cada um dos triênios e grupo etário quinquenal, a distribuição % dos óbitos por causas externas de mortalidade. A primeira coluna do painel apresenta as informações para os homens e a segunda, para as mulheres. Para resumir um pouco a análise, vamos nos restringir aos grupos etários quinquenais de 15-34 anos, onde a mortalidade por causas externas atua com mais força.

Tomando, como exemplo, a população masculina, no primeiro triênio 1990-1991-1992 os percentuais de mortes por causas externas foram: 15-19 (72,9%), 20-24 (72,5%), 25-29 (61,2%) e 30-34 (48,0%). No segundo triênio, 1999-2000-2001: 15-19 (78,0%), 20-24 (78,5%), 25-29 (67,1%) e 30-34 (52,5%). No terceiro triênio, 2009-2010-2011: 15-19 (80,2%), 20-24 (81,2%), 25-29 (72,4%) e 30-34 (59,0%). Percebe-se um contínuo aumento do peso das causas externas para os homens, comparando os três triênios selecionados

No caso da população feminina, o peso das causas externas é muito menor, quando comparado com a masculina. Todavia, o impacto é também elevado. No primeiro triênio, 1990-1991-1992 os percentuais de mortes por causas externas assim se revelaram: 15-19 (37,8%), 20-24 (32,5%), 25-29 (25,7%) e 30-34 (18,8%). No segundo triênio, 1999-2000-2001, esses percentuais aumentaram, pouco, nos dois primeiros grupos e diminuiram ligeiramente nos dois últimos: 15-19 (40,9%), 20-24 (32,8%), 25-29 (24,4%) e 30-34 (17,7%). No terceiro triênio, 2009-2010-2011, houve aumento generalizado em todos os grupos: 15-19 (43,4%), 20-24 (39,3%), 25-29 (30,1%) e 30-34 (21,3%).

Em suma, os números históricos demonstram um nítido aumento na severidade das causas externas ao longo dos triênios abordados, tanto para os homens quanto para as mulheres.

Painel 11 – Brasil – Distrib. Óbitos Causas Externas – Triênios 90-91-92 / 99-00-01 / 09-10-11

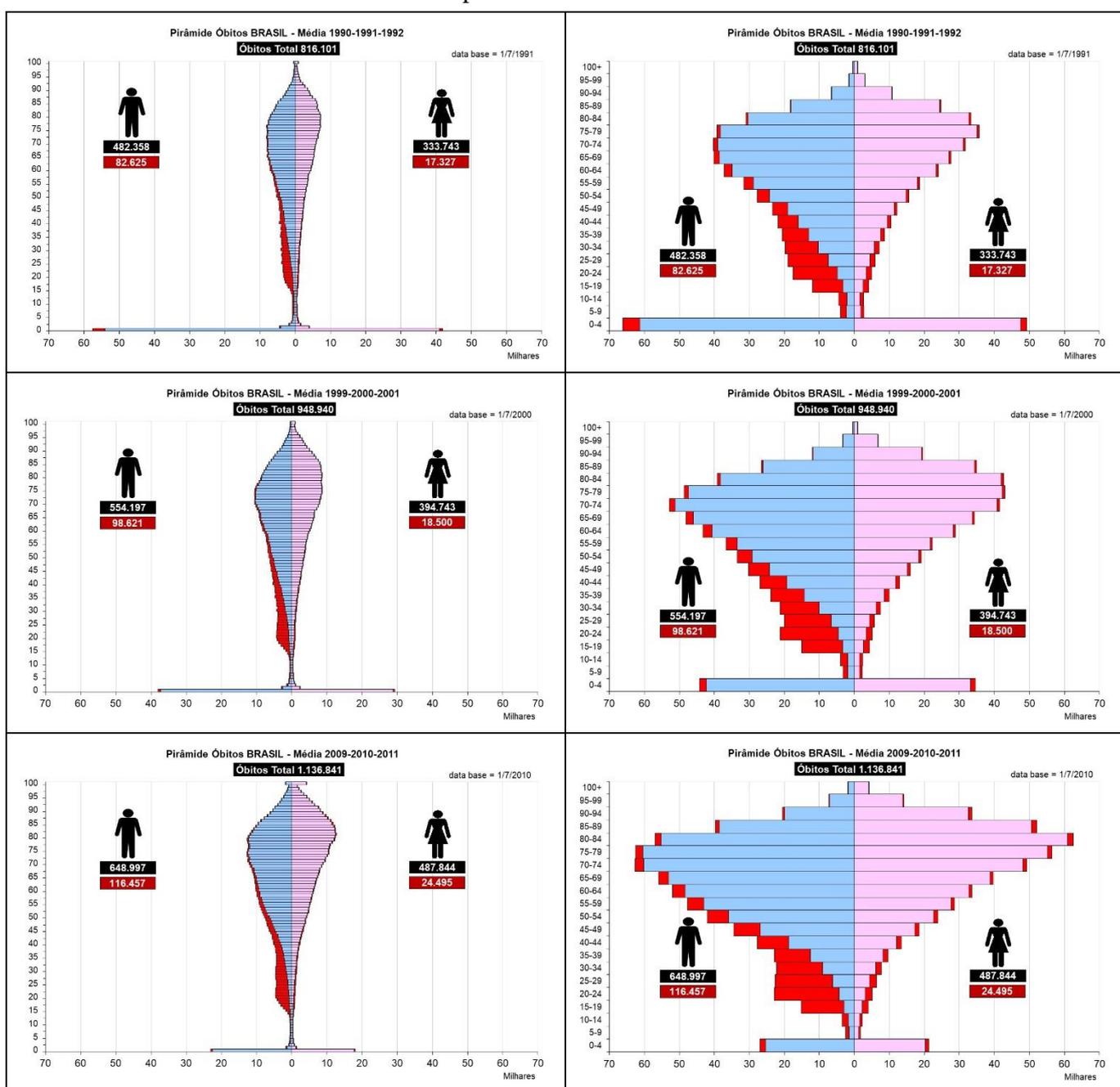


Fonte: Microdados do SIM/DATASUS/MS

Uma outra forma interessante de visualizar o fenômeno em estudo são os gráficos das pirâmides dos óbitos. O Painel 12 apresenta as pirâmides das mortes para o Brasil, nos triênios 1990-1991-1992, 1999-2000-2001 e 2009-2010-2011, destacando, em “vermelho”, os óbitos ocasionados por causas externas. Na coluna da esquerda do referido painel, os dados são apresentados por idade simples, enquanto que na coluna da direita, por grupos quinquenais. Os

gráficos das pirâmides dos óbitos corroboram a constatação de que o peso das causas externas de mortalidade vem aumentando sistematicamente no país, indicando uma maior necessidade cada vez maior de políticas públicas atuando na tentativa de frear ou mesmo reverter essa terrível situação, para as próximas décadas.

Painel 12 – Brasil – Pirâmides dos Óbitos p/ Causas Externas – Triênios 90-91-92 / 99-00-01 / 09-10-11



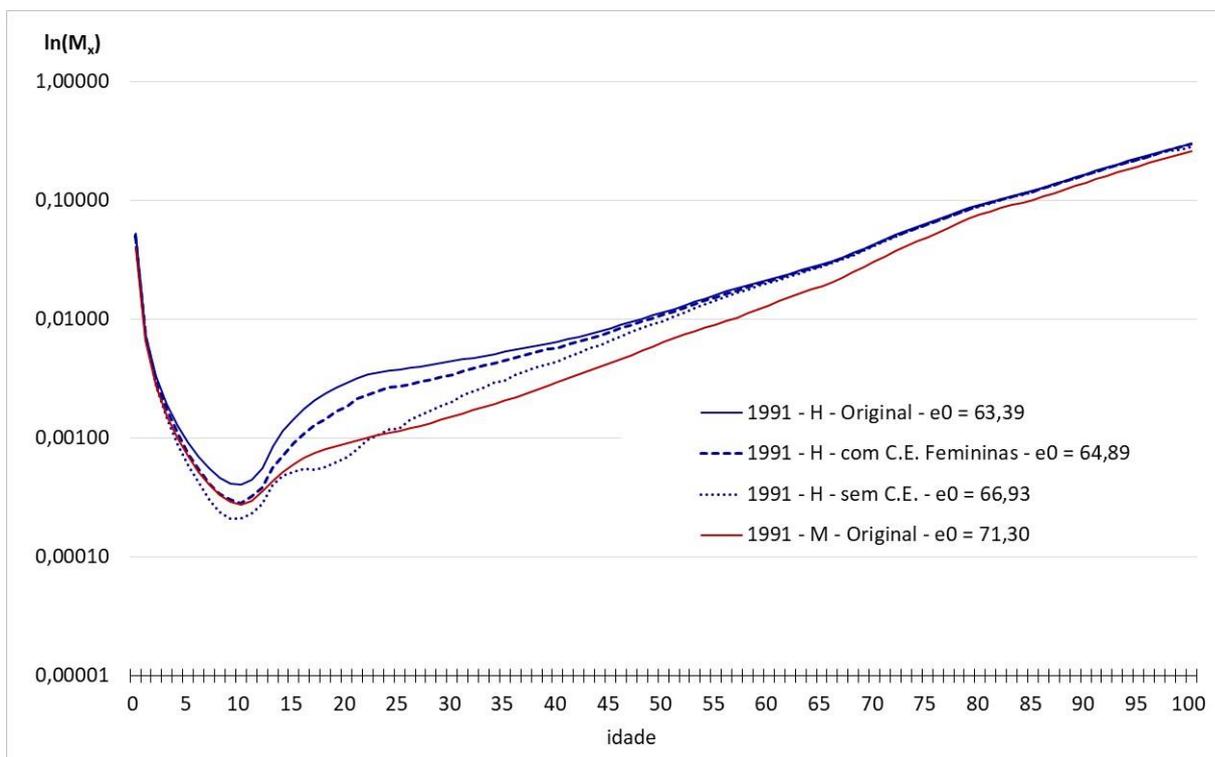
Feitas as considerações iniciais sobre o impacto das mortes violentas no Brasil, realizou-se o exercício de múltiplo-decremento, para a reconstrução das tábuas de mortalidade masculinas, anos de 1991, 2000 e 2010.

Os três gráficos apresentados a seguir mostram, respectivamente, para os anos de 1991, 2000 e 2010, as  $M_x$ 's originais masculinas e femininas, e as  $M_x$ 's masculinas construídas no exercício de múltiplo-decremento, considerando as duas hipóteses: 1) óbitos ocorrendo por outras causas que não as externas; e 2) distribuição de causas externas de mulheres aplicada aos homens. As curvas originais masculinas são representadas, nos gráficos, em cor “azul contínuo”, as femininas, em “vermelho contínuo”, as masculinas sob à hipótese 1) em “azul pontilhado” e as masculinas sob à hipótese 2), em “azul tracejado”

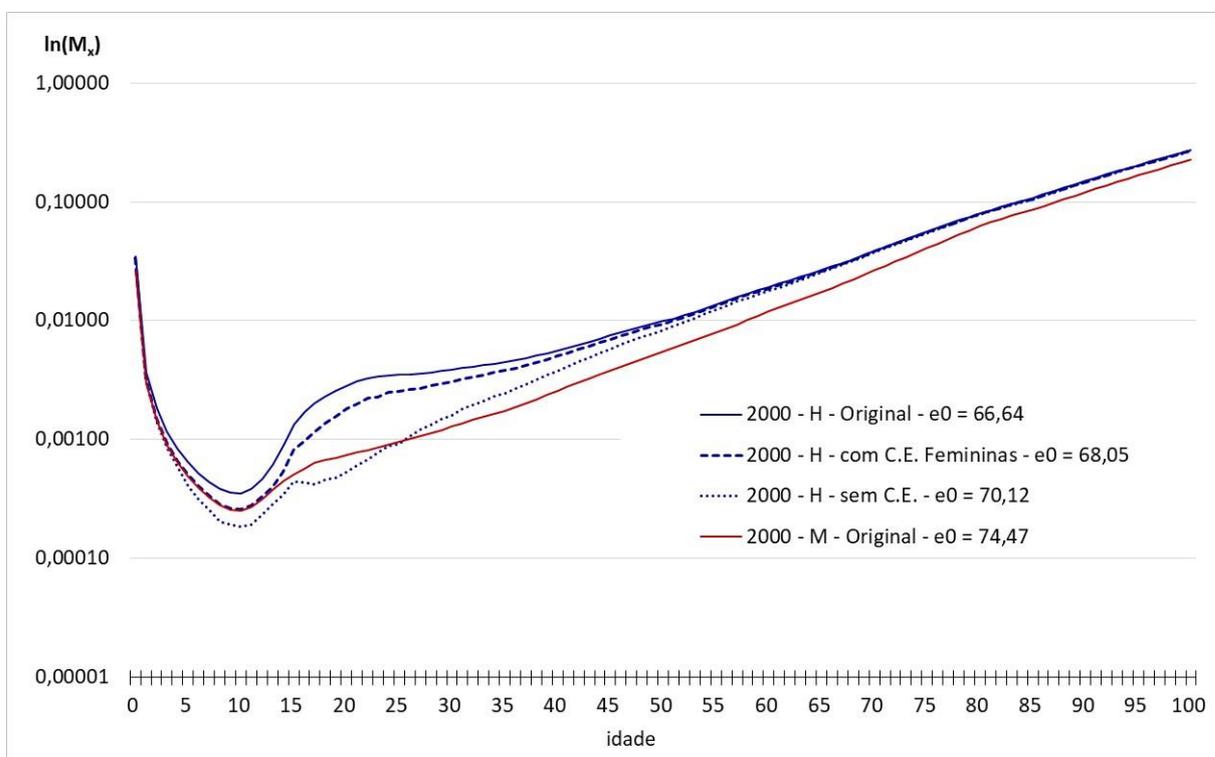
Para o ano de 1991, Gráfico 30, a  $e_0$  no Brasil era de 63,39 anos para os homens e 71,30 anos para as mulheres. Quando consideramos a primeira hipótese do exercício de múltiplo-decremento, a  $e_0$  masculina salta para 66,93 anos (um ganho de 3,54 anos) e as  $M_x$ 's, para as idades de 2 até 23 anos, resultam em valores menores do que os femininos, situação essa não aceitável. Quando consideramos a segunda hipótese do exercício de múltiplo-decremento, a  $e_0$  masculina passa para 64,89 anos (um ganho de 1,50 ano) e as  $M_x$ 's resultam em valores aceitáveis, sempre maiores que as taxas femininas e menores do que as masculinas originais.

Para o ano de 2000, Gráfico 31, a  $e_0$  no Brasil era de 66,64 anos para os homens e 74,47 anos para as mulheres. Quando consideramos a primeira hipótese do exercício de múltiplo-decremento, a  $e_0$  masculina salta para 70,12 anos (um ganho de 3,47 anos) e as  $M_x$ 's, para as idades de 2 até 25 anos, resultam em valores menores do que os femininos, situação também não aceitável. Quando consideramos a segunda hipótese do exercício de múltiplo-decremento, a  $e_0$  masculina passa para 68,05 anos (um ganho de 1,41 anos) e as  $M_x$ 's resultam em valores aceitáveis, sempre maiores que as taxas femininas e menores do que as masculinas originais.

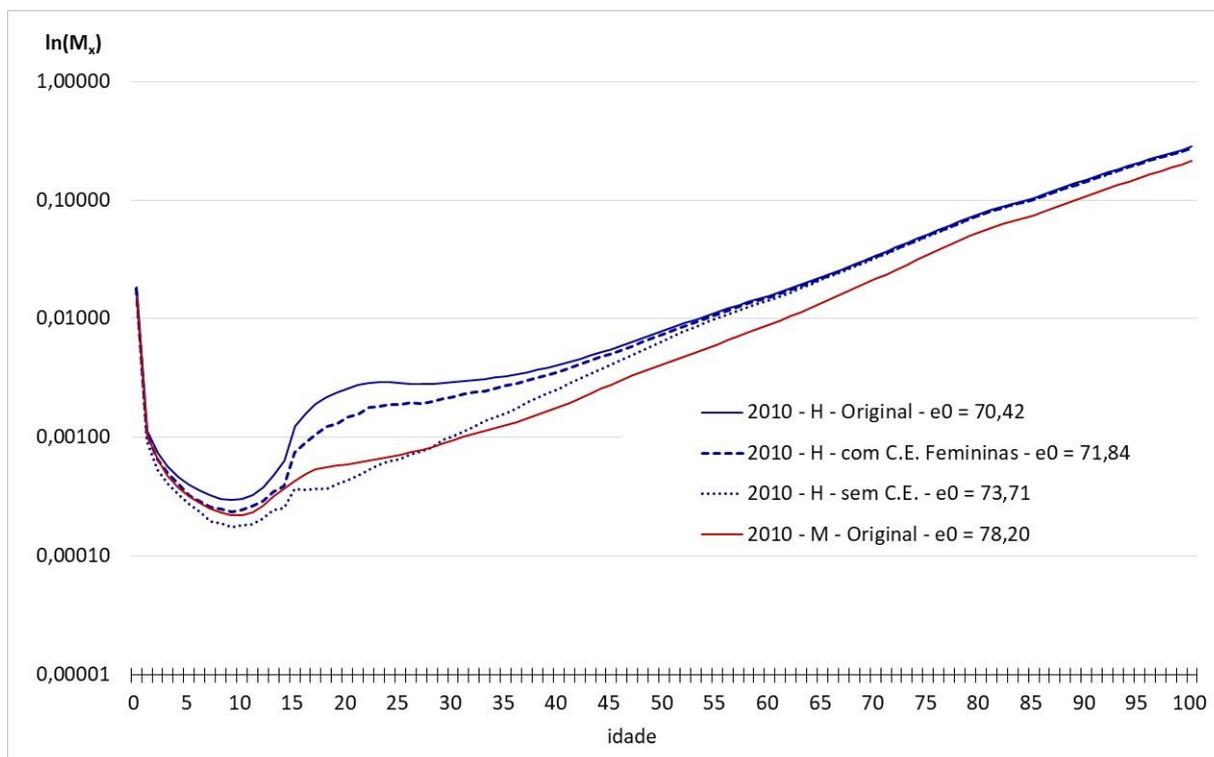
Para o ano de 2010, Gráfico 32, a  $e_0$  no Brasil era de 70,42 anos para os homens e 78,20 anos para as mulheres. Quando consideramos a primeira hipótese do exercício de múltiplo-decremento, a  $e_0$  masculina salta para 73,71 anos (um ganho de 3,29 anos) e as  $M_x$ 's, para as idades de 1 até 28 anos, resultam em valores menores do que os femininos, situação não aceitável. Quando consideramos a segunda hipótese do exercício de múltiplo-decremento, a  $e_0$  masculina passa para 71,84 anos (um ganho de 1,42 anos) e as  $M_x$ 's resultam em valores aceitáveis, sempre maiores que as taxas femininas e menores do que as masculinas originais.

Gráfico 30 – Brasil –  $M_x$ 's Masculinas com e sem decremento de Causas Externas – 1991

fonte: IBGE, Tábua de Mortalidade 1991 e SIM/DATASUS/MS

Gráfico 31 – Brasil –  $M_x$ 's Masculinas com e sem decremento de Causas Externas – 2000

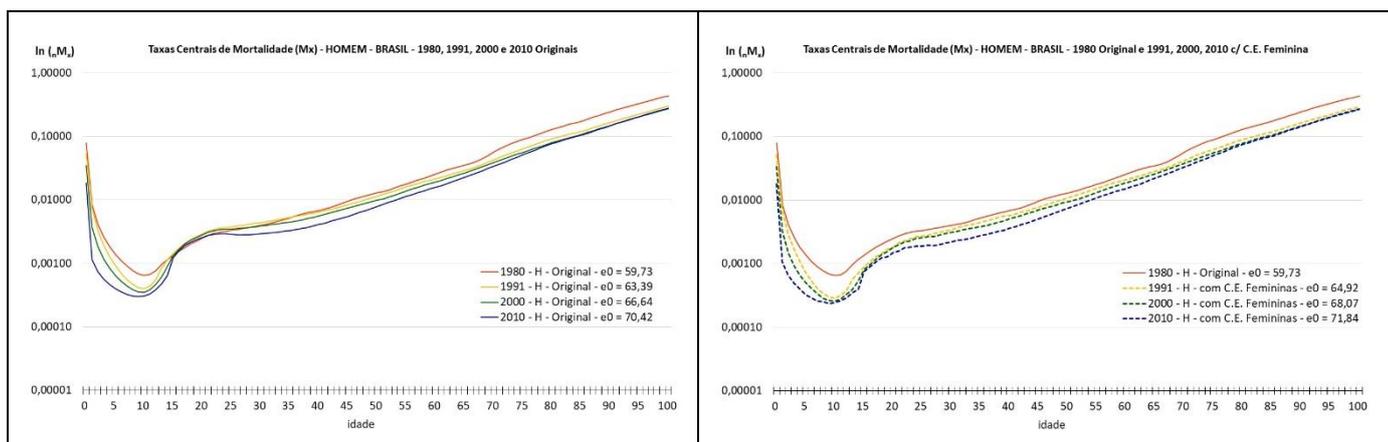
fonte: IBGE, Tábua de Mortalidade 2000 e SIM/DATASUS/MS

Gráfico 32 – Brasil –  $M_x$ 's Masculinas com e sem decremento de Causas Externas – 2010

fonte: IBGE, Tábua de Mortalidade 2010 e SIM/DATASUS/MS

Em análise aos três gráficos anteriores, percebe-se, claramente, a não adequação da hipótese 1) do exercício de múltiplo-decremento, razão pela qual apenas a hipótese 2) será considerada daqui em diante.

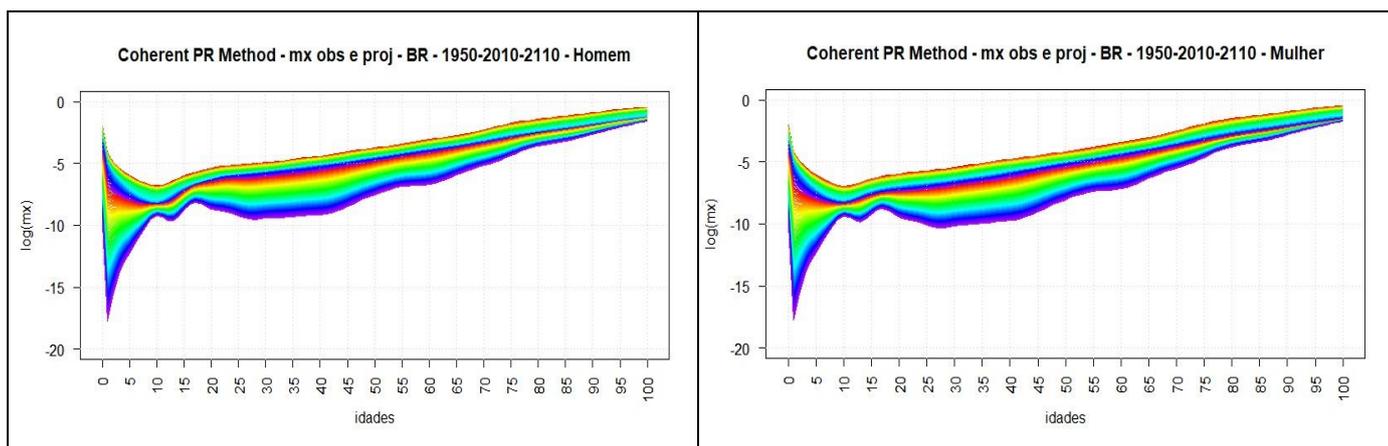
O *Painel 13* mostra as taxas específicas de mortalidade de homens para 1991, 2000 e 2010, antes e depois do exercício de múltiplo-decremento, considerando a distribuição das causas externas de mortalidade das mulheres. A título de informação, foi também incluída nos gráficos a curva original de 1980. A primeira coluna do painel apresenta as  $M_x$ 's originais, enquanto a segunda coluna mostra as suas transformadas. Diferentemente do que ocorrera nas tábuas originais de 1991, 2000 e 2010, em que as  $M_x$ 's nas idades 15-35 anos aumentaram no período 1980-1991 e pouco decresceram nos períodos 1991-2000 e 2000-2010, as tábuas reconstruídas sob à hipótese 2) de múltiplo-decremento, resultaram em  $M_x$ 's nitidamente sempre menores, quando comparadas aos anos censitários anteriores. Ainda que a variação negativa nas  $M_x$ 's tenha sido muito pequena nas idades dos 10 aos 25 anos, período 1991-2000-2010, o exercício de múltiplo-decremento conduzido gerou taxas decrescentes nessas idades, onde as causas externas de mortalidade atuam com mais força.

Painel 13 – Brasil –  $M_x$ 's Homem Obs. 1980 e Obs. e Ajust. 1991, 2000 e 2010 por Múltiplo-Decremento

fonte: IBGE, Tábua de Mortalidade de 1980, 1991, 2000 e 2010 e SIM/DATASUS/MS

De posse das novas tábuas de mortalidade de homens para o Brasil, nos anos de 1991, 2000 e 2010, mais uma vez foram realizadas as projeções da mortalidade pelo método coerente de Hyndman, na tentativa de obtenção de padrões plausíveis das curvas de  $M_x$ 's, principalmente para os anos mais distantes do ano-base da projeção.

Infelizmente, a alteração aqui proposta não corrigiu os problemas observados no padrão futuro das curvas de mortalidade projetadas pelo método de Hyndman, para homens e mulheres, como se pode observar no *Painel 14*, a seguir.

Painel 14 – Brasil –  $M_x$ 's Homem Obs. c/ Múltiplo-Decremento e Proj. pelo método de Hyndman

fonte: IBGE, Tábua de Mortalidade de 1980, 1991, 2000 e 2010 e SIM/DATASUS/MS

### 5.7) Projeção da Mortalidade em dois estágios para o Brasil

Depois de todos os exercícios de projeção da mortalidade até aqui conduzidos, nenhum dos oito métodos testados mostrou-se capaz de gerar resultados satisfatórios, de forma conjunta para o binômio nível ( $e_0$ ) X padrão ( $M_x$ 's) projetado.

Em relação, especificamente, ao nível geral da mortalidade projetada, dado pela expectativa de vida ao nascer, apenas o método coerente de Hyndman resultou em vetores de  $e_0$ 's (com IC de 95%) razoáveis e aceitáveis, no horizonte dos 100 anos da projeção, tanto para homens, quanto mulheres. Pelo método COE, o *gap* da  $e_0$  feminina, em relação à masculina, diminui paulatinamente ao longo dos anos da projeção até 2110, dentro daquilo o que se espera.

Acredita-se que a hipótese de diminuição do *gap* de  $e_0$  entre sexos seja razoável e adequada, visto que, como os ganhos de  $e_0$  das mulheres no Brasil foi bem maior no passado, comparados aos dos homens, representando, em 2010, uma diferença de 7,78 anos ( $e_0$  feminina de 78,20 anos X  $e_0$  masculina de 70,42 anos), existe uma tendência futura dos homens irem se aproximando das mulheres, por duas razões básicas: 1) como os homens ganharam menos no passado, os mesmos possuem uma maior margem de ganho de  $e_0$  no futuro; e 2) como as mulheres já atingiram um nível elevado de  $e_0$ , de mais de 78 anos em 2010, com previsão de atingir os 80 anos, já em 2018, seus ganhos futuros tenderão a ser cada vez mais decrescentes, se comparados aos ganhos futuros masculinos.

Para a aplicação dos métodos coerentes propostos por Li & Lee (2005) ou Li, Lee, & Gerland (2013) (com rotação de  $b_{(x)}$ ), disponibilizados no pacote *Mortcast* (Sevcikova, Li, & Gerland, 2018) do R, são necessários os seguintes dados: 1) matrizes das taxas de mortalidade, por sexo e grupos quinquenais de idade (0-1, 1-4, 5-9,....., 95-99, 100+); e 2) vetores de  $e_0$  de homens e mulheres, projetados para o horizonte desejado.

Como solução encontrada para a consistência entre os níveis e padrões futuros da mortalidade projetada de homens e mulheres no Brasil, optou-se pela conhecida técnica de projeção em dois estágios. No primeiro estágio, projeta-se a expectativa de vida ao nascer por sexo, por alguma metodologia específica que resulte em valores consistentes no longo prazo. No segundo, as taxas específicas de mortalidade são projetadas de forma que a  $e_0$ , calculada em função das  $M_x$ 's projetadas para determinado ano, seja equivalente ao seu valor constante no vetor de  $e_0$ 's projetadas no primeiro estágio.

O método de Lee-Carter estendido (Li, Lee, & Gerland, 2013) representa uma evolução de sua versão original, o método de Lee-Carter coerente (Li & Lee, 2005). A grande diferença diz respeito à rotação aplicada ao  $b_{(x)}$  do modelo, alteração fundamental, principalmente, para obtermos resultados consistentes para o padrão das taxas em projeções de longo prazo, tal como a de 100 anos aqui realizada. Com isso, optou-se apenas pela aplicação do método Lee-Carter estendido, pelo pacote *Mortcast* do R (Sevcikova, Li, & Gerland, 2018). A não rotação do  $b_{(x)}$ , necessariamente levaria a padrões implausíveis das curvas de  $M_{(x)}$ 's, principalmente nos anos mais distantes do ano-base da projeção, 2010, tal qual ocorrera nas projeções com os métodos que utilizam a análise de componentes principais funcionais (HU, HU<sup>ROB</sup>, HU<sup>WEI</sup> e COE).

Para a implementação das Projeções no *Mortcast*, foi necessária a transformação das taxas de mortalidade por idade simples em taxas de mortalidade por grupos quinquenais, convertendo as matrizes de  $M_x$ 's em matrizes de  ${}_nM_x$ 's, a partir das relações matemáticas inerentes às funções das tábuas de vida, sendo estas, então, utilizadas em conjunto com os vetores de expectativa de vida ao nascer, preditos no 1º estágio da projeção pelo método COE.

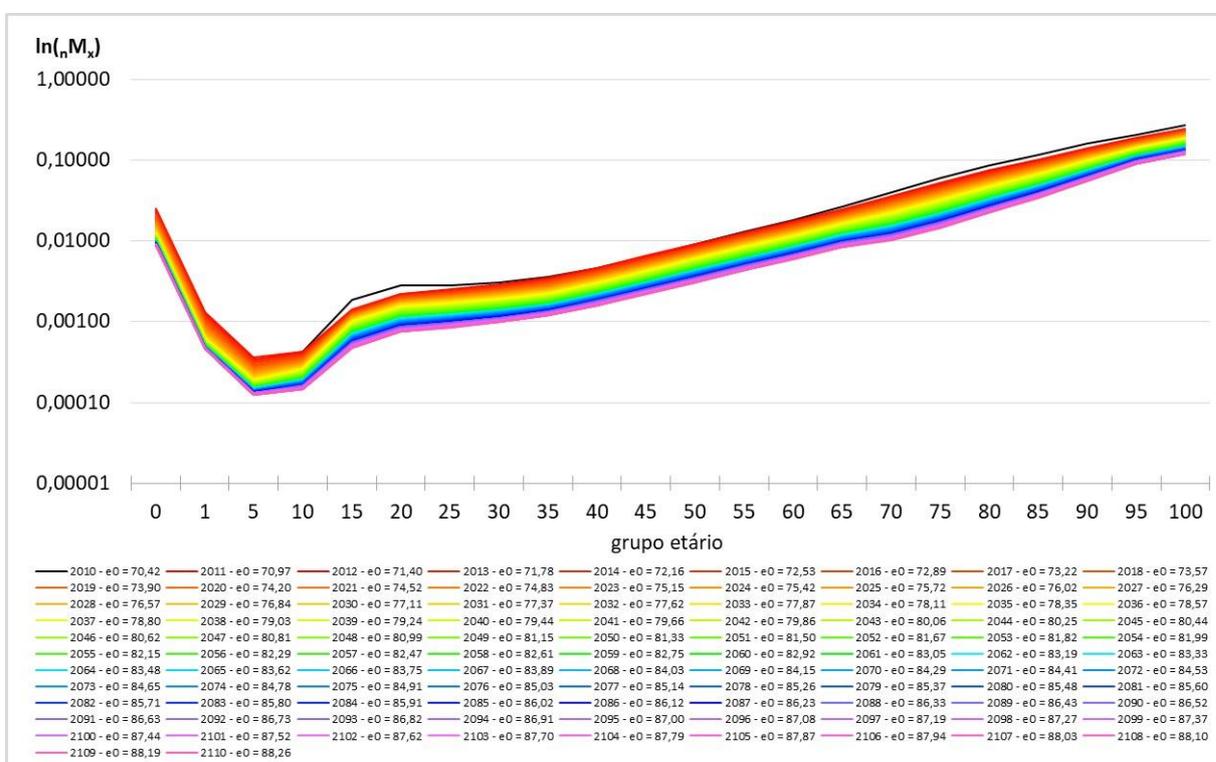
Os primeiros resultados da projeção pelo método Lee-Carter estendido apontaram padrões futuros visualmente consistentes e aceitáveis, com uma única ressalva. Nos anos mais próximos ao final da projeção, as taxas do grupo aberto 100+ resultaram em valores iguais ou menores que as taxas do grupo etário anterior de 95-99 anos, situação essa inaceitável. Para contornar este último obstáculo, adotou-se o fator constante observado da razão entre  $m_{100+}/{}_5m_{95}$  para homens e mulheres, no ano de 2010, sendo que as  $m_{100+}$  projetadas foram recalculadas considerando o produto entre as  ${}_5m_{95}$ 's projetadas e o referido fator constante de 2010. Esse último ajuste executado acarretou ligeiras diferenças, a menor, nas expectativas de vida ao nascer projetadas no primeiro estágio pelo método de Hyndman, principalmente nos últimos anos no horizonte projeção. Isso acontece porque as  $m_{100+}$ 's recalculadas acabam sendo mais elevadas do que as projetadas inicialmente, por conta da aplicação do fator constante ao penúltimo grupo de taxas de mortalidade. Como os gráficos das  ${}_nM_x$ 's resultantes mostraram-se agora visualmente consistentes, essas foram consideradas como os resultados finais das projeções da mortalidade de homens e mulheres no Brasil (1950-2010-2110). As  ${}_nM_x$ 's da população total (ambos os sexos) foram calculadas por intermédio das funções  ${}_nd_x$  e  ${}_nL_x$  das tábuas masculinas e femininas.

O *Gráfico 33*, o *Gráfico 34* e o *Gráfico 35*, a seguir, apresentam os resultados finais das projeções das  ${}_nM_x$ 's, pelo método coerente de Li, Lee, & Gerland (2013), para homens,

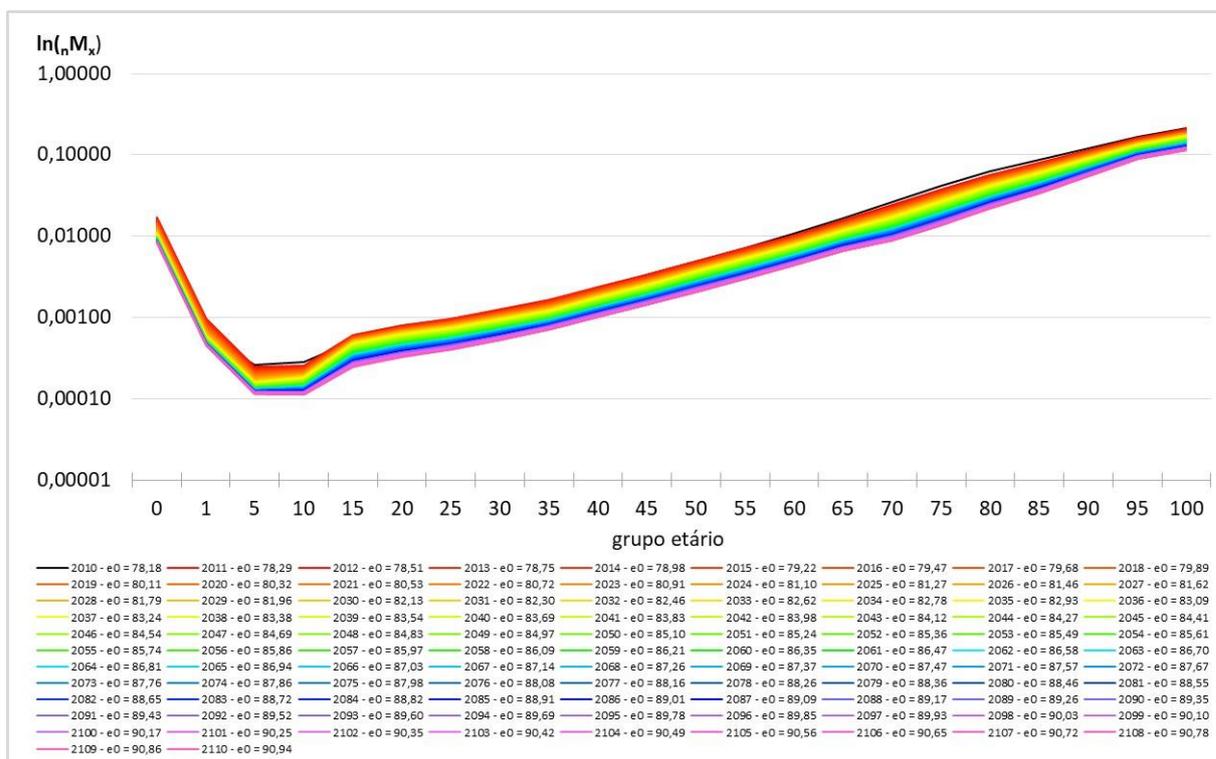
mulheres e ambos os sexos, respectivamente. Com o objetivo de passar a noção do nível geral da mortalidade, para cada uma das 100 curvas constantes nos gráficos, foi incluída a respectiva  $e_0$ . Inseriu-se, também, nos gráficos, a curva do ano-base de 2010 (linha preta) e sua  $e_0$  correspondente, podendo-se perceber um ajuste inicial feito pelo método no primeiro ano da projeção, 2011, notadamente na curva masculina, com um *jump off* para baixo nas  ${}_nM_x$ 's, nas idades dos 15 anos 35 anos, onde o peso das causas externas de mortalidade é extremamente elevado. Esse ajuste inicial resulta em um *accident hump* projetado, que vai, paulatinamente, perdendo força relativa na mortalidade geral da população, conforme vamos nos afastando do ano-base de 2010 e nos aproximando do ano de 2110.

Em linhas gerais, as  ${}_nM_x$ 's projetadas resultaram em padrões consistentes, dentro daquilo que se espera do comportamento de uma função de mortalidade, mantendo o tradicional padrão de “J”, ainda que o *hump* continue existindo na curva dos homens. A mortalidade começa elevada nos primeiros anos de vida, decrescendo até um mínimo, próximo das idades de 5 até 10 anos, a partir de onde apresenta comportamento monotônico e crescente, até o grupo aberto em 100+ anos.

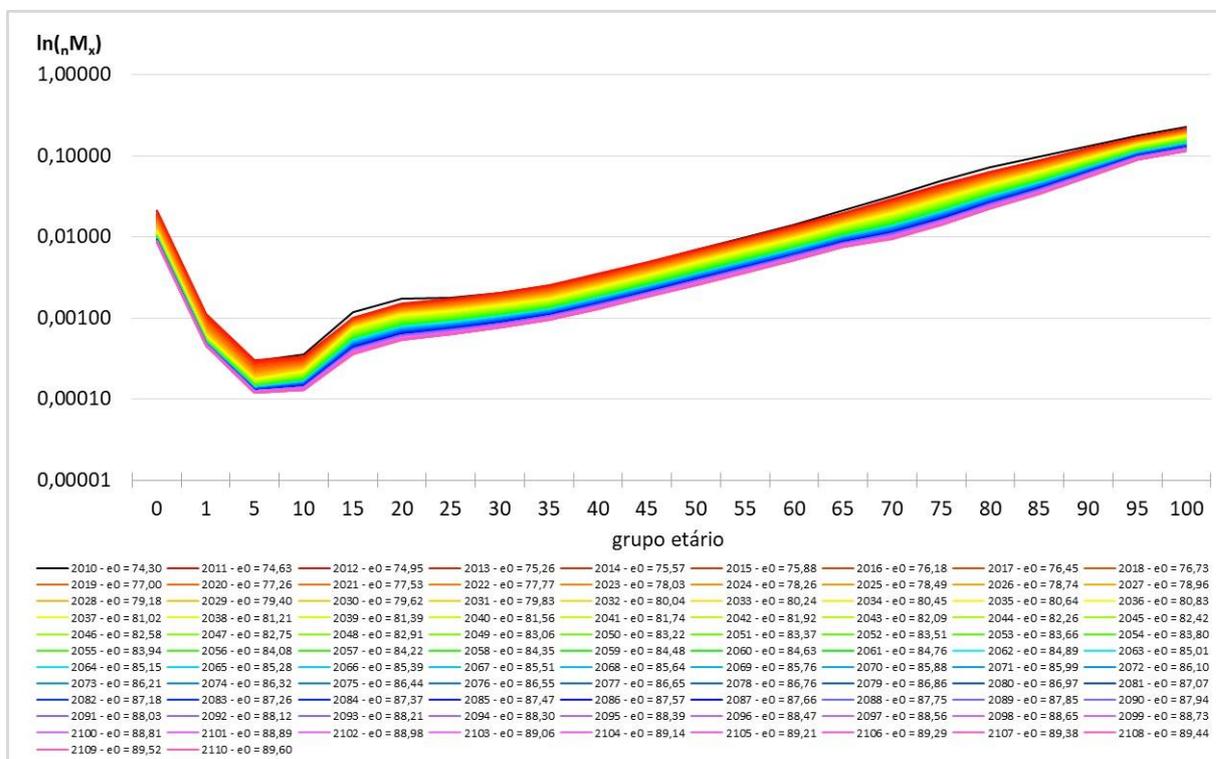
Gráfico 33 – Brasil –  ${}_nM_x$ 's Proj. método coerente de Li, Lee, & Gerland (2013) – Homem



fonte: IBGE, *Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970*

Gráfico 34 – Brasil –  ${}_nM_x$ 's Proj. método coerente de Li, Lee, & Gerland (2013) – Mulher

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 35 – Brasil –  ${}_nM_x$ 's Proj. método coerente de Li, Lee, & Gerland (2013) – Ambos

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

### 5.7.1) Comparativo da $e_0$ projetada para o Brasil pelos métodos LM e COE X ONU, CELADE e IBGE

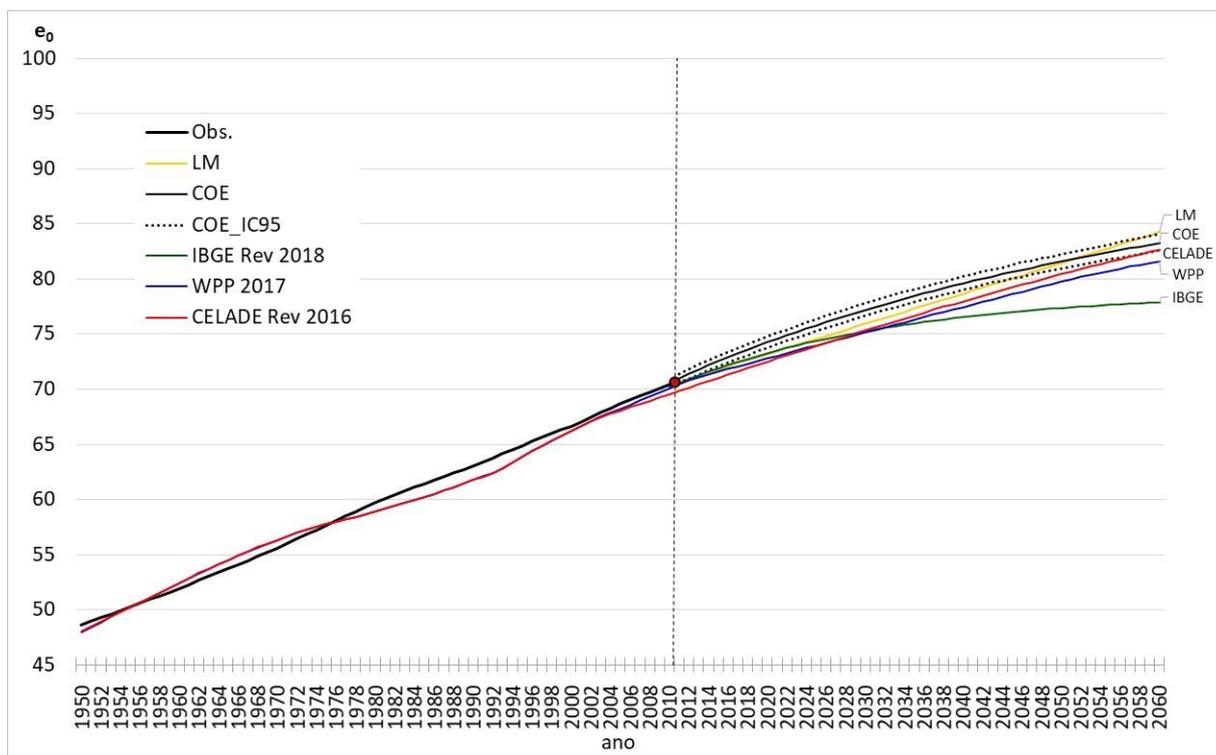
Antes de serem apresentados os resultados das projeções para as cinco Grandes Regiões do Brasil, importante fazer uma comparação entre as expectativas de vida ao nascer projetadas pelos métodos de Lee & Miller (2001) e Hyndman et al. (2013), aqui testados para o Brasil, com as  $e_0$  projetadas por outras instituições para o país, como o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 2018), o Centro Latinoamericano e Caribenho de Demografia (CELADE, 2016) e a Organização das Nações Unidas (UN, 2017) com o *World Population Prospects*.

Como as informações oriundas do CELADE e da ONU são disponibilizadas apenas por período quinquenal (p.e. 1950-1955,....., 2010-2015,....., 2095-2100), os dados foram alocados no meio do intervalo (p.e.: 1952,5 ,....., 2012,5 ,....., 2097,5), criando, assim, uma série de pontos-base, a partir dos quais foi realizada uma interpolação linear para a obtenção dos valores anuais (p.e.: 1953 ,....., 2010 ,....., 2059, 2060).

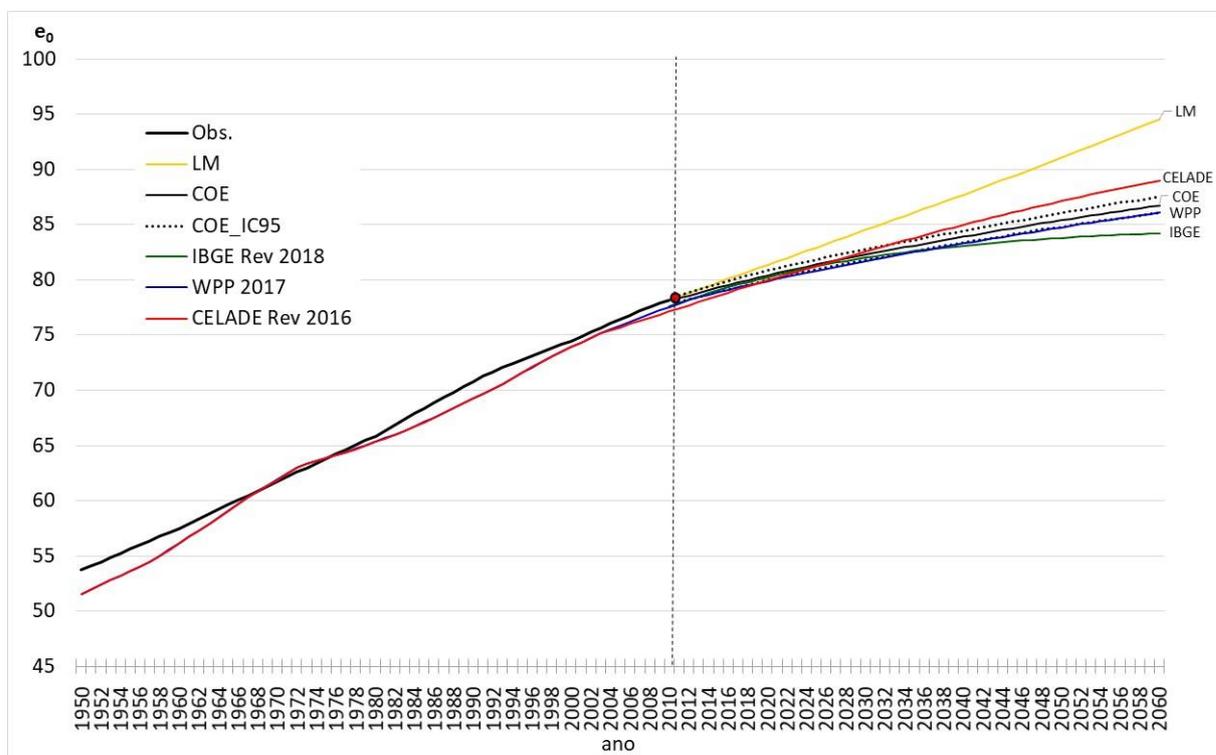
O *Gráfico 36* e o *Gráfico 37* apresentam a comparação entre as  $e_0$  projetadas nesta tese pelos métodos LM e COE, e aquelas projetadas pelo IBGE, CELADE e ONU, para homens e mulheres, respectivamente, até o ano de 2060, último ano da projeção do IBGE. Foi incluído, também, nos gráficos, o intervalo de confiança de 95% para a  $e_0$  projetada pelo método COE.

Para a população masculina, o *ranking* da projeção da  $e_0$  para 2060 ficou da seguinte forma: 1) LM (84,26 anos), 2) COE (83,26 anos), 3) CELADE (82,63 anos), 4) WPP 2017 (81,62 anos) e 5) IBGE (77,90 anos). Os resultados do CELADE para a  $e_0$ , em 2060, ficaram dentro da banda de confiança (95%) do método COE. A  $e_0$  projetada para 2060 pelo método COE (83,26 anos) resultou em 5,36 anos a mais do que a projetada pelo IBGE (77,90 anos) em sua última Revisão de Projeção de População em 2018. A amplitude entre a maior (LM) e a menor (IBGE)  $e_0$  foi de 6,36 anos.

Para a população feminina, o *ranking* da projeção da  $e_0$  em 2060 ficou da seguinte forma: 1) LM (94,59 anos), 2) CELADE (89,02 anos), 3) COE (86,75 anos), 4) WPP 2017 (86,11 anos) e 5) IBGE (84,23 anos). Os resultados do WPP2017 da  $e_0$ , em 2060, ficaram dentro da banda de confiança (95%) do método COE. A  $e_0$  projetada para 2060 pelo método COE (86,75 anos) resultou em 3,32 anos a mais do que a projetada pelo IBGE (84,23 anos) na Revisão de 2018. A amplitude entre a maior (LM) e a menor (IBGE)  $e_0$  foi de 10,36 anos.

Gráfico 36 – Brasil –  $e_0$ 's Obs. e Proj. LM e COE X IBGE, CELADE e WPP – Homem

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e projeções, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970, CELADE e ONU

Gráfico 37 – Brasil –  $e_0$ 's Obs. e Proj. LM e COE X IBGE, CELADE e WPP – Mulher

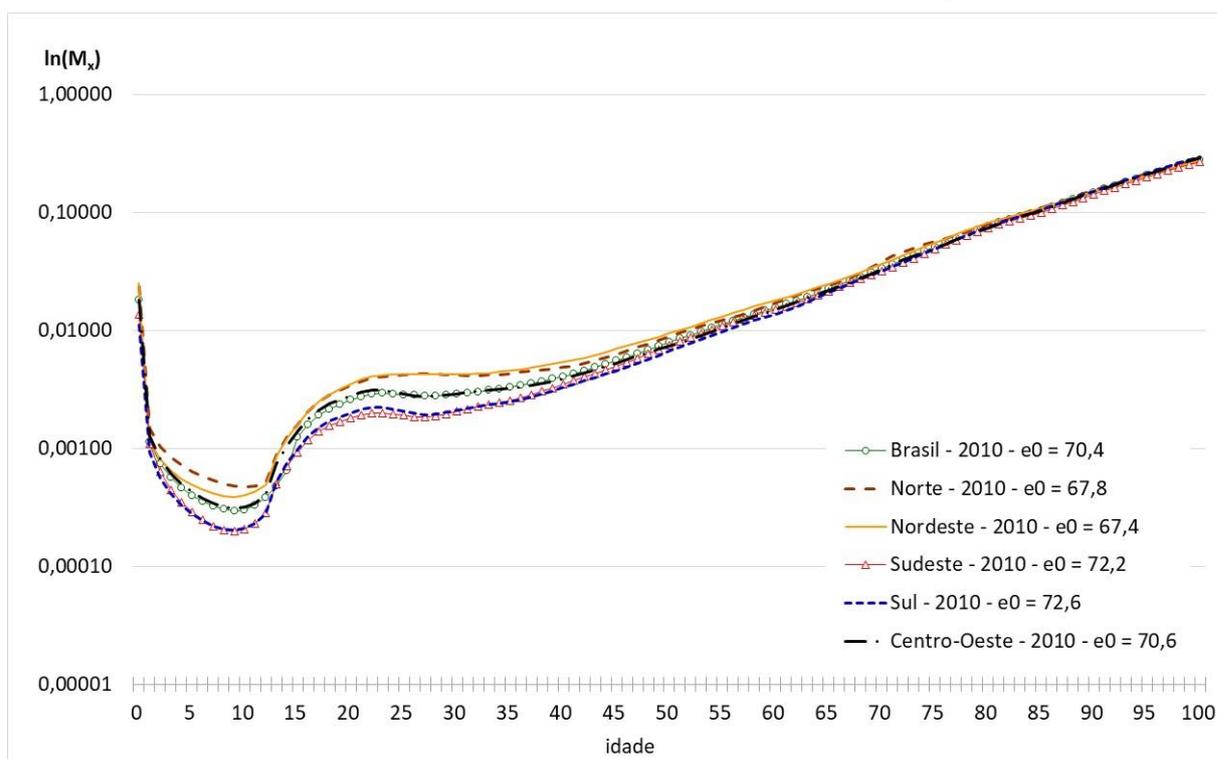
fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e projeções, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970, CELADE e ONU

## 5.8) Aplicação do método adotado para o Brasil, nas Grandes Regiões

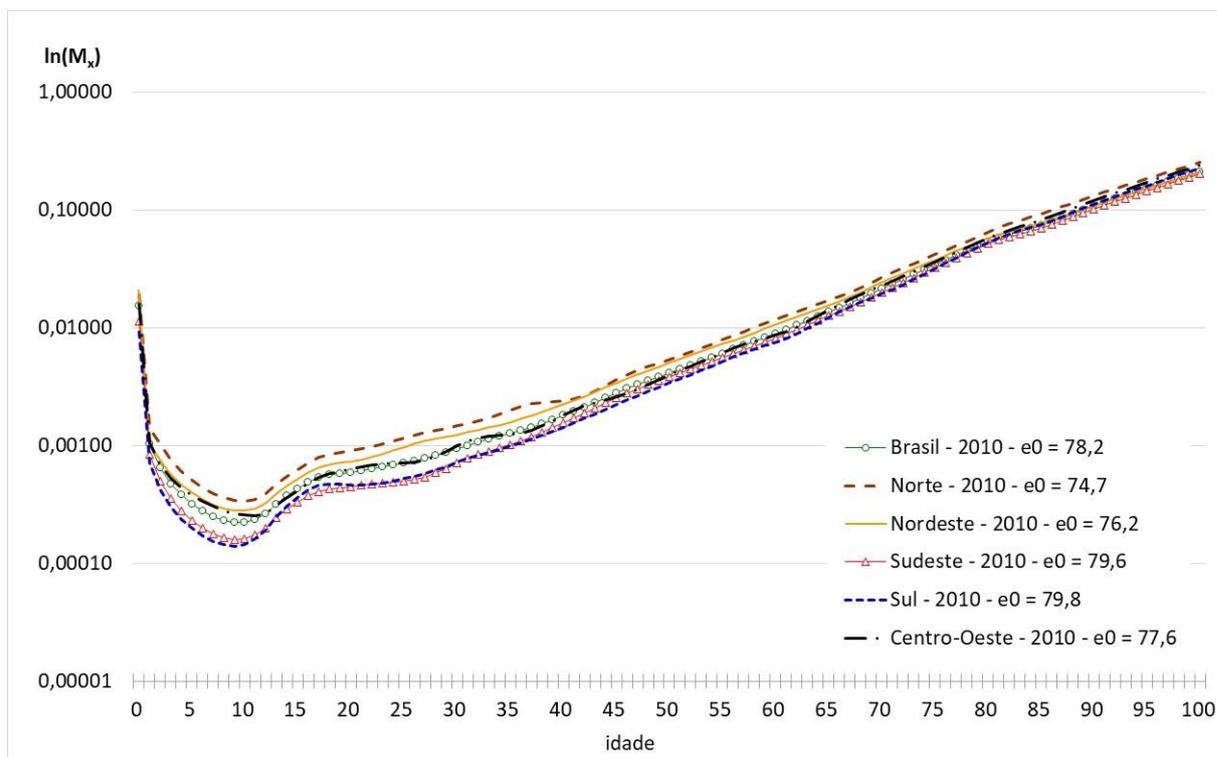
Num país de dimensões continentais e marcado por forte desigualdade social, como o Brasil, é muito importante conhecer os diferenciais de mortalidade entre as diversas regiões (Norte, Nordeste, Sudeste, Sul e Centro Oeste) e sua posição em relação à média do país. Historicamente, as Regiões Sul e Sudeste são as mais desenvolvidas e industrializadas e as Regiões Norte e Nordeste as menos abastadas. Esse aspecto é claramente refletido na mortalidade, onde a expectativa de vida ao nascer costuma ser maior, quanto mais desenvolvida for a região.

Por exemplo, o *Gráfico 38* e o *Gráfico 39*, a seguir, apresentam, respectivamente, as  $M_x$ 's de homens e mulheres no Brasil e Grandes Regiões, no ano de 2010. Ficam claras as diferenças de nível das  $M_x$ 's, com as taxas das Regiões Sul ( $e_0^H = 72,6$  anos e  $e_0^M = 79,8$  anos) e Sudeste ( $e_0^H = 72,2$  anos e  $e_0^M = 79,6$  anos) sempre abaixo das taxas para o Brasil (média nacional -  $e_0^H = 70,4$  anos e  $e_0^M = 78,2$  anos). Já as  $M_x$ 's das Regiões Norte ( $e_0^H = 67,8$  anos e  $e_0^M = 74,7$  anos) e Nordeste ( $e_0^H = 67,4$  anos e  $e_0^M = 76,2$  anos) estão sempre acima da média nacional, tanto para homens, quanto para mulheres. Em relação à Região Centro-Oeste ( $e_0^H = 70,6$  anos e  $e_0^M = 77,6$  anos), suas taxas são praticamente idênticas às do Brasil, independentemente do sexo, indicando similaridade com a média nacional.

Gráfico 38 – Taxas Centrais de Mortalidade ( $M_x$ 's) – Brasil e Grandes Regiões – 2010 – Homem



fonte: IBGE, Tábua de Mortalidade 2010

Gráfico 39 – Taxas Centrais de Mortalidade ( $M_x$ 's) – Brasil e Grandes Regiões – 2010 – Mulher

fonte: IBGE, Tábua de Mortalidade 2010

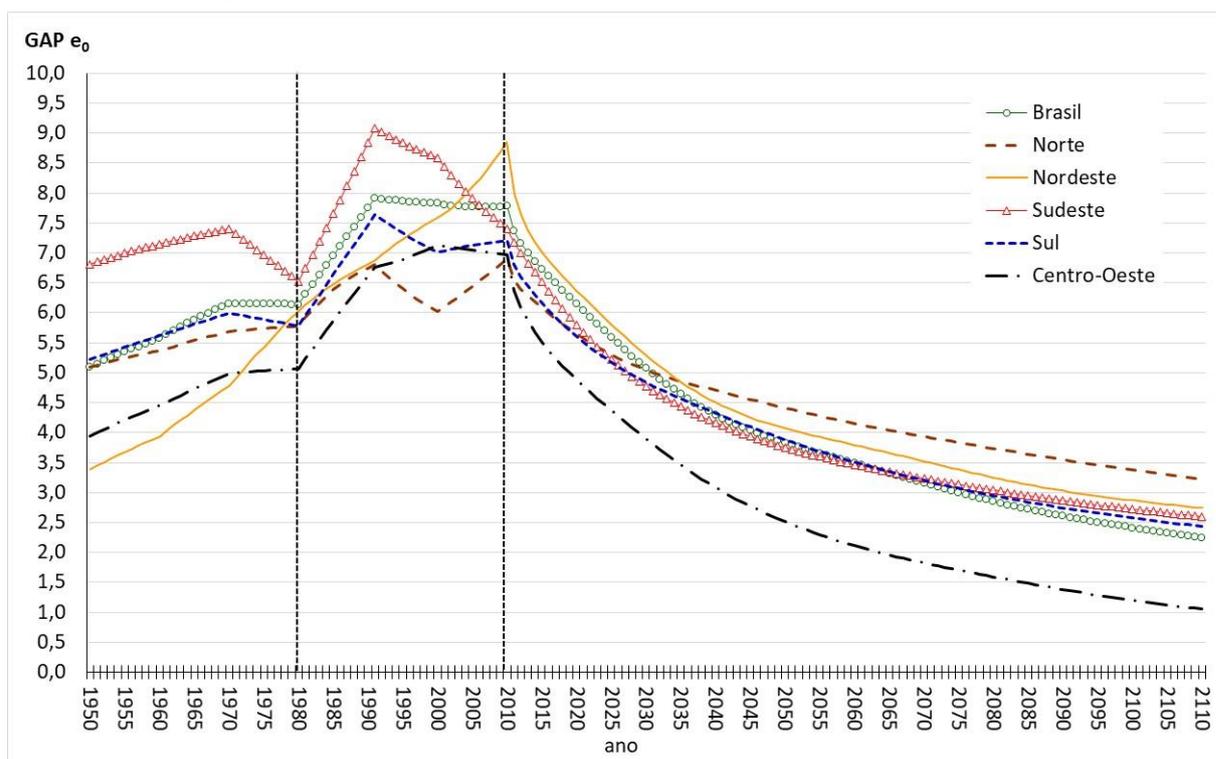
Dados os nítidos diferenciais regionais em termos de mortalidade no Brasil, é fundamental realizarmos o exercício das projeções para cada uma das cinco Grandes Regiões brasileiras, com o objetivo de conhecer qual seria a mortalidade futura em cada região e a expectativa de sobrevivência dos seus residentes. Com isso, após a definição dos critérios metodológicos de projeção em dois estágios para o Brasil e a necessidade do ajuste final das  $m_{100+}$  projetadas pelo método de Li, Lee, & Gerland (2013), o mesmo arcabouço técnico foi aplicado às Regiões Norte, Nordeste, Sudeste, Sul e Centro-Oeste.

Nos próximos cinco subitens serão apresentados, para cada Grande Região, quatro gráficos em sequência. O primeiro deles representa a expectativa de vida ao nascer observada (1950-2010) e projetada (2011-2110) pelo método coerente de Hyndman. Os três gráficos subsequentes apresentam as taxas específicas de mortalidade projetadas pela metodologia final adotada, de homens, mulheres e ambos os sexos, respectivamente.

As observações em relação aos resultados das projeções das Grandes Regiões são similares. De forma a não se tornar repetitivo nos comentários em cada um dos subitens na sequência, optou-se por traçar, nesta seção, um panorama geral dos resultados obtidos.

Em linhas gerais, os resultados das projeções da mortalidade das GR's foram consistentes em termos de níveis e padrões projetados. Percebe-se, claramente, o ligeiro ajuste realizado pelo método de Lee-Carter estendido em todas as GR's, entre a curva de mortalidade do ano-base da projeção, 2010, e o primeiro ano projetado, 2011, a partir do qual as curvas são decrescentes em nível. Em todas as GR's, tal como ocorrera para o Brasil, o método coerente de Hyndman resultou em  $e_0$ 's de homens e mulheres não-divergentes e com a paulatina diminuição do *gap* ( $e_0^M - e_0^H$ ) a partir do ano-base da projeção, 2010. Por exemplo, para o Brasil, o *gap* de  $e_0$  em 1950, 5,1 anos, aumentou para 7,8 anos em 2010, reduzindo para 3,8 anos em 2050, e para 2,2 anos em 2110. Para a Região Norte, o *gap* de  $e_0$  em 1950, de 5,1 anos, cresceu para 6,9 anos em 2010, reduzindo para 4,4 anos em 2050, e para 3,2 anos em 2110. Para a Região Nordeste, o *gap* de  $e_0$  em 1950, 3,4 anos, aumentou para 8,8 anos em 2010, diminuindo para 4,1 anos em 2050, e para 2,7 anos em 2110. Já para a Região Sudeste, o *gap* de  $e_0$  em 1950, 6,8 anos, cresceu para 7,4 anos em 2010, reduzindo para 3,8 anos em 2050, e para 2,6 anos em 2110. Em relação a Região Sul, o *gap* de  $e_0$  em 1950, 5,2 anos, aumentou para 7,2 anos em 2010, reduzindo para 3,9 anos em 2050, e para 2,4 anos em 2110. Para a Região Centro-Oeste, o *gap* de  $e_0$  em 1950, 3,9 anos, cresceu para 7,0 anos em 2010, diminuindo para 2,5 anos em 2050, e para 1,1 anos em 2110. O Gráfico 40 a seguir apresenta os resultados obtidos para evolução do *gap* de  $e_0$  no BR e GR's.

Gráfico 40 – Evolução do GAP entre as  $e_0$ 's de mulheres e homens – BR e GR's – 1950-2010-2110

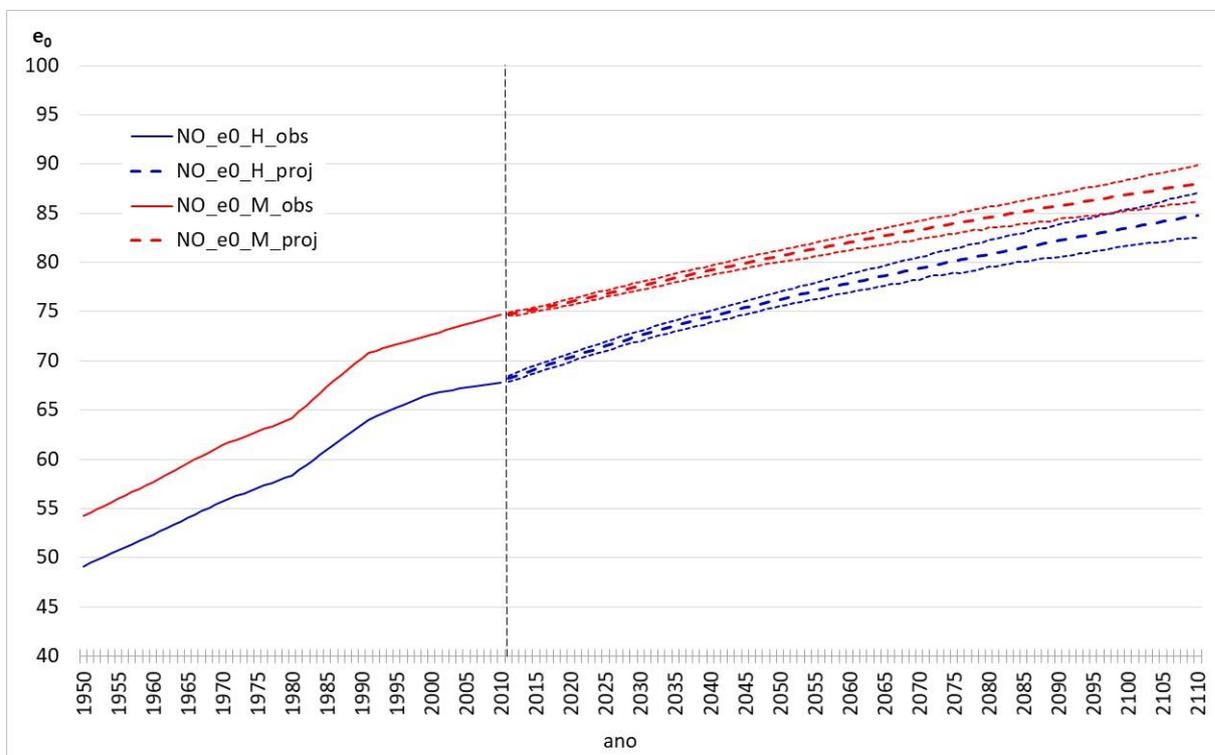


fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

### 5.8.1) Projeções da Mortalidade para a Região Norte

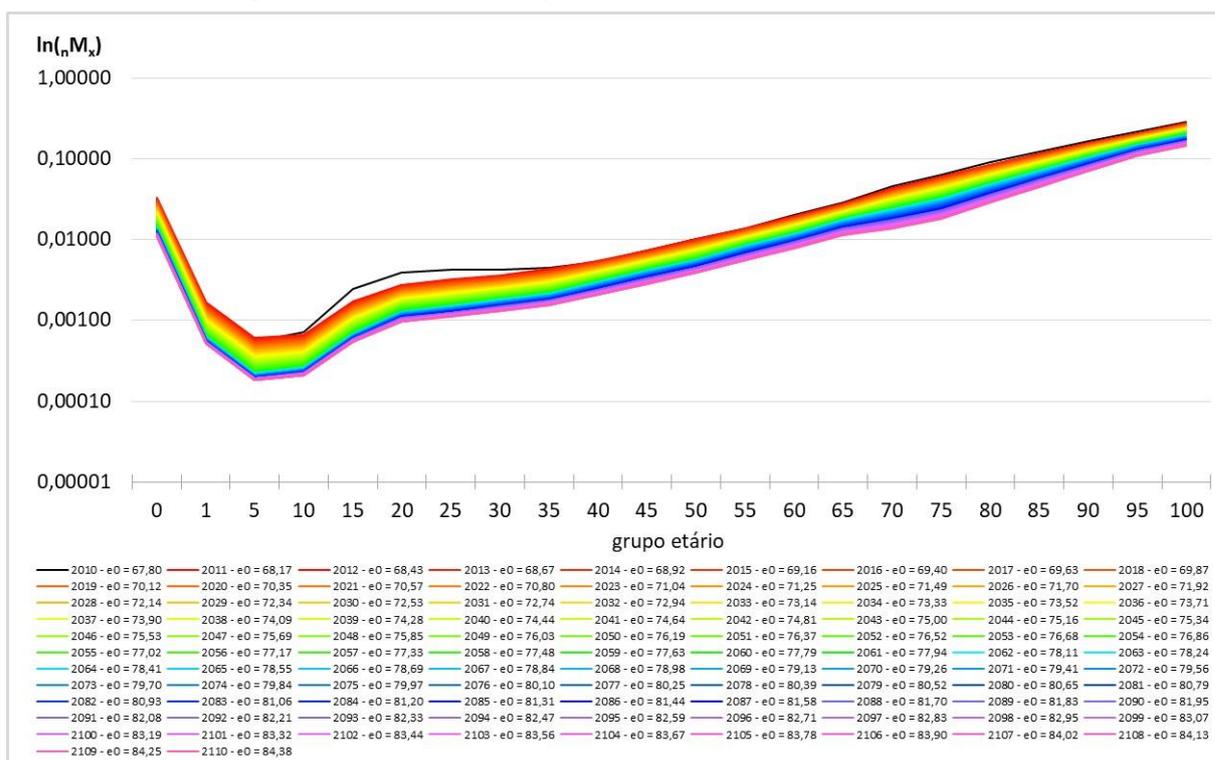
A seguir são apresentados os gráficos de  $e_0$ 's e  ${}_nM_x$ 's projetadas para a Região Norte.

Gráfico 41 – Região Norte –  $e_0$ 's Proj. IC95 – método coerente Hyndman – Homem e Mulher

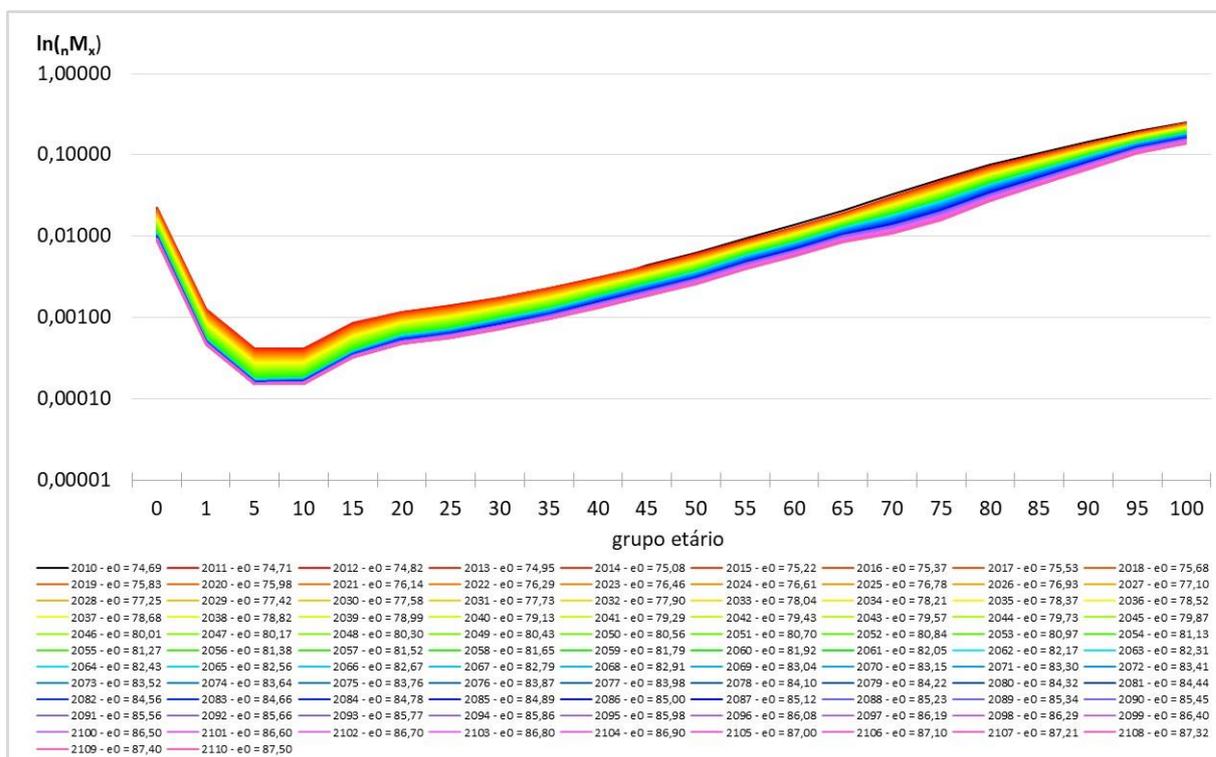


fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

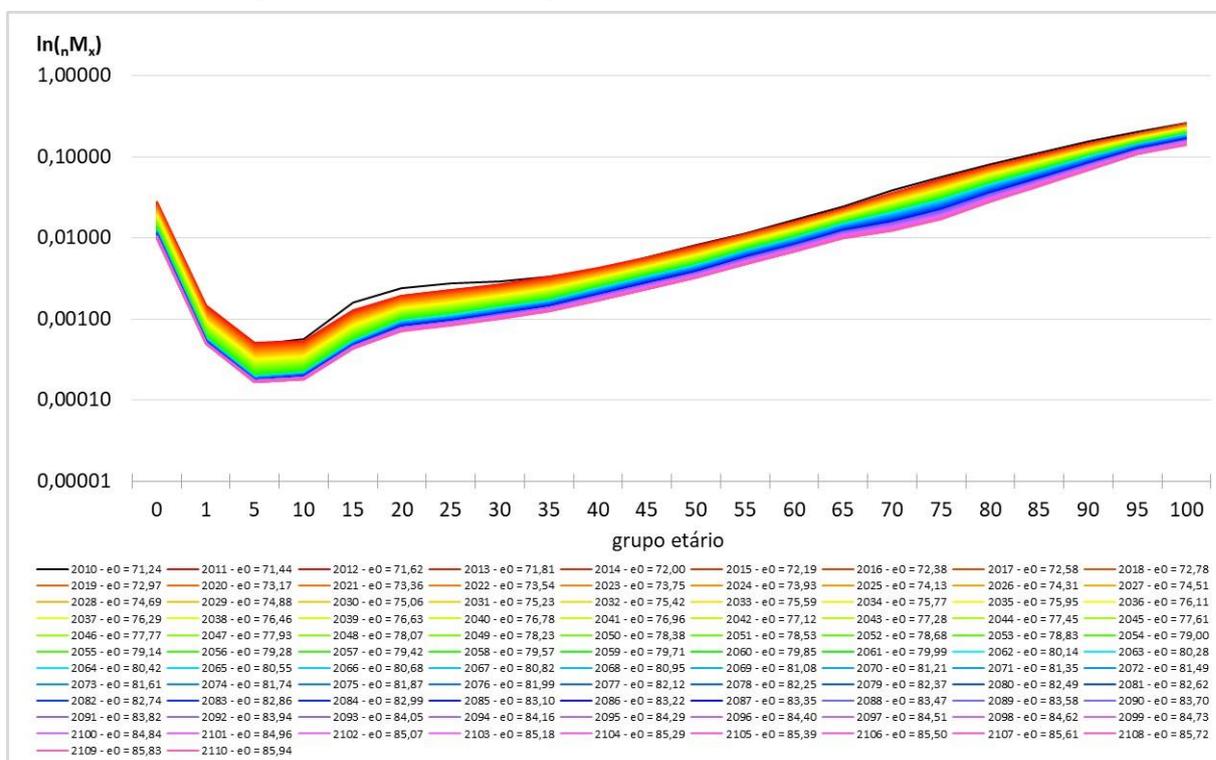
Gráfico 42 – Região Norte –  ${}_nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Homem



fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 43 – Região Norte –  $nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Mulher

fonte: IBGE, Tábua de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

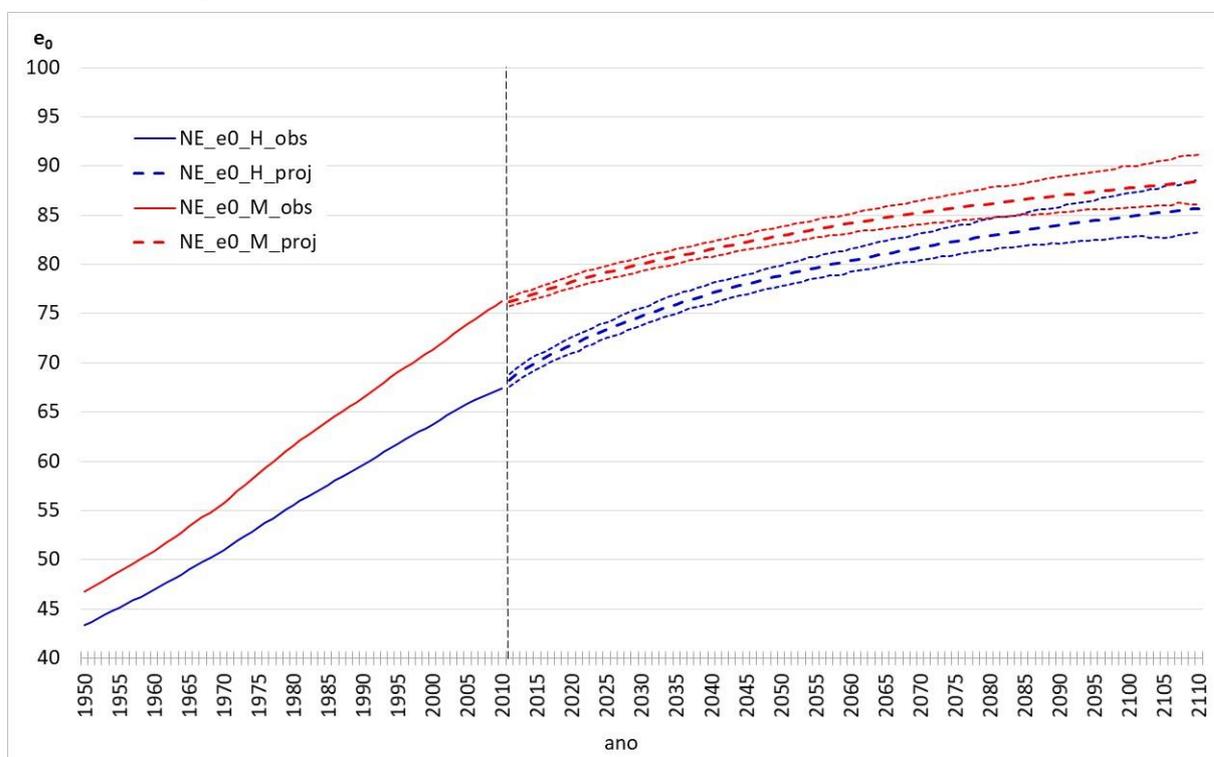
Gráfico 44 – Região Norte –  $nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Ambos

fonte: IBGE, Tábua de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

## 5.8.2) Projeções da Mortalidade para a Região Nordeste

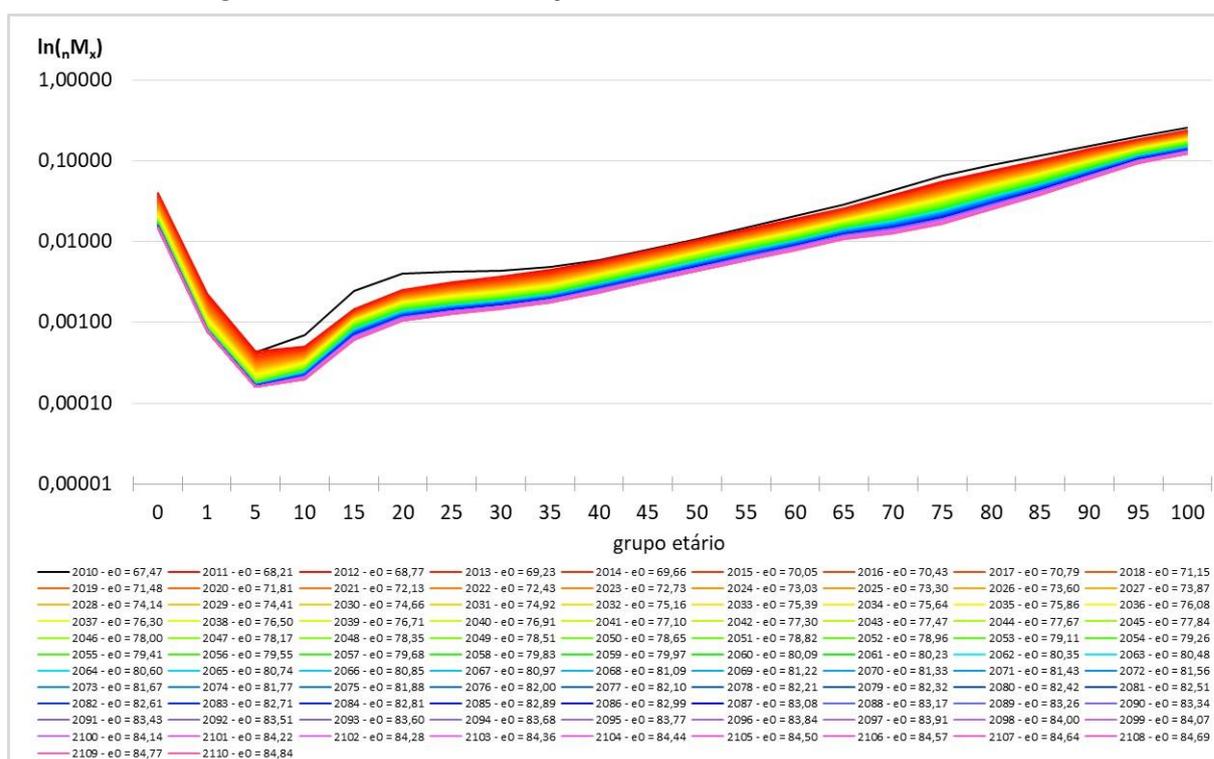
A seguir são apresentados os gráficos de  $e_0$ 's e  ${}_nM_x$ 's projetadas para a Região Nordeste.

Gráfico 45 – Região Nordeste –  $e_0$ 's Proj. IC95 – método coerente Hyndman – Homem e Mulher

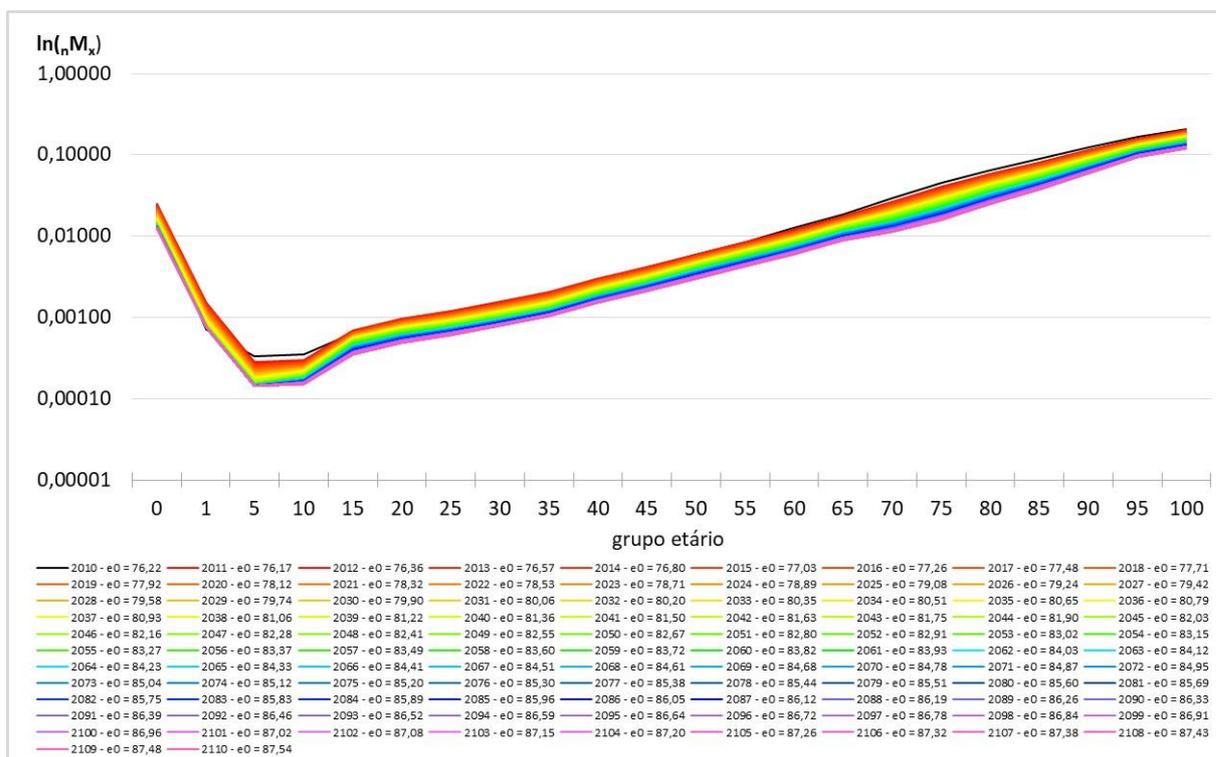


fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

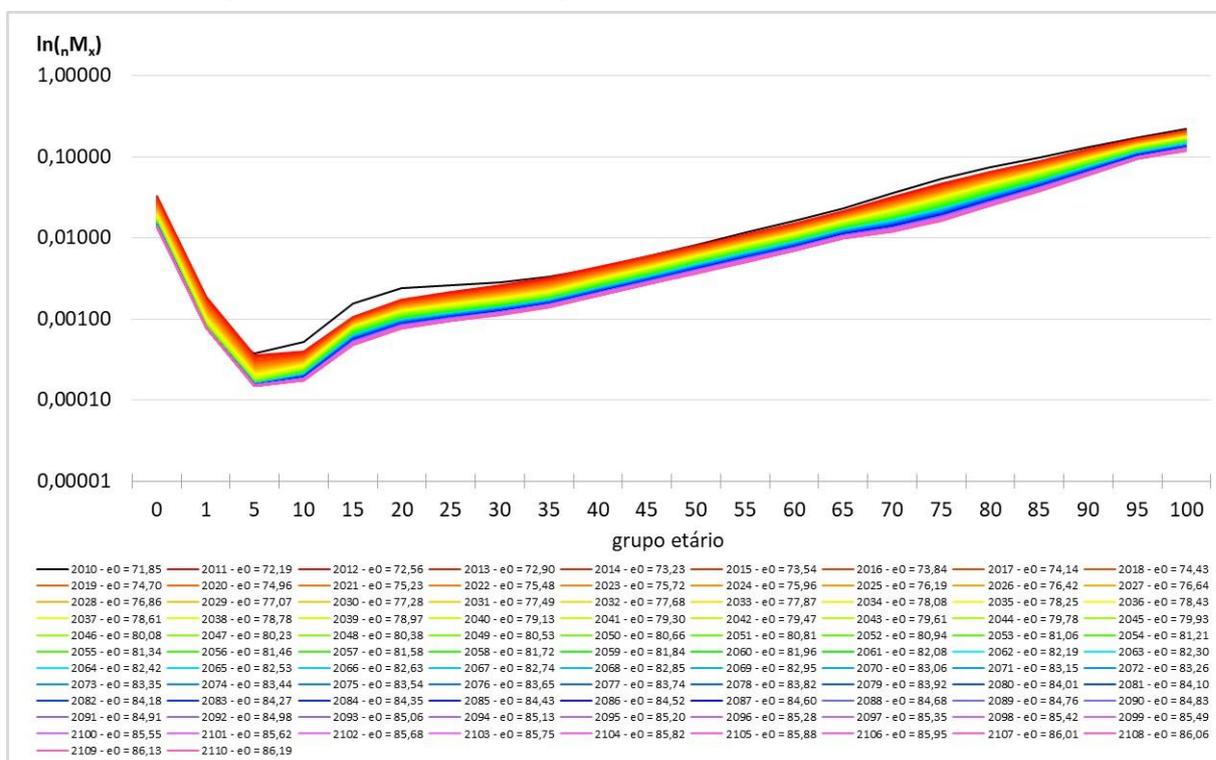
Gráfico 46 – Região Nordeste –  ${}_nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Homem



fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 47 – Região Nordeste –  $nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Mulher

fonte: IBGE, Tábua de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

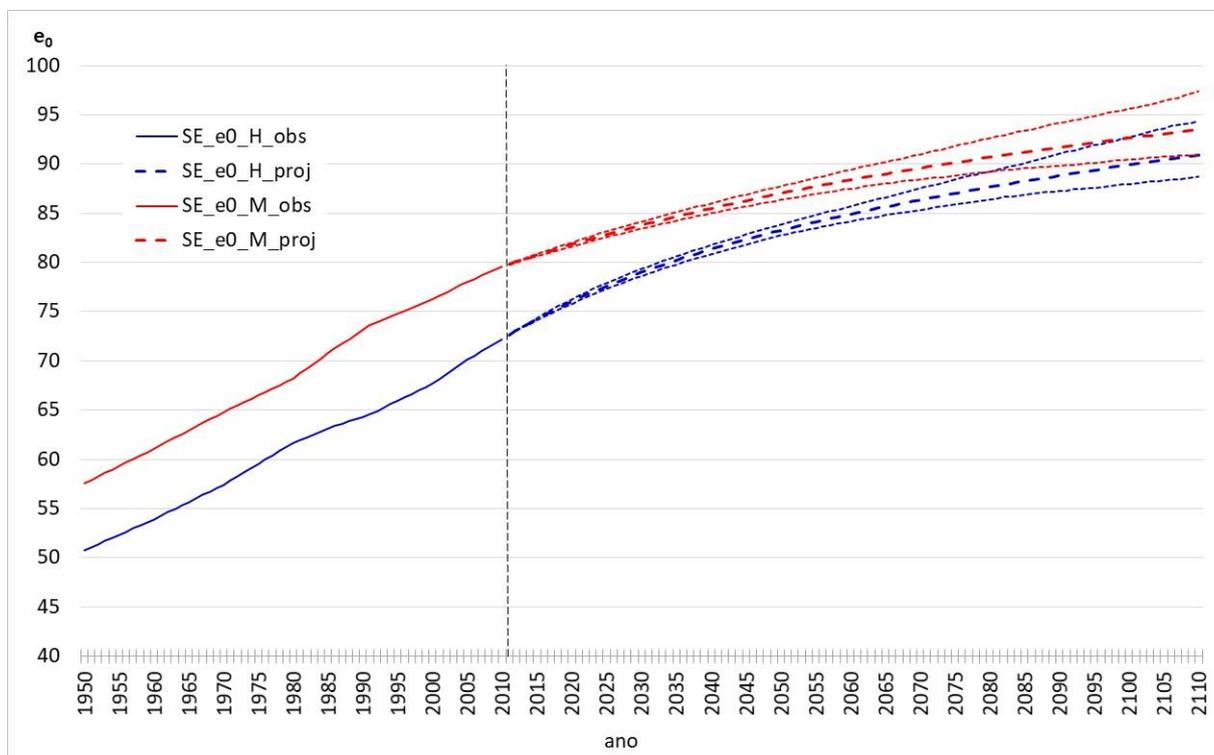
Gráfico 48 – Região Nordeste –  $nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Ambos

fonte: IBGE, Tábua de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

### 5.8.3) Projeções da Mortalidade para a Região Sudeste

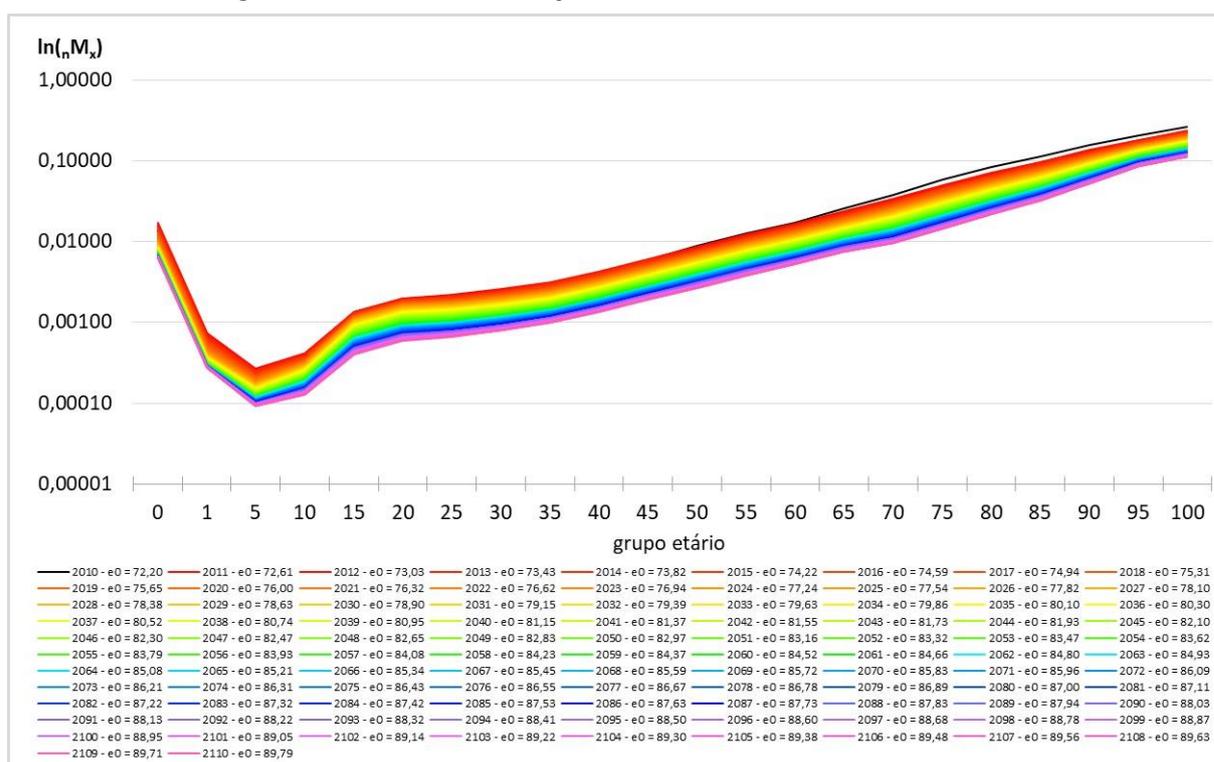
A seguir são apresentados os gráficos de  $e_0$ 's e  ${}_nM_x$ 's projetadas para a Região Sudeste.

Gráfico 49 – Região Sudeste –  $e_0$ 's Proj. IC95 - método coerente Hyndman – Homem e Mulher

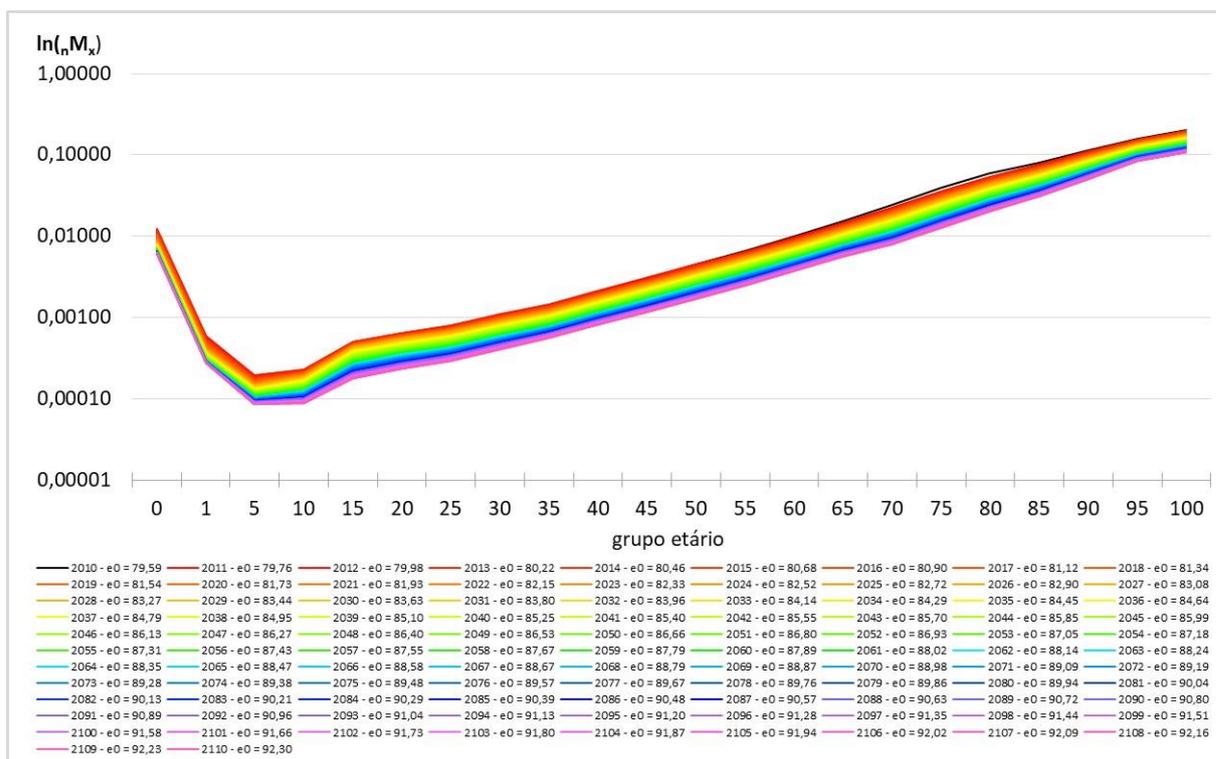


fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

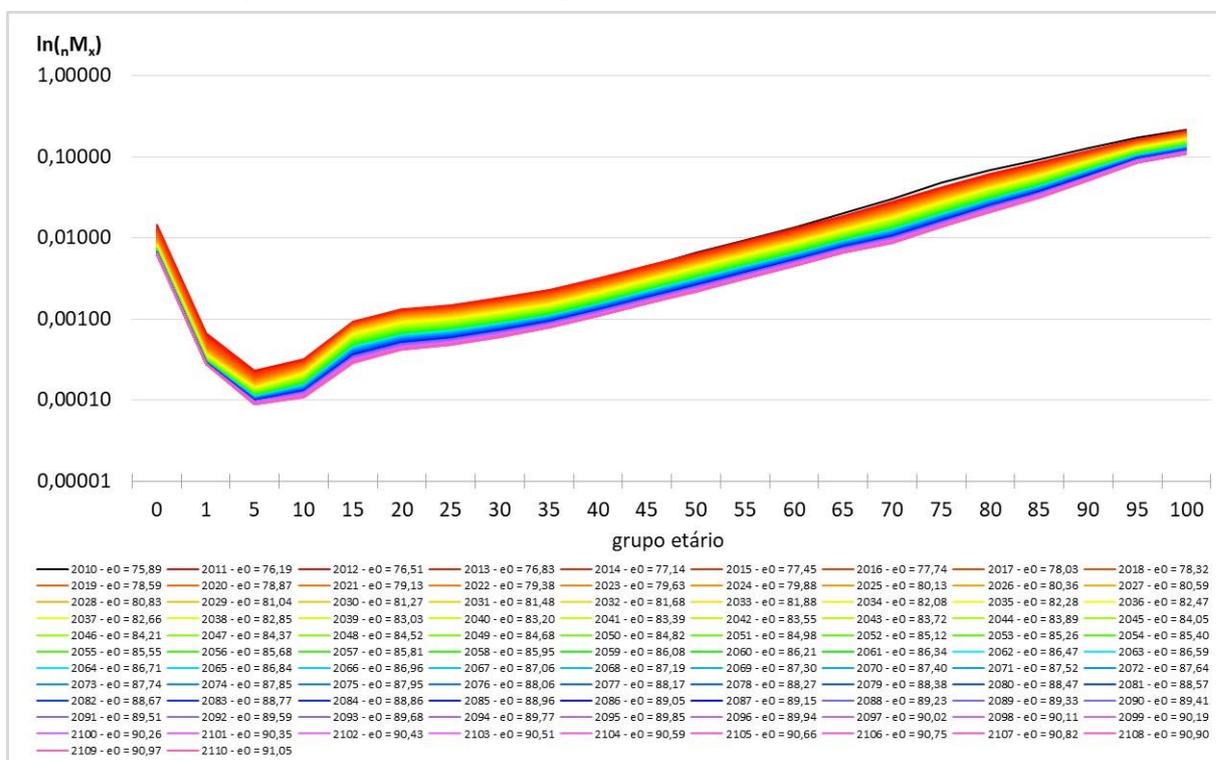
Gráfico 50 – Região Sudeste –  ${}_nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Homem



fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 51 – Região Sudeste –  ${}_nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Mulher

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

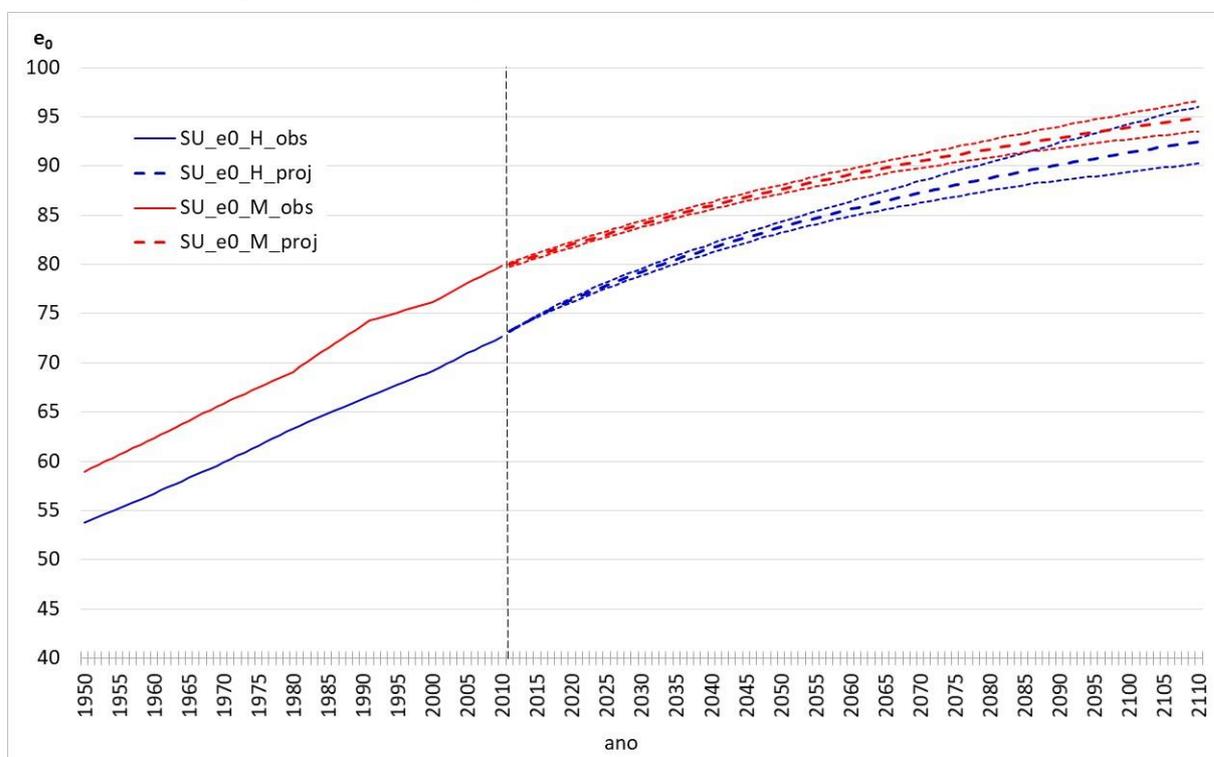
Gráfico 52 – Região Sudeste –  ${}_nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Ambos

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

### 5.8.4) Projeções da Mortalidade para a Região Sul

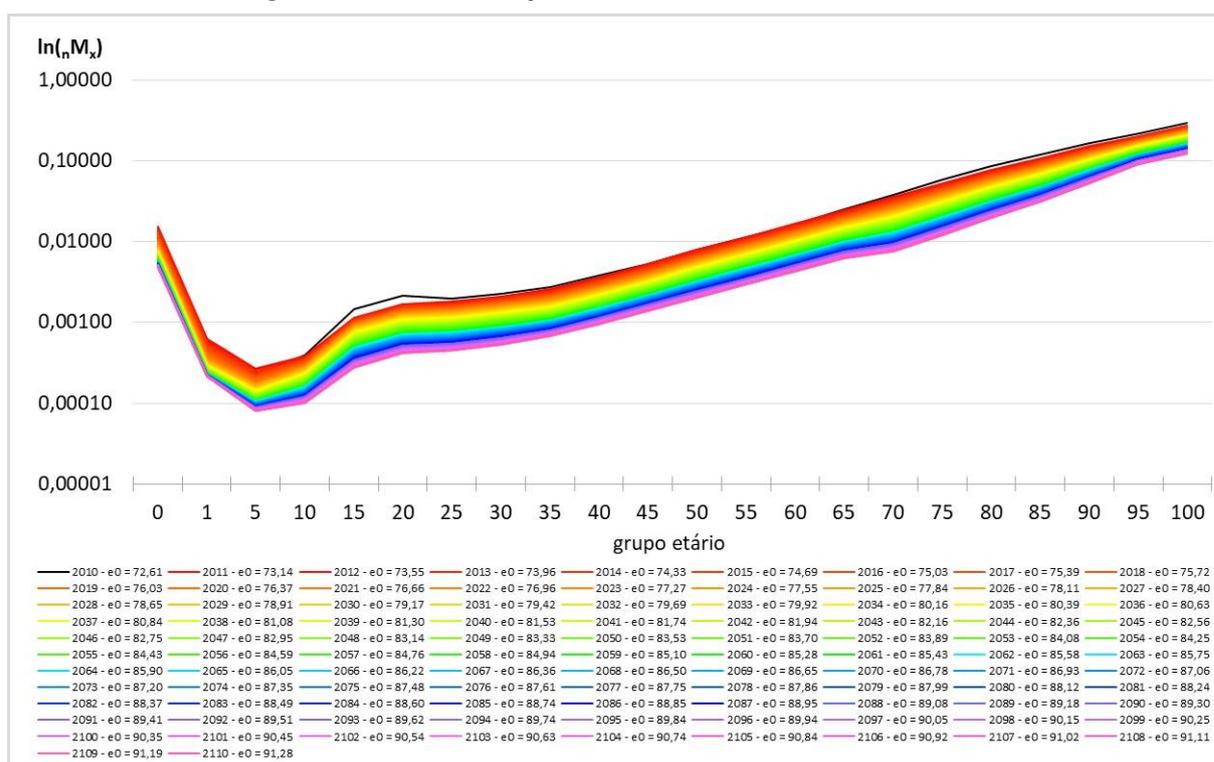
A seguir são apresentados os gráficos de  $e_0$ 's e  ${}_nM_x$ 's projetadas para a Região Sul.

Gráfico 53 – Região Sul –  $e_0$ 's Proj. IC95 - método coerente Hyndman – Homem e Mulher

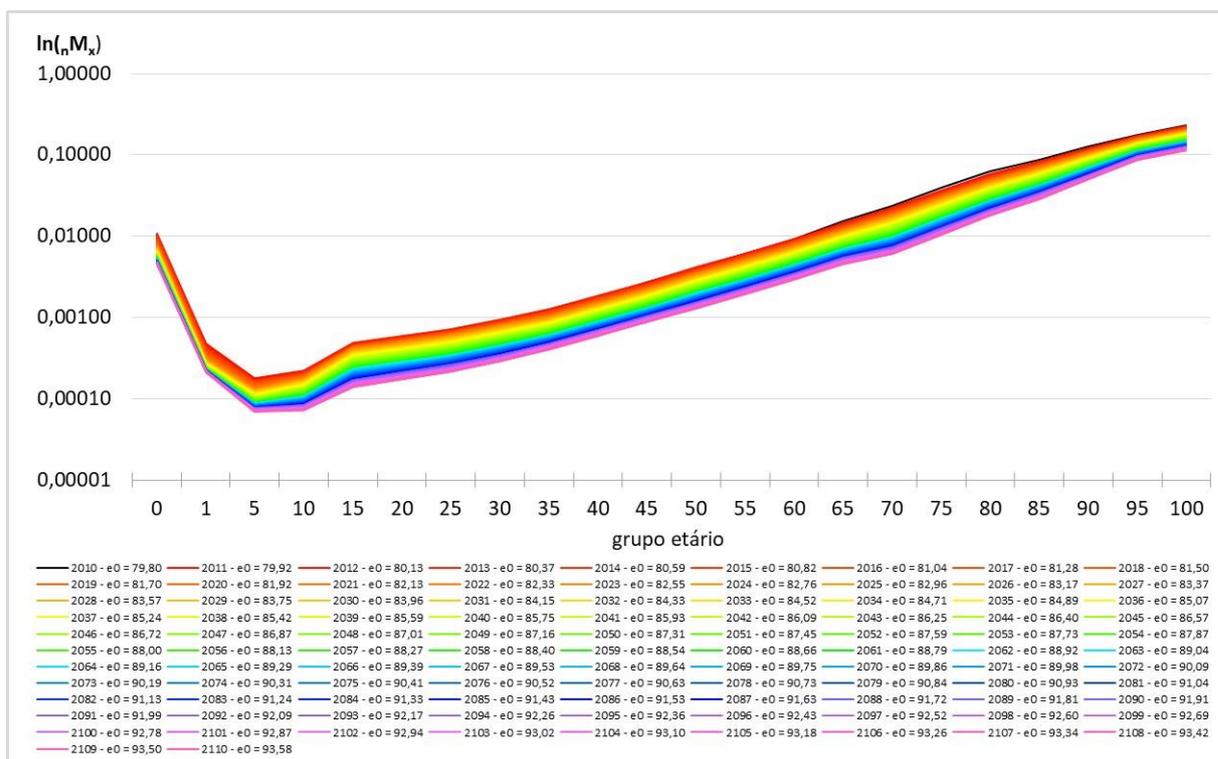


fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

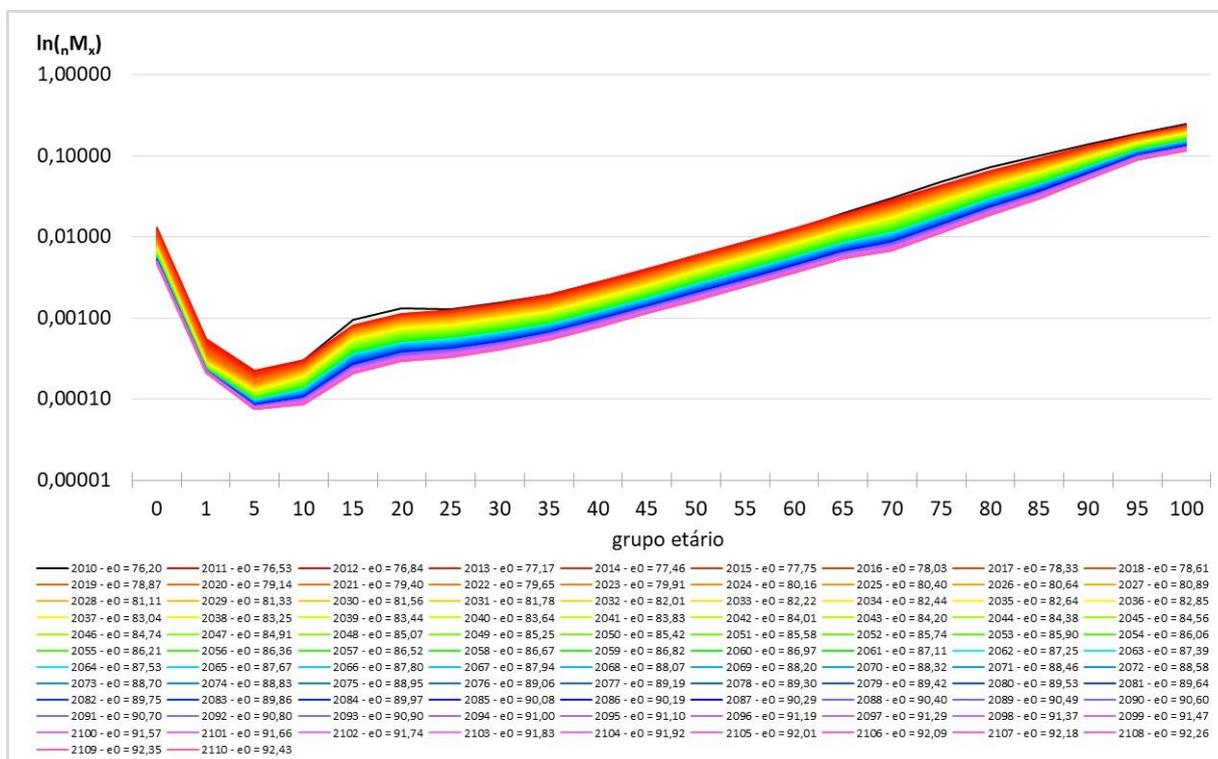
Gráfico 54 – Região Sul –  ${}_nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Homem



fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 55 – Região Sul –  $nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Mulher

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

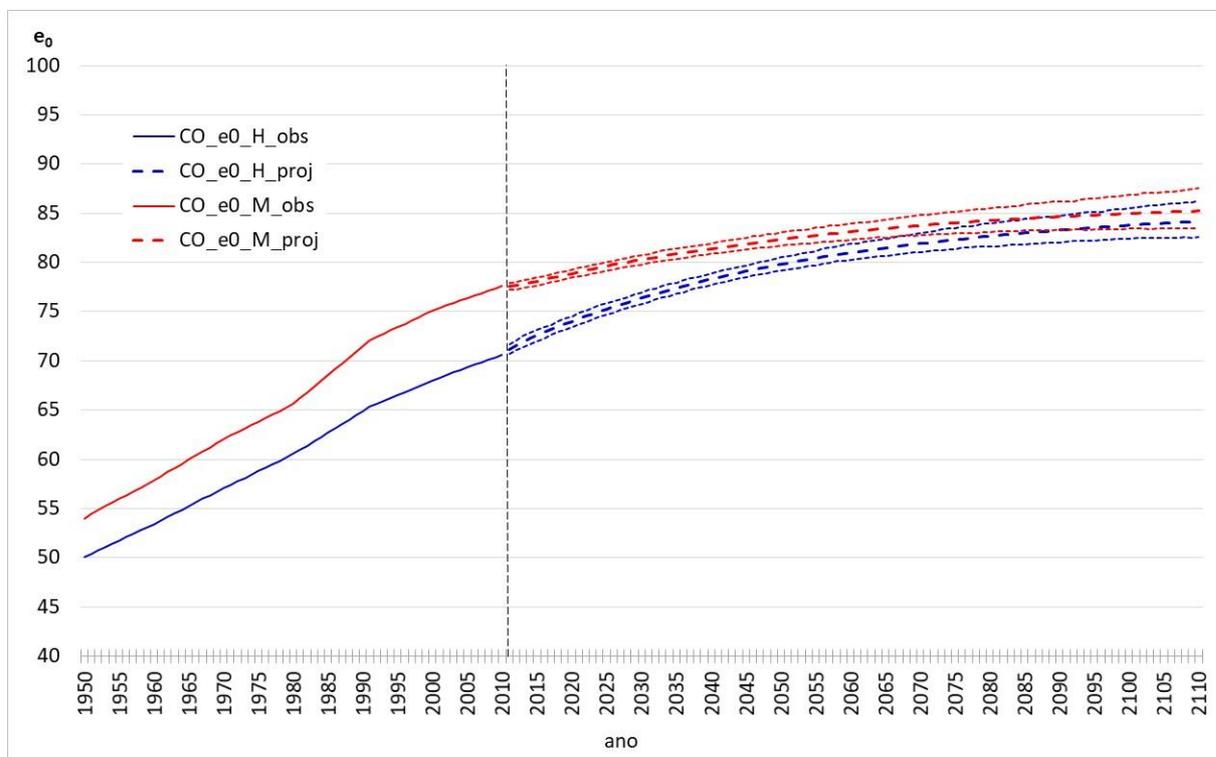
Gráfico 56 – Região Sul –  $nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Ambos

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

### 5.8.5) Projeções da Mortalidade para a Região Centro-Oeste

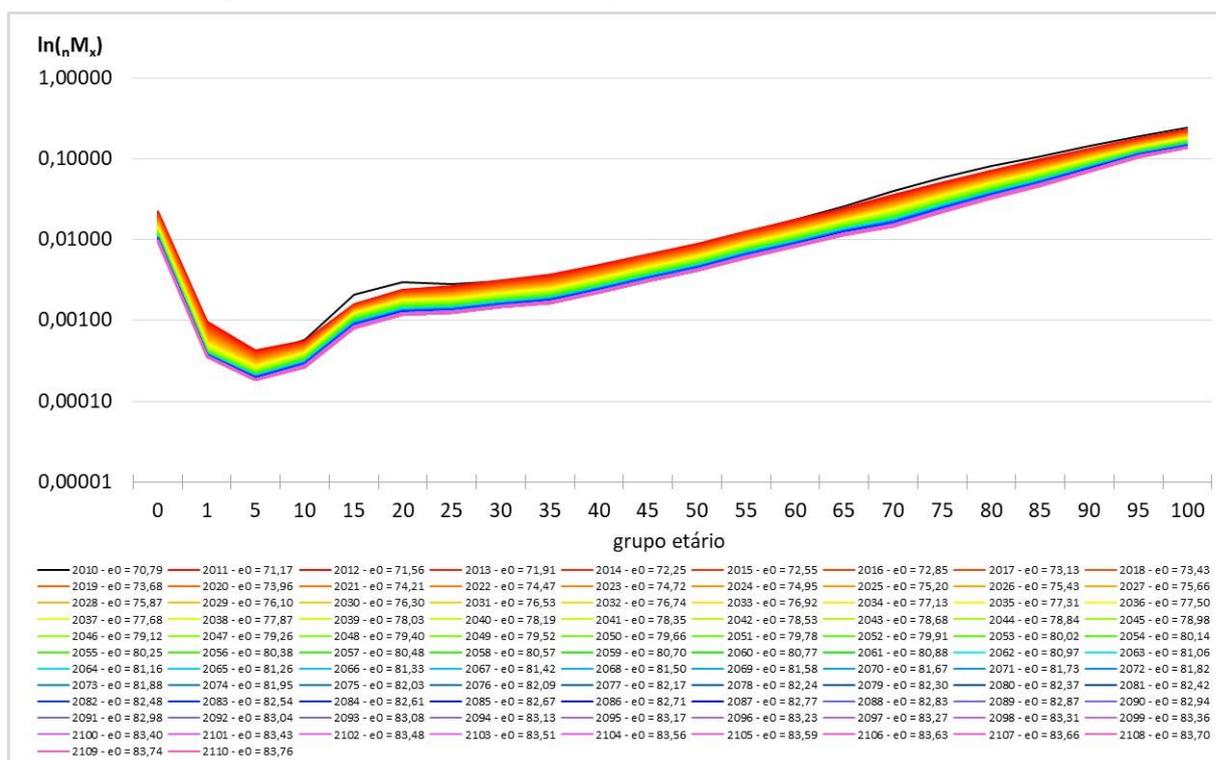
A seguir são apresentados os gráficos de  $e_0$ 's e  ${}_nM_x$ 's projetadas para a Região Centro-Oeste.

Gráfico 57 – Região Centro-Oeste –  $e_0$ 's Proj. IC95 – método Coer. Hyndman – Homem e Mulher

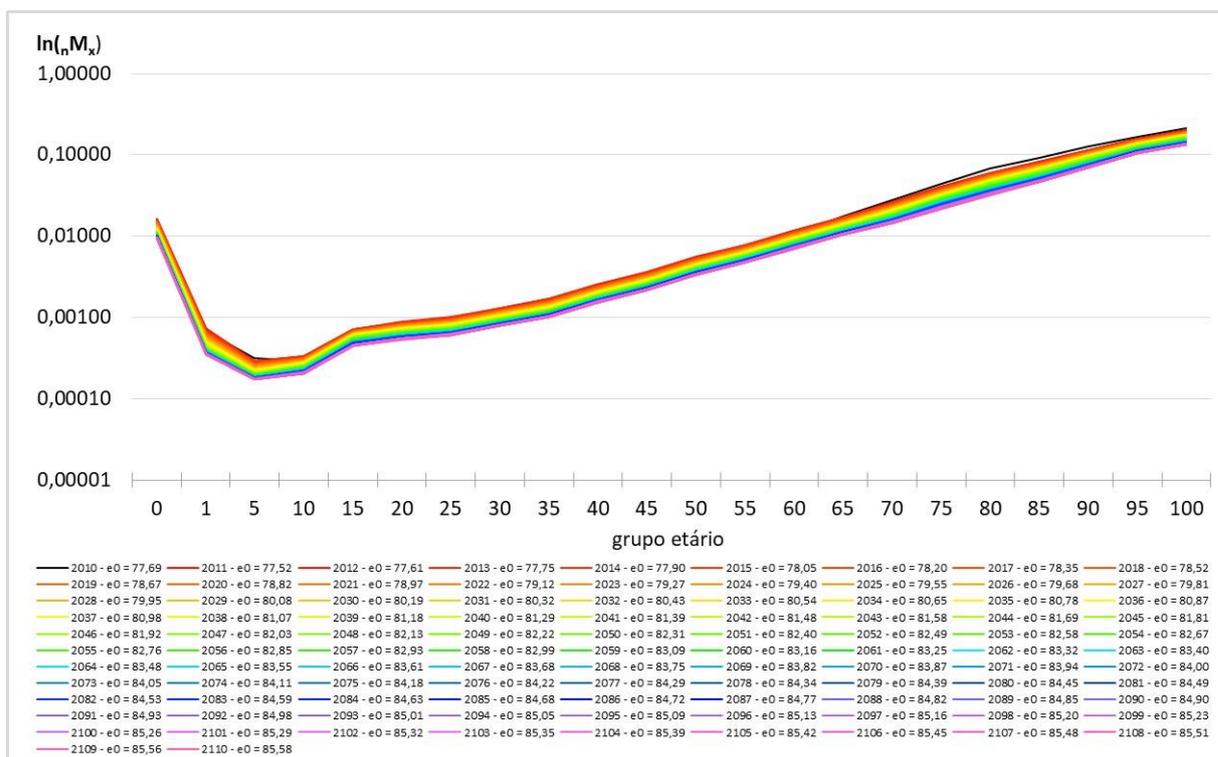


fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

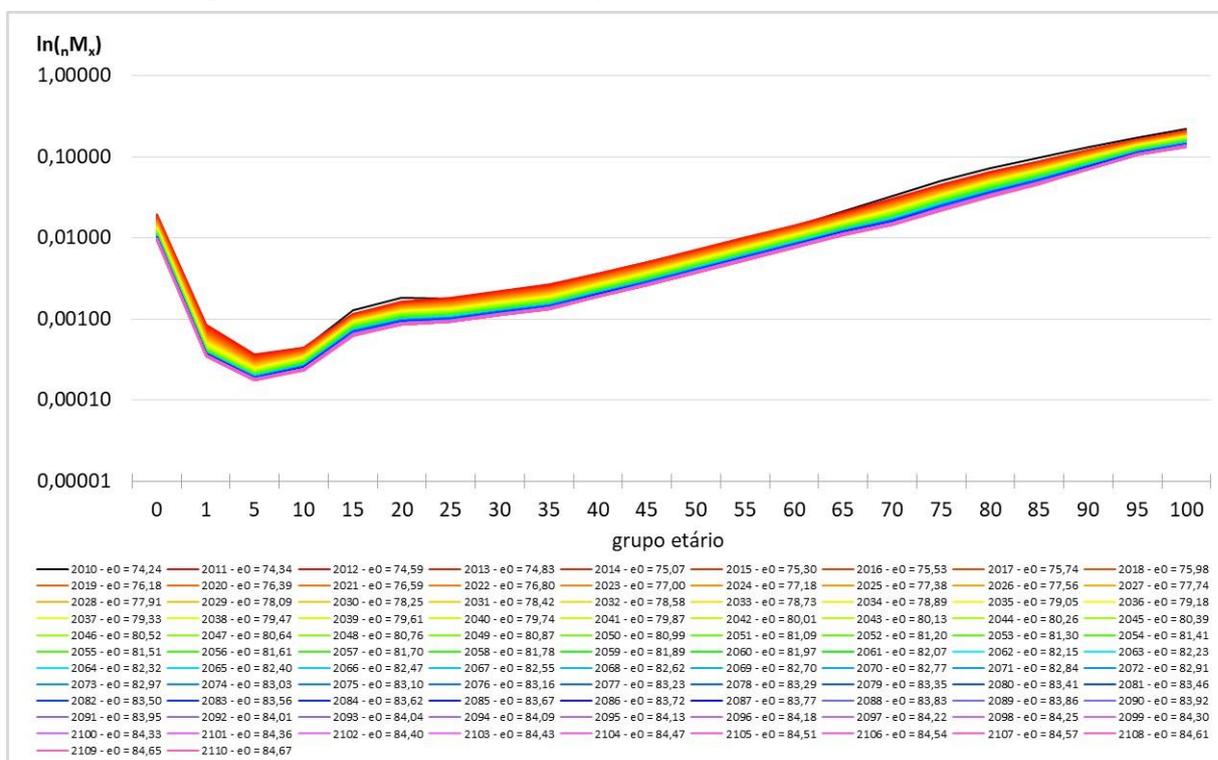
Gráfico 58 – Região Centro-Oeste –  ${}_nM_x$ 's Proj. método Li, Lee, & Gerland (2013) – Homem



fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 59 – Região Centro-Oeste –  $nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Mulher

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 60 – Região Centro-Oeste –  $nM_x$ 's Proj. método de Li, Lee, & Gerland (2013) – Ambos

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

### 5.8.6) Comparativo da $e_0$ projetada pelo método coerente de Hyndman para o Brasil e Grandes Regiões

Nesta seção, mostra-se um comparativo da  $e_0$  projetada, por sexo, para o Brasil e Regiões Norte, Nordeste, Sudeste, Sul e Centro-Oeste. O *Gráfico 61* e o *Gráfico 62* apresentam, para homens e mulheres, respectivamente, as  $e_0$ 's observadas/estimadas, no período histórico de 1950-2010, e aquelas projetadas, pelo método coerente de Hyndman, no período 2011-2110.

Para a **população masculina, em 1950**, o *ranking* da  $e_0$  estava assim composto: 1) Região Sul (53,73 anos); 2) Região Sudeste (50,73 anos); 3) Região Centro-Oeste (50,07 anos); 4) Região Norte (49,13 anos) 5) Brasil (48,61 anos); e 6) Região Nordeste (43,33 anos). **Em 2010** o *ranking* passou por uma ligeira alteração, com a Região Norte invertendo de posição com o Brasil: 1) Região Sul (72,62 anos); 2) Região Sudeste (72,21 anos); 3) Região Centro-Oeste (70,61 anos); 4) Brasil (70,42 anos); 5) Região Norte (67,80 anos); e 6) Região Nordeste (67,39 anos).

Ao longo dos 100 anos de projeção, o ordenamento histórico da  $e_0$  Sul > Sudeste > Brasil se manteve. A Região Nordeste sai de último lugar, no ano-base da projeção, ultrapassando a Região Norte e a Região Centro-Oeste. A Região Norte mantém a posição no *ranking* pois ultrapassa a Região Centro-Oeste. A Região Centro-Oeste sai de uma posição média no *ranking*, para a última posição. **Para 2110**, o *ranking* da  $e_0$  projetada ficou assim: 1) Região Sul (92,52 anos); 2) Região Sudeste (90,92 anos); 3) Brasil (89,31 anos); 4) Região Nordeste (85,70 anos); 5) Região Norte (84,81 anos); e 6) Região Centro-Oeste (84,18 anos). O *gap* entre a maior e a menor  $e_0$  para as cinco regiões e o país diminuiu ao longo dos anos históricos e projetados. Por exemplo, o *gap*, entre a maior (Região Sul) e a menor (Região Nordeste)  $e_0$ , em 1950, era de 10,40 anos. Já em 2010, o *gap*, entre a maior (Região Sul) e a menor (Região Nordeste)  $e_0$ , era de 5,22 anos. No último ano da projeção, 2110, o *gap*, entre a maior (Região Sul) e a menor (Região Centro-Oeste)  $e_0$ , seria de 8,34 anos, um aumento de 3,11 anos em relação ao *gap* do ano-base da projeção.

Para a **população feminina, em 1950**, o *ranking* da  $e_0$  estava assim composto: 1) Região Sul (58,96 anos); 2) Região Sudeste (57,54 anos); 3) Região Norte (54,22 anos); 4) Região Centro-Oeste (54,02 anos); 5) Brasil (53,71 anos); e 6) Região Nordeste (46,72 anos). **Em 2010**, o *ranking* passou por alterações, onde apenas as Regiões Sul e Sudeste mantiveram suas posições, sendo que as Regiões Centro-Oeste e Norte ficaram abaixo da média nacional: 1) Região Sul

(79,82 anos); 2) Região Sudeste (79,62 anos); 3) Brasil (78,20 anos); 4) Região Centro-Oeste (77,58 anos); 5) Região Nordeste (76,24 anos); e 6) Região Norte (74,70 anos).

Ao longo dos 100 anos de projeção, tal qual ocorrido entre os homens, o ordenamento histórico da  $e_0$  Sul > Sudeste > Brasil entre as mulheres, também se manteve. A Região Nordeste salta do penúltimo lugar, no ano-base da projeção, para o 4º lugar, em 2110, ultrapassando a Região Centro-Oeste. A Região Norte sai da última posição e também ultrapassa a Região Centro-Oeste, que passa para o último lugar no *ranking*. **Para 2110**, o *ranking* da  $e_0$  projetada ficou assim: 1) Região Sul (94,96 anos); 2) Região Sudeste (93,52 anos); 3) Brasil (91,55 anos); 4) Região Nordeste (88,44 anos); 5) Região Norte (88,03 anos); e 6) Região Centro-Oeste (85,24 anos). O *gap* entre a maior (Região Sul) e a menor (Região Nordeste)  $e_0$ , em 1950, era de 12,24 anos. O *gap* entre a maior (Região Sul) e a menor (Região Norte)  $e_0$ , em 2010, era de 5,12 anos. O *gap* entre a maior (Região Sul) e a menor (Região Centro-Oeste)  $e_0$ , em 2110, seria de 9,72 anos, um aumento de 4,60 anos em relação ao ano-base da projeção.

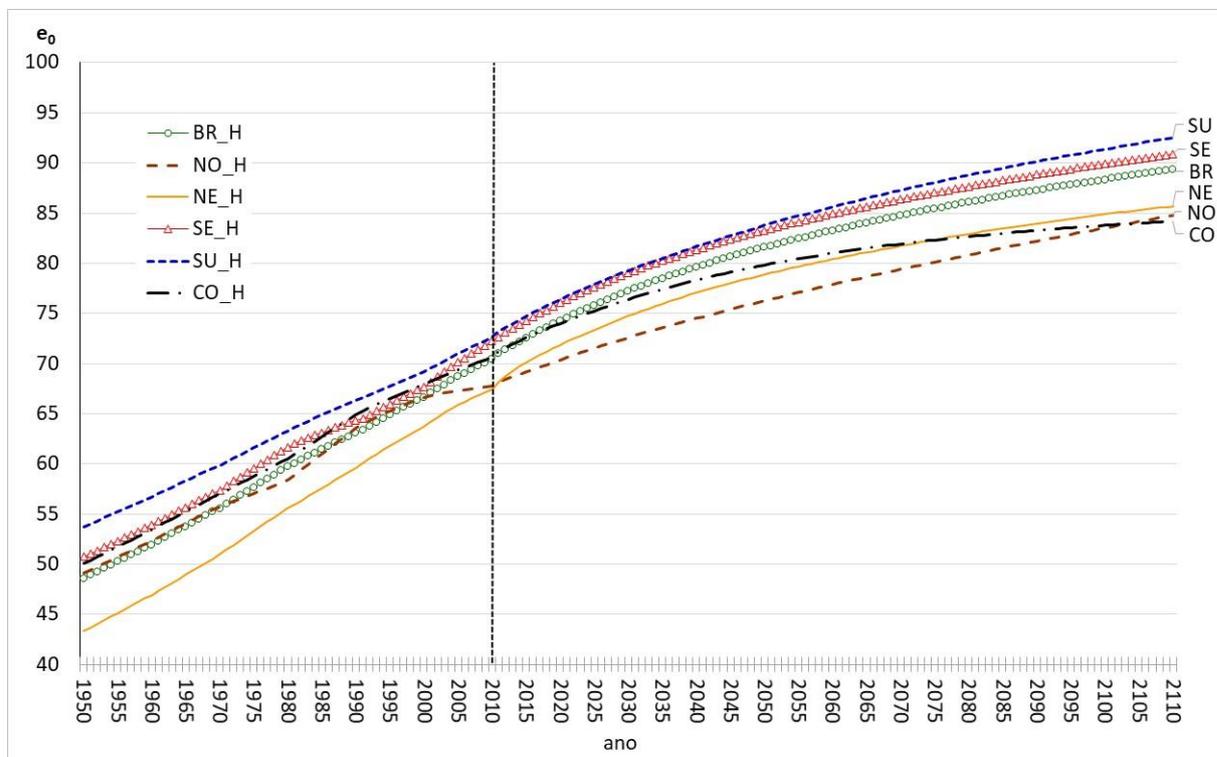
Tendo em vista as inversões no *ranking* de  $e_0$  das Grandes Regiões que ocorreriam ao longo do horizonte da projeção, até 2110, fica claro que, apesar dos resultados terem ficado coerentes por sexo, dentro de uma mesma Grande Região, a coerência em relação às Grandes Regiões entre si não se manteve, notadamente em relação ao posicionamento histórico da Região CO, comparado às outras Grandes Regiões. A evolução da curva da Região Centro-Oeste é a única que destoa das demais, como pode-se observar no *Gráfico 61* e *Gráfico 62*, a seguir. Apesar das projeções de  $e_0$  para todas as outras GR's terem ficado satisfatórias e até coerentes entre si, o fato do mesmo não ter acontecido com a Região CO representa uma limitação nas projeções aqui conduzidas. É difícil acreditar que o status histórico, *sempre próximo à média nacional*, observado na Região CO, se perca no futuro.

Apesar de Hyndman et al. (2013) sugerirem que uma extensão do método seria incorporar duas ou mais dimensões na definição do produto, a fim de obter coerência entre e dentro de cada dimensão<sup>56</sup>, a melhoria proposta ainda não foi implementada no pacote *Demography* do R, representando uma limitação para a projeção por sub-grupos populacionais. Uma possível alternativa seria realizar a projeção para a população total (ambos os sexos), buscando a coerência entre as Grandes Regiões e, depois, de alguma forma, decompor essas  $M_x$ 's, por sexo, procedimentos estes a serem desenvolvidos no futuro. Outra alternativa para tentar ajustar as projeções da Região CO, seria estudar se a adoção de outro período-base diferente de 1950-

<sup>56</sup> Por exemplo, sexo e Grande Região podem ser usados para prever coerentemente a mortalidade masculina e feminina na Grande Região e a mortalidade por Grande Região dentro de cada sexo.

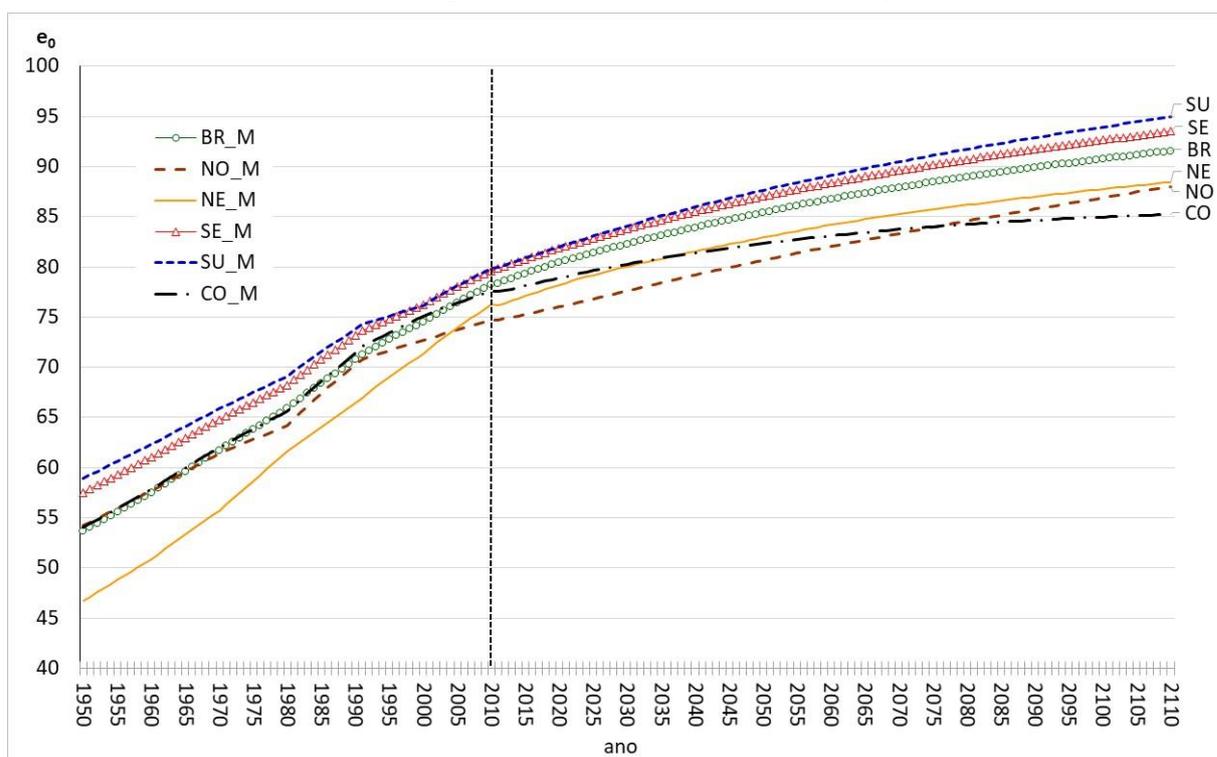
2010, resultaria em projeções coerentes não apenas entre sexos, mas, que a região mantivesse o seu status histórico de  $e_0$  próximo à média nacional.

Gráfico 61 – Brasil e Grandes Regiões –  $e_0$ 's Obs. 1950-2010 e Proj. 2011-2110 – Homem



fonte: IBGE, Tábua de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 62 – Brasil e Grandes Regiões –  $e_0$ 's Obs. 1950-2010 e Proj. 2011-2110 – Mulher



fonte: IBGE, Tábua de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

### **5.8.7) A busca pelo melhor método de projeção para países com altas taxas de mortalidade, como o Brasil**

O método de Lee-Carter, com suas variantes e extensões posteriores, são métodos extrapolativos amplamente aceitos e utilizados para a projeção da mortalidade e da expectativa de vida nos países desenvolvidos, devido à sua simplicidade e à disponibilidade de longas séries temporais de dados com alta qualidade, normalmente oriundos dos arquivos eletrônicos da *Human Mortality Database* (HMD).

Dada a existência de vários métodos estocásticos de projeção da mortalidade, é particularmente importante avaliar qual modelo seria o mais adequado em determinados contextos específicos. Normalmente, existe uma relação direta entre desenvolvimento, mortalidade e qualidade da base de dados: países desenvolvidos possuem baixa mortalidade e, geralmente, longas séries temporais anuais de dados com alta qualidade e por idade simples de 0 até 100+ anos (tábuas completas); países em desenvolvimento normalmente possuem alta mortalidade e curtas séries temporais, quando existentes, de dados, na maioria das vezes pontuais e para determinados anos específicos (anos censitários), com qualidade questionável, em virtude dos métodos indiretos utilizados na sua estimação, e por grupos quinquenais de idade (exceto os dois primeiros grupos), de 0-1, 1-4, 5-9 até 80+ anos (tábuas abreviadas). Em função das diferenças marcantes entre esses dois grupos de países, a proporção esmagadora de trabalhos realizados no âmbito da projeção da mortalidade, por métodos extrapolativos, está concentrada nos países com dados na HMD, notadamente os mais desenvolvidos e com baixa mortalidade.

Por exemplo, Booth et al. (2005 e 2006) e de Shang et al. (2010 e 2011) testaram diversas metodologias, mas apenas para países desenvolvidos e com baixa mortalidade geral e elevada expectativa de vida. Em contrapartida, foram poucas as tentativas para a aplicação de métodos extrapolativos de projeção com dados de países desenvolvidos, porém de mortalidade elevada, se comparado aos seus pares ocidentais, como no caso dos países da Europa Central e Oriental (p.e. Rabbi & Mazzuco, 2018), ou mesmo de países em desenvolvimento, com altas taxas de mortalidade (p.e. Diaz, Debón, & Giner-Bosch, 2018). Pensando nas projeções coerentes, a grande maioria dos exercícios conduzidos também teve, como foco, os países industrializados e de baixa mortalidade (p.e. vide Hyndman, Booth & Yasmeen, 2013; Li & Lee, 2005), com algumas poucas tentativas, mais recentes, com dados de países em desenvolvimento (p.e. vide Flici, 2016; Li, Lu, & Lyu, 2018).

Feitas essas considerações, a pergunta que surge é a seguinte: Qual seria o melhor método de projeção estocástica a ser aplicado num país de taxas relativamente altas de mortalidade, como o Brasil?

Em recente trabalho, Rabbi & Mazzuco (2018) aplicaram diversos métodos, dentro do arcabouço de Lee-Carter, disponibilizados no pacote *Demography* do R (Hyndman, 2017), a nove países de alta mortalidade do Leste Europeu (Bielorússia, Bulgária, Eslováquia, Estônia, Hungria, Letônia, Lituânia, Rússia e Ucrânia), tendo como base dados por idade simples, disponibilizados na *Human Mortality Database* (HMD), de óbitos e população exposta ao risco de morte (tábuas completas). Os autores detectaram que o desempenho dos modelos de projeção estocástica nesses países foi pior do que o observado nos países de baixa mortalidade, como os da Europa Ocidental. Nenhum modelo ofereceu, de forma única, o melhor desempenho para todos os países testados. A maioria das variantes de LC produziu projeções com expectativas de vida mais baixas do que os valores atuais observados. Além disso, a projeção coerente da mortalidade pelo método de Hyndman et al. (2013) não conseguiu superar as limitações existentes nas técnicas de projeção independente, devido ao aumento nas diferenças de mortalidade entre esses países, ao longo do período histórico que contempla as bases de dados utilizadas (divergência de mortalidade), principalmente a partir da década de 1950. Os autores concluíram que seria necessário a criação de um novo método de projeção para países de alta mortalidade, visto que nenhum dos modelos foi completamente adequado aos nove países testados, em virtude de não terem sido capazes de lidar com as irregularidades nas tendências de mortalidade observadas no curso da história.

Dentro da mesma linha de trabalho, porém mais próximo da realidade brasileira, Diaz et al. (2018) testaram, com dados de mortalidade da Colômbia de 1973-2005 (tábuas abreviadas), diversos métodos extrapolativos consubstanciados na ideia de Lee-Carter, nenhum deles coerente, utilizando as informações de óbitos e população disponibilizadas na *Latin American Human Mortality Database* (Urdinola & Queiroz, 2017). Foram utilizados os pacotes *gnm* (Turner & Firth, 2015) e *StoMoMo* (Villegas, Millossovich, & Kaishev, 2018) do R. De forma resumida, os autores concluíram que, apesar de alguns problemas de convergência ocorridos por conta de efeitos de corte, o modelo Lee-Carter com dois termos (LC2), que representa um caso particular do modelo proposto por Booth, Maindonald, & Smith (2002), forneceu o melhor ajuste para homens e mulheres.

Para o caso específico do Brasil, o trabalho conduzido nesta tese, ao testar nove métodos extrapolativos de projeção da mortalidade internacionalmente reconhecidos, sendo sete

independentes e dois coerentes, com uma série temporal de 1950 até 2010 de  $M_x$ 's construídas por idade simples de 0 até 100+ anos, e que deram origem às superfícies de mortalidade apresentadas, foi o primeiro realizado no país com essas características. Um aspecto importante é que as Tábuas de 1980, 1991, 2000 e 2010 do IBGE representam experiências genuinamente nacionais e em nível regional (Norte, Nordeste, Sudeste, Sul e Centro-Oeste).

Conforme mostrado anteriormente, infelizmente nenhum dos métodos de projeção da mortalidade aqui testados conseguiu, no longo horizonte de 100 anos utilizado, resultar em projeções satisfatórias para o binômio nível X padrão projetado, mesmo no caso da utilização do método coerente de Hyndman et al. (2013). Além disso, todos os métodos que projetam a mortalidade de forma independente, de homens e mulheres, apresentaram resultados divergentes, acarretando em  $e_0$ 's elevadíssimas no final da projeção, com aumento do *gap* entre sexos, resultado este entendido como não razoável no médio e longo prazos. Em função dos problemas detectados nos resultados da projeção com oito dos métodos aqui testados, optou-se pela técnica de projeção em dois estágios, através de dois métodos coerentes. No primeiro estágio, a expectativa de vida ao nascer ( $e_0$ ) foi projetada pelo método coerente de Hyndman et al. (2013), e no segundo, as taxas de mortalidade ( ${}_nM_x$ 's) foram projetadas pelo método coerente de Li, Lee, & Gerland (2013), conhecido como Lee-Carter estendido, onde ocorre a rotação (*rotation*) do  $b_x$  do modelo.

Algumas características básicas das  $M_x$ 's foram identificadas no Brasil, a partir do método de projeção final adotado. Por exemplo, foi observado o comportamento usual da taxa específica de mortalidade: mortalidade mais elevada na infância, diminuindo gradualmente até os 9-13 anos de idade e depois aumentando de forma monotônica à medida em que o indivíduo envelhece. No caso específico do Brasil, a mortalidade diminuiu significativamente, no período histórico de 1950 até 2010, em praticamente todas as idades, exceto naquelas em que as causas externas de mortalidade começaram a se destacar, a partir do Censo Demográfico de 1991, notadamente na população masculina dos 15 aos 39 anos de idade. O fenômeno do *accident hump* é observado principalmente na curva de mortalidade de homens, de 15 a 39 anos, o que é claramente visualizado nas projeções com os métodos extrapolativos testados. Esta sobre-mortalidade masculina é explicada principalmente pelos acidentes de trânsito, além dos homicídios ou agressões resultantes de atos violentos.

As projeções de indicadores demográficos e de mortalidade permitiram concluir que a população brasileira vem experimentando melhoria gradual em suas condições de vida. A expectativa de vida ao nascer continua sendo a medida mais conhecida de longevidade, entre

os demógrafos e atuários, e tem como características básicas a sua robustez e capacidade de refletir as mudanças na mortalidade ao longo do tempo. Considerando essas características, entende-se que o método de Hyndman et al. (2013) conduziu a resultados satisfatórios na projeção da  $e_0$  de homens e mulheres para o Brasil, no período de 2011-2110, utilizada no primeiro estágio da projeção. Em relação ao segundo estágio da projeção, entende-se, também, que o método de Li, Lee, & Gerland (2013) resultou em taxas projetadas com qualidade satisfatória, tendo sido ajustadas às  $e_0$ 's projetadas no primeiro estágio.

No caso específico da projeção da mortalidade para as Grandes Regiões, a técnica de projeção em dois estágios, aplicada ao Brasil, apresentou resultados satisfatórios nas Regiões Norte, Nordeste, Sudeste e Sul, não acontecendo o mesmo para a Região Centro-Oeste. Nas Regiões Norte, Nordeste, Sudeste e Sul, o *ranking* histórico de  $e_0$  e de nível comparativo das curvas de mortalidade manteve praticamente a lógica observada no ano-base da projeção, 2010, dentro daquilo o que se esperaria no futuro. Já em relação à Região Centro-Oeste, as projeções realizadas conduziram à menor  $e_0$  projetada para 2110, comparada às outras Grandes Regiões, de homens e mulheres, situação essa pouco provável de acontecer. Essa discrepância dos resultados da Região Centro-Oeste *vis-à-vis* às outras regiões, ocorreu em virtude das projeções terem sido aqui realizadas com foco na coerência entre sexos, e não com base na coerência entre Grande Regiões. Conforme já citado, possíveis alternativas para ajustar as projeções da Região CO, seriam: adotar a coerência entre as Grandes Regiões, a partir da mortalidade projetada para a população total (ambos os sexos) e, posteriormente, aplicar algum tipo de metodologia para decompor as taxas de homens e mulheres, ou adotar um outro período-base diferente de 1950-2010, que resulte em projeções consistentes, caso existente, mantendo o status histórico de  $e_0$  *próximo à média nacional* para a Região CO.

Os resultados obtidos no caso das projeções por Grande Região corroboram a necessidade da criação de uma nova metodologia, não apenas que melhor se ajuste aos dados dos países com alta mortalidade, como sugerido por Rabbi & Mazzuco (2018), mas que consiga, também, gerar projeções coerentes, considerando duas ou mais dimensões, como, por exemplo, sexo, Unidade da Federação, Grande Região e país, tal qual sugerido em Hyndman et al. (2013).

O próximo capítulo apresenta algumas aplicações atuariais realizadas com as projeções finais de mortalidade para o Brasil, onde foi calculada uma *proxy* para o Impacto do Risco de Longevidade nos diversos segmentos da previdência nacional, além de uma simulação, de natureza mais prática, considerando de uma base de dados fictícia de mais de 15.000 vidas.

## CAPÍTULO 6 - O RISCO DE LONGEVIDADE

As pirâmides populacionais do Brasil, apresentadas no Gráfico 1, mostram importantes mudanças ocorridas na dinâmica demográfica brasileira no passado. Em que pese o fato da queda da mortalidade no Brasil ter iniciado provavelmente desde a época do império ou mesmo a partir da virada para o século XX, o país só começou efetivamente a perceber os efeitos do envelhecimento populacional com a advento da queda da fecundidade, observado com mais intensidade a partir da década de 1970 e claramente visualizado nas informações do Censo Demográfico de 1991 e nos subsequentes, em 2000 e 2010, com o estreitamento da base da pirâmide populacional, em virtude do nascimento de um número relativamente menor de crianças quando comparado ao passado. Além disso, fica nítido o aumento na longevidade de homens e mulheres no Brasil ao longo dos anos, considerando o quantitativo cada vez maior de indivíduos atingindo idades avançadas, ao longo dos sete censos demográficos ocorridos no período 1950-2010. Esse aumento na longevidade das pessoas traz inúmeras implicações para a nossa sociedade e para o Estado Brasileiro, principalmente em relação às políticas públicas com foco na Seguridade Social, notadamente aquelas ligadas a Assistência à Saúde e à Previdência Social.

As projeções da mortalidade realizadas nesta tese mostram os prováveis caminhos a serem percorridos por essa importante componente da dinâmica demográfica para o Brasil. Em um cenário de fecundidade abaixo do nível de reposição como revelado no Censo Demográfico de 2010 (TFT de 1,87 filhos por mulher, em 2010 – IBGE 2013a), a componente mortalidade tem aumentado, cada vez mais, o seu peso no envelhecimento da população brasileira. Se, no passado, os maiores ganhos de mortalidade estavam concentrados na redução da mortalidade infantil e de crianças, atualmente são observados ganhos cada vez maiores em idades acima dos 60, 70 ou 80 anos (vide *Gráfico 5* e *Gráfico 6*), tanto para homens, quanto para mulheres, ficando muito claro que, ano após ano, os brasileiros tendem a viver cada vez mais. Por exemplo, as tábuas aqui ajustadas para o Brasil, por idade simples, em 2010, apontaram para uma  $e_0$  masculina, de 70,42 anos, e feminina, de 78,18 anos. Já as projeções para 2110 indicam uma  $e_0$  masculina de 88,26 anos e feminina de 90,94 anos, ou seja, espera-se um aumento de 17,83 anos para os homens e 12,76 anos para as mulheres em sua expectativa de vida ao nascer, ao longo dos próximos 100 anos, a partir de 2010. Apesar desse aumento na  $e_0$  ser considerado, até certo ponto, conservador, o mesmo é muito significativo e ocasionará grande impacto na previdência nacional, seja ela social ou complementar, principalmente quando a instituição

previdenciária não inclui, no cálculo de suas responsabilidades, a previsão do aumento na expectativa de sobrevida dos indivíduos, ano após ano.

O Risco de Longevidade descreve o risco de um indivíduo ou de grupo de pessoas viver uma vida mais longa do que o esperado (quando sua taxa de mortalidade é menor do que a esperada), enquanto o risco de mortalidade descreve o risco dessas pessoas viverem menos do que o previsto em determinada tábua de vida. Claramente, as seguradoras que operam no Ramo Vida estão interessadas em Risco de Mortalidade, enquanto que os provedores de anuidades, os planos de benefício definido e os programas de seguro social, como a Previdência Social, estão interessados em Risco de Longevidade (Cairns, 2013). Com isso, as melhorias substanciais ocorridas na longevidade dos indivíduos, durante o século XX, aumentaram a pressão sobre os governos e colocaram em xeque a forma de gerenciamento do Risco de Longevidade nas companhias seguradoras e nos chamados Fundos de Pensão (Blake & Morales, 2017), que, originalmente, calculavam as suas Reservas Matemáticas com base em taxas de mortalidade que subestimavam a sobrevivência dos seus participantes (Deng, Brockett, & MacMinn, 2012).

Segundo Cox et al. (2013), operar Planos de Benefício Definido (BD) envolve muitos riscos, visto que, independentemente do que acontecer nos mercados financeiros, e por quanto tempo os participantes irão viver após a sua aposentadoria, os Planos BD são os responsáveis pelo pagamento da renda de aposentadoria garantida. Nesse contexto, o Risco de Longevidade é reconhecido como a maior ameaça aos patrocinadores desses planos.

Para garantir a saúde financeira de longo prazo nos Planos de Previdência, os patrocinadores devem encontrar maneiras de mitigar o Risco de Longevidade. A gestão desse risco nos Planos Previdenciários tem atraído muita atenção de pesquisadores e estudiosos do tema ao redor do mundo (p.e. Cox, Lin, & Pedersen, 2010; Brcic & Brisebois, 2010; Cairns, 2013; Cox et al., 2013; Denuit, Haberman, & Renshaw, 2015). Esses autores discutem possíveis soluções para *hedging* e/ou gerenciamento do Risco de Longevidade, como o formato adequado do plano de benefícios, a compra de anuidades específicas com essa finalidade e a securitização do Risco de Longevidade. Neste trabalho, a ideia não é propor alternativas para mitigar ou controlar o Risco de Longevidade, mas calcular uma *proxy* para o seu impacto nas diferentes instituições previdenciárias brasileiras, dentro da linha dos trabalhos executados por Antolin (2007) e OECD (2014), todavia com resultados mais abrangentes e detalhados para o Brasil e Grandes Regiões, baseados em projeções da mortalidade mais robustas.

Neste capítulo serão feitas algumas considerações em relação à questão da Reforma Previdenciária no Brasil, bem como será realçado o problema que as entidades previdenciárias enfrentam, quando se trata do Risco de Longevidade inerente aos Planos de Benefícios concebidos na modalidade de Benefício Definido. Serão também apresentados os conceitos diferenciais entre  $e_x$  de período e de coorte, além da Tábua BR-Geracional construída para o Brasil, com base nas projeções da mortalidade realizadas no capítulo anterior.

O Impacto do Risco de Longevidade (IRL) foi mensurado de duas formas, uma mais teórica e outra prática. Os resultados teóricos do impacto do Risco de Longevidade levaram em consideração os diversos segmentos de entidades previdenciárias nacionais (EAPC's, EFPC's, RPPS's, FUNPRESP), e tomaram, como base, a razão entre as anuidades atuariais calculadas com tábuas dinâmicas (geracionais) X tábuas estáticas (*benchmarks*). Como exemplo de aplicação prática de utilização da tábua BR-Geracional, foi realizada uma simulação atuarial com uma base de dados fictícia, composta de servidores ativos, aposentados e pensionistas ligados a Regime Próprio de Previdência Social (RPSS). Finalizando o capítulo, são feitas as considerações finais sobre o Risco de Longevidade no Brasil, com um resumo dos principais resultados obtidos.

## **6.1) Risco de Longevidade e a Reforma da Previdência no Brasil**

Conforme citado, uma das grandes senão a maior das preocupações dos gestores profissionais de entidades previdenciárias que administram planos na modalidade de Benefício Definido (PBD), é a incerteza associada ao pagamento dos benefícios oferecidos. Essa incerteza em relação a “por quanto tempo realmente” o benefício previdenciário será pago a um conjunto de participantes segurados é justamente o que chamamos de Risco de Longevidade inerente àquele microssistema previdenciário.

O Risco de Longevidade dificilmente está contemplado nas projeções atuariais dos benefícios previdenciários (aposentadorias e pensões) realizadas no Brasil, visto que, na grande maioria dos cálculos atuariais, os indivíduos morrerão ou sobreviverão a uma probabilidade constante ao longo dos anos, situação essa improvável de ocorrer, entretanto resultante da utilização de tábuas estáticas.

O cenário de envelhecimento populacional, em primeiro lugar ocasionado por conta da queda da fecundidade e, mais recentemente, aliada ao aumento na sobrevivência das pessoas, tem fortes

implicações no perfil etário da população brasileira. Essas mudanças demográficas, conjugadas a outras, de caráter político e social, têm refletido na Previdência Social brasileira de forma negativa. Uma Reforma Previdenciária far-se-á necessária, de forma a promover adequação e equacionamento entre aquilo o que se arrecada em função das contribuições previdenciárias, e aquilo o que se gasta com o pagamento das aposentadorias e pensões.

Para mensurar a necessidade de adequação/reforma dos Sistemas Previdenciários em diversos países do mundo, aqui incluído o Brasil, duas pesquisas conduzidas por instituições internacionais constituem importantes referências: 1) o *Melbourne Mercer Global Pension Index (MMGPI)*, projeto iniciado em 2009 pelo *Australian Centre for Financial Studies (ACFS)*, na Universidade de Monash na Austrália, em colaboração com a consultoria Mercer; e 2) o *Pension Sustainability Index (PSI)*, criado pela Seguradora alemã Allianz. Ambos os estudos utilizam indicadores básicos muito parecidos para o cálculo do índice final, que representa uma *proxy* para o tamanho da necessidade de reforma previdenciária no país.

O *MMGPI*, do *ACFS*, utiliza, em sua metodologia de cálculo, um conjunto de diversos indicadores, agregados em três sub-indicadores macro, aos quais são atribuídos pesos (totalizando 100%), para a obtenção do índice final para o país. Os três sub-indicadores são classificados como: 1) ADEQUAÇÃO (características dos benefícios, *design* do sistema previdenciário, capacidade de poupança, apoio fiscal, propriedade de imóvel, capacidade de crescimento dos ativos financeiros) - peso de 40%; 2) SUSTENTABILIDADE (cobertura do sistema previdenciário, total de ativos financeiros, montante de contribuições, aspectos demográficos, endividamento público, potencial de crescimento econômico) - peso de 35%; e 3) INTEGRIDADE (regulação do sistema previdenciário, governança, proteção, comunicação, custos) - peso de 25%.

Em relação à metodologia de cálculo do *PSI*, da Seguradora Allianz, as variáveis para o cálculo do índice final também são agregadas em três sub-indicadores: 1) DEMOGRÁFICOS (razão de dependência de idosos); 2) SISTEMA PREVIDENCIÁRIO (tipo de plano, regime financeiro de financiamento, valor dos benefícios oferecidos, critérios de elegibilidade para requerimento do benefício, como tempo de contribuição e idade mínima, força de financiamento e capacidade de geração de fundos de reservas, etc); e 3) FINANÇAS PÚBLICAS (pagamentos dos benefícios e endividamento público em relação ao PIB; necessidade de financiamento público). Além dos três sub-indicadores, a Allianz adicionou uma 4ª dimensão, referente ao *momentum*

da reforma previdenciária, ou seja, se é provável que as reformas necessárias sejam implementadas de forma rápida.

Em linhas gerais, ambos os estudos, no que se refere ao Brasil, apontam que o Sistema Previdenciário será insustentável no longo prazo, situação essa potencializada pelo rápido envelhecimento populacional, aliado a uma alta taxa de reposição nos benefícios concedidos que, somados à grave crise econômica vivenciada, exerce impacto significativo nas finanças públicas. Como recomendações para a melhoria do Sistema Previdenciário brasileiro, os estudos aconselharam aumentar a idade mínima para a concessão do benefício integral, um paulatino aumento dessa idade mínima ao longo do tempo, um aumento do número de contribuintes via maior formalização do mercado de trabalho, e a introdução de um número mínimo de contribuições obrigatórias para a composição de uma poupança previdenciária, dentre outras sugestões.

Por exemplo, ao longo dos anos 2010 até 2017 (ACFS, 2017), o *Melbourne Mercer Global Pension Index (MMGPI)* calculado para o Brasil esteve sempre na faixa dos 50-60 pontos. O valor geral do referido índice em 2010 foi de 59,8, onde o Brasil ocupava a 8ª posição, entre 14 países analisados, tendo decrescido para 54,8, em 2017, ocupando, naquele ano, a 20ª posição, entre 30 países analisados. Em relação à performance, foi atribuído um grau “C” ao Brasil, o que significa dizer que o sistema previdenciário brasileiro possui algumas boas características, mas também apresenta grandes riscos e/ou deficiências, que devem ser solucionadas. Sem essas melhorias necessárias no sistema previdenciário, a eficácia e a sustentabilidade, a longo prazo, ficarão comprometidas.

Já no *ranking* do *PSI*, em 2014 (ALLIANZ, 2014), o Brasil ocupava a penúltima posição em relação a 50 países, a frente apenas da Tailândia. No estudo subsequente, em 2016 (ALLIANZ, 2016), o Brasil melhorou marginalmente sua posição relativa, tendo ficado na 50ª posição em relação a 54 países, a frente apenas da Grécia, Eslovênia, China e Tailândia.

Apesar dos estudos da *ACFS* e da *Allianz* constituírem riquíssimas fontes de informação acerca da situação dos sistemas previdenciários ao redor do mundo, em termos de um panorama geral, o retrato apresentado para cada um dos países tenderia a se agravar, caso fossem incluídos no cômputo dos índices, indicadores que contemplassem a questão do Risco de Longevidade, com base em projeções da mortalidade. Nesse sentido, é importante, mais uma vez, destacar o fundamental papel do Estado para o pleno conhecimento do montante dos recursos necessários

para o pagamento dos benefícios previdenciários num cenário de crescente expectativa de vida, como o observado no Brasil, referendado nas projeções da mortalidade conduzidas nesta tese.

A tábua BR-Geracional, apresentada na próxima seção, construída com base nas projeções da mortalidade realizadas até 2110, incorpora o paulatino ganho de sobrevida estimado para o futuro, levando em conta o Risco de Longevidade no Brasil, em termos médios nacionais, para homens e mulheres.

## **6.2) Mortalidade de Período X Coorte: A construção das Tábuas Geracionais para o Brasil**

Quando o IBGE divulgou, baseado nas tábuas abreviadas de mortalidade de 2010 (IBGE, 2013b), que a expectativa de vida ao nascer dos brasileiros era, à época, de 70,2 anos para os homens, e de 77,4 anos para as mulheres, a que pessoas essas  $e_0$ 's seriam aplicadas? Provavelmente nenhuma, ou poucas pessoas em específico, pois a expectativa de vida de período é uma medida teórica que se refere ao número médio de anos que viveriam os recém-nascidos de uma coorte hipotética de indivíduos, caso a mesma estivesse sujeita a um conjunto fixo de taxas específicas de mortalidade até a sua extinção, no caso, às taxas específicas de mortalidade, correntes, de 2010. Apesar de ser uma medida teórica, a principal virtude da  $e_0$  e das  $M_x$ 's de período é a sua rápida e fácil disponibilidade (Goldstein & Wachter, 2006). Todavia, a real sobrevivência de uma coorte específica de indivíduos só pode ser obtida a partir das mortes observadas na referida coorte (Preston, Heuveline, & Guillot, 2001).

Apesar das expectativas de vida de coorte e de período medirem o tempo de vida esperado, as mesmas são fundamentalmente diferentes. A  $e_x$  de período refere-se ao número médio de anos a serem vividos pelos indivíduos de uma coorte sintética ou hipotética, e a  $e_x$  de coorte, ao número médio de anos vividos pelos indivíduos de uma coorte real, nascida em determinado ano "t". Se a mortalidade está declinando em uma população específica, a  $e_x$  da coorte de recém-nascidos será maior do que a  $e_x$  de período, porque as futuras melhorias serão incluídas no seu cômputo (Kjærgaard & Canudas-Romo, 2017).

Medidas de mortalidade de coorte são sempre preferíveis as de período, todavia o grande entrave para a sua obtenção diz respeito ao longo horizonte de tempo de espera, de um século ou mais, até que morra o último indivíduo da referida coorte e os cálculos possam efetivamente ser realizados. Nos últimos anos, diversos estudos (p.e. Canudas-Romo & Schoen, 2005;

Goldstein & Wachter, 2006; Missov & Lenart, 2011; Shkolnikov et al., 2011; Kjærgaard & Canudas-Romo, 2017) detectaram que a expectativa de vida de coorte é maior que a expectativa de vida de período, num regime de mortalidade declinante, tal como o observado no caso brasileiro em função do *Gráfico 5* e *Gráfico 6* anteriores, bem como nas superfícies de mortalidade construídas (vide *Gráfico 10*, *Gráfico 11* e *Gráfico 12*).

No caso específico das instituições previdenciárias, a diferença entre a  $e_x$  de coorte e a de período, resultará em impactos em suas responsabilidades atuariais, visto que as mesmas são calculadas com base na sobrevivência média dos indivíduos, advinda normalmente de tábuas estáticas. As tábuas geracionais (de coorte) têm o papel de representar, de forma prospectiva, a experiência de mortalidade de uma coorte específica, incorporando o paulatino ganho de sobrevivência dos indivíduos ano após ano, pois são construídas com base em projeções da mortalidade. As instituições previdenciárias que realizam os cálculos das suas Reservas Matemáticas com base em tábuas estáticas, sem incorporação da projeção futura da mortalidade, subestimam, de forma substancial, essas responsabilidades (Dushi, Friedberg, & Webb, 2010). Uma possível solução seria estimar a mortalidade para aquela coorte de indivíduos, com base numa perspectiva futura ou numa medida prospectiva (Kjærgaard & Canudas-Romo, 2017).

A utilização de tábuas geracionais é fundamental para uma melhor quantificação das Reservas Matemáticas, incluindo, assim, nos cálculos atuariais o padrão esperado do *improvement* futuro nas taxas de mortalidade. Além disso, as tábuas geracionais de mortalidade não necessitam ser atualizadas a todo momento, tal qual é feito frequentemente com as tábuas estáticas, pela inclusão das informações mais recentes de mortalidade (AAA, 2015).

Existem diversas referências bibliográficas com as fórmulas matemáticas para o cálculo da expectativa de vida de período, na idade  $x$  e em determinado ano  $t$ . Por exemplo, em Preston et al. (2001, cap.3) temos que  $e_{x,t} = T_{x,t}/l_{x,t}$ , onde  $l_{x,t}$  representa o número de sobreviventes com idade  $x$  de uma coorte hipotética  $l_{0,t} = 100.000$  nascimentos e  $T_{x,t}$  representa o número de pessoas-ano vividos pela população com idade  $x$ . Aqui a expectativa de vida da coorte será construída pelo mesmo procedimento, mas com a reestruturação do número de sobreviventes ( $l_x$ ) ano após ano, considerando o resultado das projeções da mortalidade conduzidas nesta tese. Em vez de utilizar as taxas de mortalidade para o mesmo ano, a  $e_x$  de coorte ou da tábua

geracional utiliza o número de sobreviventes ( $l_x$ ), seguindo as diagonais no diagrama Lexis<sup>57</sup> (vide Rau et al., 2018; Tesárková & Kurtinová, 2018) correspondente aos anos de nascimento específicos. Cada ano, de 2010 até 2110, teoricamente falando, representarão anos de nascimento de coortes, ao invés de anos civis.

Uma projeção da mortalidade cria uma tábua geracional diferente para cada ano projetado de coorte de nascimentos. Por exemplo, a taxa de mortalidade na idade de 60 anos de uma pessoa que possui, atualmente 35 anos, será a taxa de mortalidade a ser observada na idade de 60 anos, com 25 anos de projeção aplicados, através da tábua de sobrevivência da coorte nascida há 35 anos atrás. Da mesma forma, a taxa de mortalidade na idade de 65 anos de uma pessoa que possua atualmente 50 anos será aquela observada, aos 65 anos de idade, com 15 anos de projeção aplicados, e assim sucessivamente.

Feitas essas considerações, foi construída a tábua geracional completa (0 - 100+ anos) para o Brasil, com base nas projeções aqui realizadas no horizonte 2011-2110, estimando, assim, uma *proxy* para o que seria a mortalidade das coortes de indivíduos nascidos a partir do ano-base das projeções em 2010. O Quadro 3 ilustra, de forma didática, dentro da ideia do diagrama de Lexis, em termos da função  $l_x$ , o que seria uma tábua estática (coluna em destaque em amarelo) e uma tábua geracional ou dinâmica (diagonal em destaque em verde). Análise análoga pode ser feita utilizando as funções  $q_x$  e  $M_x$  de uma tábua de mortalidade. Como as tábuas foram projetadas por idades simples (0 até 100+ anos), no horizonte de 100 anos, de 2011 até 2110, a partir do ano-base 2010, a única tábua geracional completa que pôde ser construída foi a da coorte nascida em 2010, representada pela *linha diagonal em verde*, no quadro a seguir.

---

<sup>57</sup> Técnica gráfica atribuída ao estatístico alemão Wilhelm Lexis, utilizada para revelar a relação entre idade, tempo e mudança populacional, com aplicações específicas em análise de coortes de indivíduos, construção de tabelas de vida e estimativas de população.

Quadro 3 – Nº Sobreviventes Tábua Estática (Período) X Tábua Geracional (Coorte)

Idade (x)	Ano Calendário e Ano da Projeção (t)									
	2010 (0)	2011 (1)	2012 (2)	2013 (3)	·	·	·	2108 (98)	2109 (99)	2110 (100)
0	$l_0$	$l_0$	$l_0$	$l_0$	$l_0$	$l_0$	$l_0$	$l_0$	$l_0$	$l_0$
1	$l_1$	$l_1$	$l_1$	$l_1$	$l_1$	$l_1$	$l_1$	$l_1$	$l_1$	$l_1$
2	$l_2$	$l_2$	$l_2$	$l_2$	$l_2$	$l_2$	$l_2$	$l_2$	$l_2$	$l_2$
3	$l_3$	$l_3$	$l_3$	$l_3$	$l_3$	$l_3$	$l_3$	$l_3$	$l_3$	$l_3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
98	$l_{98}$	$l_{98}$	$l_{98}$	$l_{98}$	$l_{98}$	$l_{98}$	$l_{98}$	$l_{98}$	$l_{98}$	$l_{98}$
99	$l_{99}$	$l_{99}$	$l_{99}$	$l_{99}$	$l_{99}$	$l_{99}$	$l_{99}$	$l_{99}$	$l_{99}$	$l_{99}$
100+	$l_{100}$	$l_{100}$	$l_{100}$	$l_{100}$	$l_{100}$	$l_{100}$	$l_{100}$	$l_{100}$	$l_{100}$	$l_{100}$

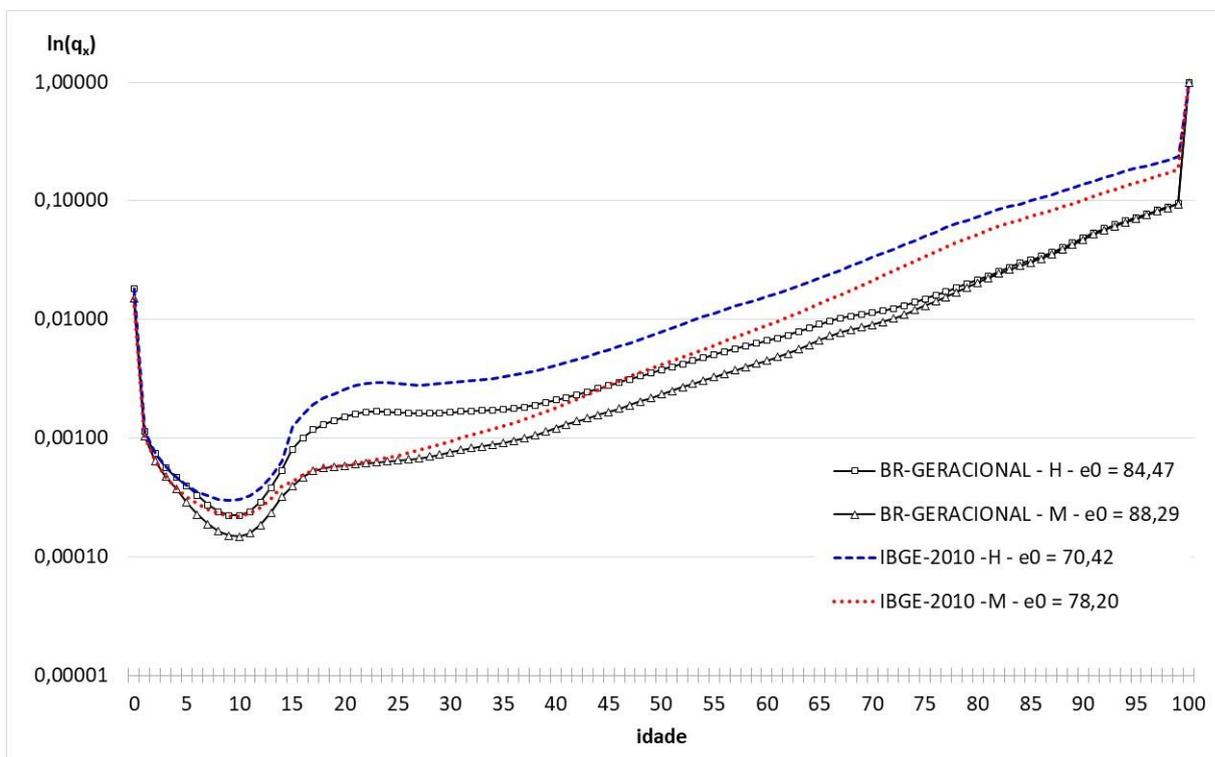
fonte: desenvolvido pelo autor

Como a aplicação do método de Li, Lee, & Gerland (2013), utilizando o pacote *Mortcast* (Sevcikova, Li, & Gerland, 2018) do R, resultou em taxas de mortalidade por grupos quinquenais de idade (0-1, 1-4, 5-9,....., 95-99, 100+), o arcabouço metodológico descrito na seção 3.3.2 foi, mais uma vez, aplicado para a obtenção das tábuas por idade simples. Para as tábuas, por idade simples, de 2010 até 2110, foram construídas as tábuas geracionais, considerando a diagonal em verde no quadro anterior. Como a diagonal do ano-base 2010 é a única que abarca todos os 100 anos projetados, a mesma foi utilizada para a construção da tábua batizada como BR-Geracional (completa). O ANEXO 6 apresenta as referidas tábuas geracionais de mortalidade construídas para o Brasil, para homens, mulheres e ambos os sexos.

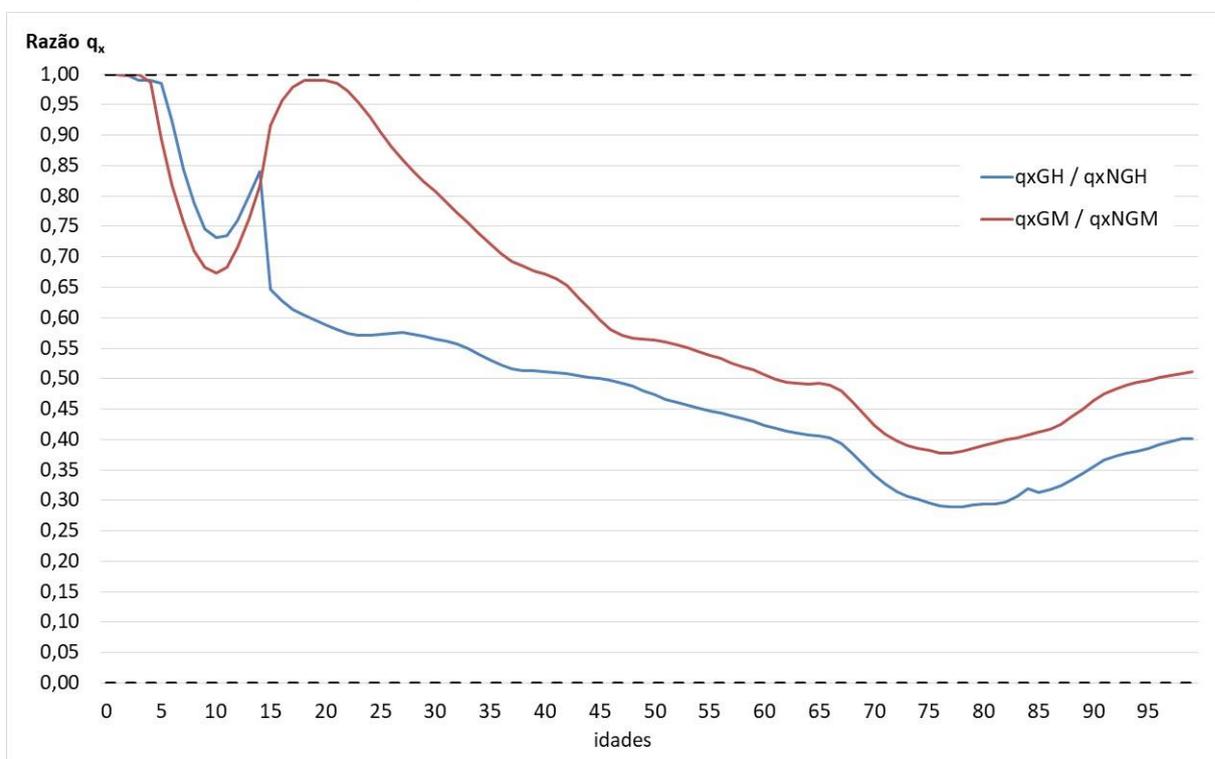
O *Gráfico 63* apresenta o  $q_x$  da Tábua BR-Geracional e da tábua de 2010, referente ao ano-base das projeções, para homens e mulheres. O *Gráfico 64* apresenta a razão entre os referidos  $q_x$ . Como já esperado, as tábuas geracionais correspondem a níveis de mortalidade bem abaixo daqueles da tabela de vida de 2010, representando níveis maiores de sobrevivência em todas as idades.

A  $e_0$  da tábua BR-Geracional (coorte de 2010) foi calculada em 84,47 anos, para os homens, e 88,29 anos, para as mulheres, 14,05 e 10,09 anos maior do que a  $e_0$  das tábuas do ano-base em 2010 (homens  $e_0 = 70,42$  anos e mulheres  $e_0 = 78,20$  anos). Chama a atenção o *gap* entre a  $e_x$  da tábua geracional e da tábua estática, nas idades onde normalmente se inicia o pagamento dos benefícios de aposentadoria (60 ou 65 anos). A  $e_{60}$  da tábua geracional aponta 31,84 anos, para os homens, e 33,10, para as mulheres, valores esses respectivamente 12,26 e 9,58 anos maiores do que a  $e_{60}$  das tábuas do ano-base de 2010 (homens  $e_{60} = 19,58$  anos e mulheres  $e_{60} = 23,52$  anos). Já a  $e_{65}$  da tábua geracional foi calculada em 27,96 anos, para os homens, e 28,91, para as mulheres, valores esses respectivamente 11,76 e 9,26 anos maiores do que a  $e_{65}$  das tábuas do ano-base de 2010 (homens  $e_{65} = 16,20$  anos e mulheres  $e_{65} = 19,65$  anos).

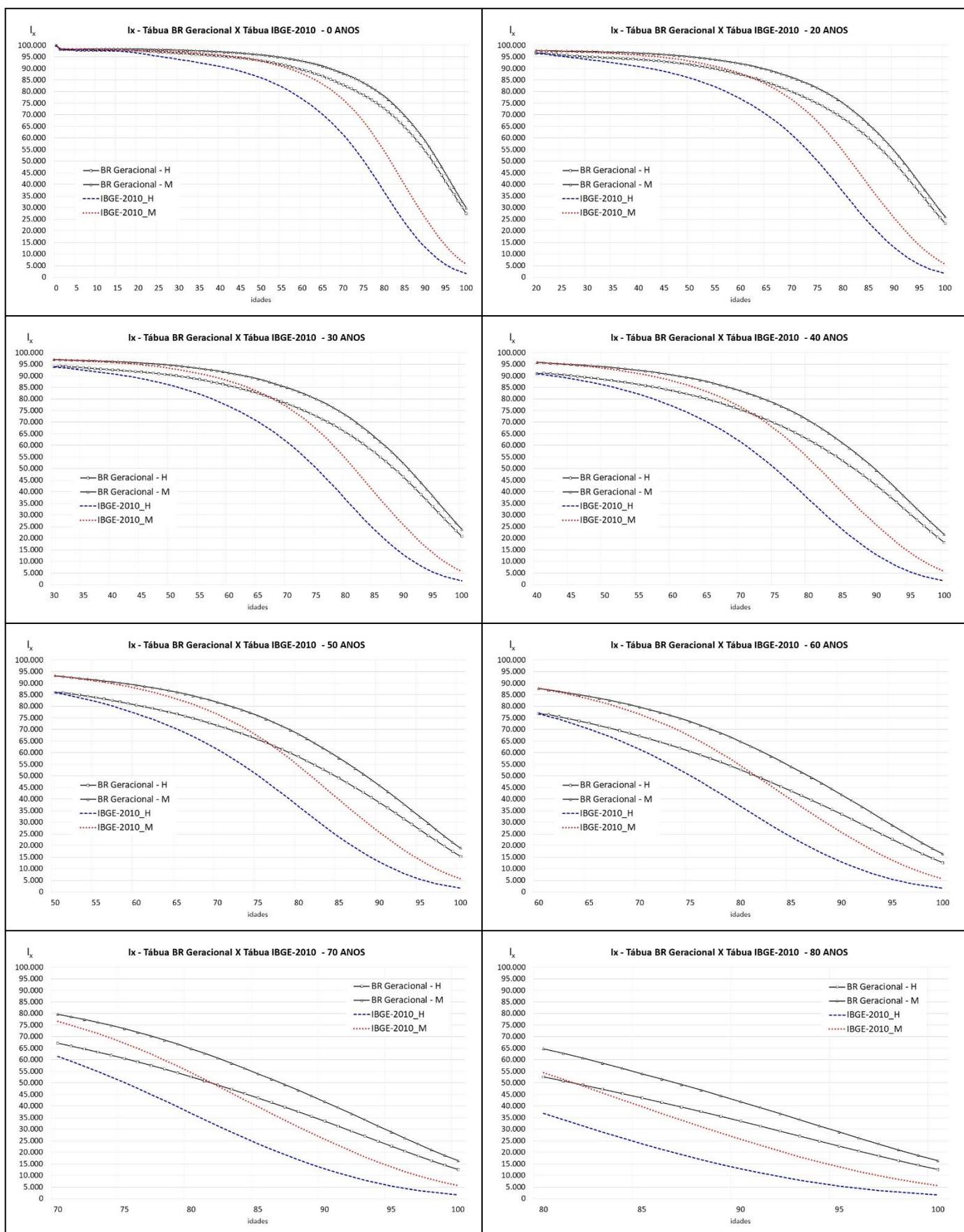
Na sequência, o *Painel 15* apresenta um comparativo da tábua geracional e da tábua de 2010, por meio da função de  $l_x$ , nas idades de 0, 20, 30, 40, 50, 60, 70 e 80 anos. Fica nítido o quantitativo bem maior de indivíduos sobreviventes, quando considerada a Tábua BR-Geracional. Quanto maior a idade, maior a diferença entre o número de sobreviventes da tábua geracional e da estática. Por exemplo, aos 60 anos de idade, teríamos 12,9% mais sobreviventes do sexo masculino e 4,5% mais sobreviventes do sexo feminino, comparando a tábua geracional com a estática. Aos 65 anos, esses percentuais passam para 19,1% e 7,3%, respectivamente, para homens e mulheres.

Gráfico 63 –  $q_x$ 's – Tábua BR-Generacional X Tábua IBGE-2010

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 64 – Razão  $q_x$ 's – Tábua BR-Generacional X Tábua IBGE-2010

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Painel 15 –  $l_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua IBGE-2010

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

### 6.3) Quantificação do Risco de Longevidade no Brasil

Existem algumas formas de se mensurar o Impacto do Risco de Longevidade (IRL). Por exemplo, Antolin (2007) comparou as anuidades atuariais calculadas com a tábua estática (último ano observado disponível) e com uma tábua projetada pelo método de Lee & Carter, contemplando a evolução da expectativa de vida nas diferentes idades<sup>58</sup>. Além disso, foram realizadas simulações para Fundos de Pensão hipotéticos com segurados de três diferentes perfis demográficos de estrutura etária<sup>59</sup>. Um dos resultados obtidos foi que o Risco de Longevidade seria inversamente proporcional à idade do participante. Além disso, quanto mais jovem a massa de segurados, maior seria o Risco de Longevidade calculado, e quanto menor fosse a taxa de juros utilizada, maior também seria o Risco de Longevidade.

Dentro da mesma linha, Dushi et al. (2010) utilizaram o método LC para projetar a mortalidade e avaliaram o Impacto do Risco de Longevidade, comparando as anuidades atuariais calculadas com as tábuas projetadas e aquelas geradas pelas tábuas utilizadas como *benchmarks* (tábua GAM-1983 e tábua RP-2000, com ou sem *improvements* dados pela escala AA) nos Fundos de Pensão dos Estados Unidos e Reino Unido, que oferecem planos na modalidade de benefício definido (BD). Os autores concluíram que as tábuas GAM-1983 e RP-2000 sistematicamente subestimam as responsabilidades dos Fundos de Pensão e o Impacto do Risco de Longevidade poderia chegar a 12,2% para um participante do sexo masculino, em média, e a 22,4% para indivíduos com 22 anos de idade.

Por seu turno, Nakagome & Kawaguchi (2008) utilizaram o método LC para projetar a mortalidade no Japão, Estados Unidos, Inglaterra, País de Gales e Itália (dados da HMD) e calcularam o Impacto do Risco de Longevidade em cada um desses países, comparando o valor da anuidade atuarial (*present value of life annuity payments*) das tábuas dinâmicas e das tábuas estáticas, aos 65 anos de idade. Como resultado, os autores calcularam um Impacto do Risco de Longevidade, para homens de 65 anos, de: 9,21% no Japão, 5,66% na Inglaterra e País de Gales, 4,69% nos Estados Unidos e 4,59% na Itália.

---

<sup>58</sup> Foram utilizados dados da HMD de seis países: Espanha, Estados Unidos, França, Holanda, Reino Unido e Suécia.

<sup>59</sup> O autor utilizou as seguintes estruturas etárias hipotéticas no ano de 2005: pessoas de 25-49 anos (65%, 60% e 50%), pessoas de 50-59 anos (20%, 20% e 20%), pessoas de 60-69 anos (10%, 15% e 20%), e pessoas com 70+ anos (5%, 5% e 10%) para os Fundos de Pensão hipotéticos, (1), (2) e (3), respectivamente.

Como mais um exemplo, Yang et al. (2010) compararam a mortalidade projetada de Estados Unidos, Canadá, Reino Unido, França, Japão e Taiwan (dados da HMD) por diversos métodos: modelo de Lee-Carter, modelo de Idade, Período e Coorte de Renshaw & Haberman (2006), modelo de Cairns, Blake, & Dowd (2006) e um modelo alternativo proposto pelos próprios autores. O Impacto do Risco de Longevidade foi calculado através da razão entre as anuidades atuariais imediatas e diferidas das tábuas projetadas, e as mesmas anuidades calculadas com as tábuas estáticas de período. Os autores concluíram que o Risco de Longevidade seria mais acentuado para as mulheres nos países asiáticos utilizados no estudo (Japão e Taiwan).

Mais recentemente, a OCDE publicou um estudo (OECD, 2014), em atualização ao trabalho de Antolin (2007), sobre as hipóteses de mortalidade, o Risco de Longevidade e suas implicações para os Fundos de Pensão e EAPC's do Brasil e diversos outros países do mundo, como Alemanha, Canadá, Chile, China, Coreia do Sul, Espanha, Estados Unidos, França, Holanda, Israel, Japão, México, Peru, Reino Unido e Suíça. Nesse novo trabalho foram utilizados quatro métodos para projetar a mortalidade, a saber: 1) modelo de Lee & Carter (1992), 2) modelo de Cairns, Blake & Dowd (Cairns et al., 2006), 3) modelo de P-Splines (Currie, Durban, & Eilers, 2004) e 4) modelo do *Continuous Mortality Investigation* (CMI, 2009). O Impacto do Risco de Longevidade foi calculado através da razão entre as anuidades atuariais das tábuas projetadas e das tábuas utilizadas como *benchmarks* nos mercados previdenciários do país em questão. Por exemplo, no Brasil o Risco de Longevidade foi calculado pela razão entre as tábuas projetadas e as tábuas AT-2000, AT-83 e BR-EMS 2010 (Oliveira et al., 2012). O estudo da OCDE foi conclusivo, no sentido de que o uso de tabelas de mortalidade desatualizadas dos Estados Unidos (AT-83 e AT-2000) resultou em um déficit significativo nas provisões técnicas, tanto dos Fundos de Pensão, quanto das EAPC's brasileiras. Quando são adotadas tábuas estáticas baseadas na própria experiência do mercado segurador brasileiro, como a BR-EMS 2010, o Risco de Longevidade diminui consideravelmente, todavia continua existindo. A conclusão do estudo foi que, a menos que as futuras melhorias da mortalidade sejam incorporadas em seus cálculos, as entidades previdenciárias brasileiras continuarão experimentando problemas de subestimação dos seus compromissos atuariais, podendo comprometer a sustentabilidade do Sistema Previdenciário.

O *Quadro 4*, a seguir, apresenta as tábuas de mortalidade utilizadas como *benchmarks* nos segmentos da previdência brasileira:

Quadro 4 – Tábua *Benchmark* utilizada por Segmento Previdenciário brasileiro

SEGMENTO	SIGLA	TÁBUA BENCHMARK	REFERÊNCIA LEGAL	OBS
Regimes Próprios de Previdência Social	RPPS	IBGE	Portaria MPS nº 403 de 10/12/2008	-> limite mínimo de sobrevivência dado pela tábua IBGE de ambos os sexos, defasada em 2 (anos). Por exemplo, em 01/12/2018 foi divulgada a tábua de 2016
Entidades Abertas de Previdência Complementar	EAPC	AT-83	Resolução CNSP nº 131 de 2005	-> limite mínimo de sobrevivência dado pela tábua AT-83 <i>male</i> -> as tábuas BR-EMS representam a experiência do mercado segurador brasileiro
		AT-2000	-	
		BR-EMS 2010	Circular SUSEP nº 402 de 18/03/2010	
		BR-EMS 2015	-	
Entidades Fechadas de Previdência Complementar	EFPC	AT-83	Resolução CGPC nº18 de 28/03/2006	-> limite mínimo de sobrevivência dado pela tábua AT-83
		AT-2000	-	
Fundação de Previdência Complementar do Servidor Público Federal	FUNPRESP	RP2000	-	-> tábua RP-2000 com aplicação dos fatores de <i>improvement</i> da escala AA

fonte: normativos legais citados no quadro

Tal como nos diversos estudos referenciados anteriormente, o Impacto do Risco de Longevidade foi estimado, nesta tese, para cada uma das entidades previdenciárias listadas no quadro anterior, através da razão entre a anuidade diferida antecipada vitalícia<sup>60</sup> ( ${}_n|\ddot{a}_x$ ), calculada com base nas tábuas geracionais construídas em função das projeções da mortalidade, e aquelas utilizadas como *benchmarks*. Para tanto, foram utilizadas as seguintes expressões atuariais<sup>61</sup>:

$$(69) \quad n | \ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x} \quad (70) \quad N_x = \sum_{X=x}^{\infty} D_x \quad (71) \quad D_x = l_x * v^x \quad (72) \quad v^x = \left( \frac{1}{1+i} \right)^x$$

Onde: x = idade, i = taxa de juros e  $l_x$  = número de sobreviventes à idade exata x.

<sup>60</sup> A Anuidade Diferida Antecipada Vitalícia ( ${}_n|\ddot{a}_x$ ) indica o valor atual de uma série de pagamentos de R\$1,00, a uma pessoa com idade atual de x anos, daqui a n anos, enquanto a mesma estiver viva, com pagamentos efetuados no início de cada período.

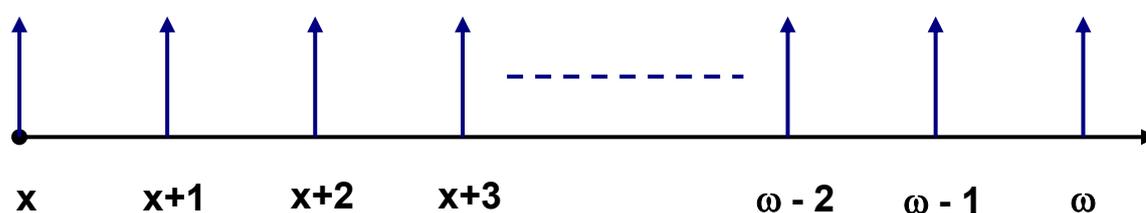
<sup>61</sup> Para maiores detalhes ver Cordeiro Filho (2009), Rodrigues (2008), Bowers et al. (1997), Jordan (1991), Ferreira (1985) e Vilanova (1969).

O cálculo das anuidades diferidas se justifica pelo fato de que um participante de plano de benefícios previdenciários ingressa no mesmo, geralmente, com idades acima de 18 anos e contribui, por um determinado período mínimo de tempo, até o cumprimento de um rol de elegibilidades (p.e. idade mínima aliada a um tempo mínimo de contribuição ao plano de benefícios). Então, adquire o direito de se aposentar numa idade específica, normalmente próxima dos 60 ou 65 anos. Como a ideia nesse primeiro momento foi apresentar o Impacto do Risco de Longevidade (IRL) de forma mais teórica e diferenciada por tipo de instituição previdenciária brasileira, optou-se por calcular o  $IRL_x$  em determinada idade  $x$ , através da razão entre o valor de  ${}_n|\ddot{a}_x$  obtido para as tábuas geracionais ( ${}_n|\ddot{a}_x^G$ ) e aquele resultante da aplicação de determinadas tábuas específicas não geracionais ( ${}_n|\ddot{a}_x^{NG}$ ), adotadas como *benchmarks* em seus segmentos previdenciários específicos, ou seja:

$$IRL_x = \frac{{}_n|\ddot{a}_x^G}{{}_n|\ddot{a}_x^{NG}} \quad (73)$$

A diferença entre a anuidade atuarial, concebida em função de tábuas geracionais, e aquela baseada em sua versão estática, é que, agora, para cada ano subsequente, será considerado no cálculo de  $D_x$  ou  $N_x$  (somatório de  $D_x$ ), o número de sobreviventes à idade  $x$  ( $l_x$ ) da tábua projetada para aquele ano específico, ao longo da linha diagonal que representa uma coorte hipotética de indivíduos, tal qual destacado no Quadro 3 (diagonal em verde).

Por exemplo, considerando a Anuidade Imediata Antecipada Vitalícia ( $\ddot{a}_x$ ), teríamos a seguinte situação, observando o Diagrama de Fluxo de Caixa (DFC) que segue:



$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= \frac{N_x}{D_x} = 1 + v^1 * {}_1p_x + v^2 * {}_2p_x + \dots + v^n * {}_np_x = \\ &= 1 + v^1 * \frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2 * \frac{l_{x+2}}{l_x} + \dots + v^n * \frac{l_{x+n}}{l_x} = \sum_{n=0}^{\infty} v^n * {}_np_x \quad (74) \end{aligned}$$

**Ano 1**
**Ano 2**
**Ano n**

Para cada tipo de entidade previdenciária brasileira específica, o  $IRL_x$  foi calculado por sexo, substituindo, em seu denominador, a anuidade atuarial calculada com base nas seguintes tábuas de mortalidade, em função do tipo de entidade previdenciária: 1) RPPS's : tábua Brasil, ambos os sexos, do IBGE, projetada para o ano de 2016; 2) EFPC's : tábuas AT-83 e AT-2000; 3) EAPC's : tábuas AT-83, AT-2000, BR-EMS 2010 e BR-EMS 2015; e 4) FUNPRESP : tábua RP2000, com *improvement* anual dado pela escala AA (atualização para o ano de 2019).

As tábuas de mortalidade para a população de ambos os sexos (total) foram construídas com base nas funções  ${}_n d_x$  e  ${}_n L_x$  das tábuas de homens e mulheres, tanto para a Tábua BR-Generacional, quanto as tábuas *benchmark* utilizadas no presente estudo, com base nas relações matemáticas existentes entre as funções de uma tábua de vida.

No cálculo atuarial, a taxa de juros tem um peso muito grande nos resultados obtidos, visto que a mesma é que *desconta*, ou *trás a valor presente*, todo o fluxo futuro de pagamento dos benefícios previdenciários, conhecido atuarialmente como Valor Presente do Benefício Futuro (VPBF) ou Valor Atual do Benefício Futuro (VABF). Com o objetivo de analisar a sensibilidade dos resultados em relação a essa importante variável, foram calculadas as anuidades diferidas, tanto para a idade de 60 anos, quanto para a idade mínima de 65, pensando na iminente reforma previdenciária no Brasil, utilizando, além da taxa de juros de 6% a.a. (limite máximo legal comumente adotado nas Avaliações Atuariais das entidades previdenciárias brasileiras), taxas de juros menores, como 5% a.a. e 4% a.a..

Como exercício com foco mais prático e concreto, de forma um pouco diferente daquilo que fora feito por Antolin (2007), que criou estruturas etárias fictícias de massas seguradas em determinados grupos etários, e calculou o Impacto do Risco de Longevidade em função dos perfis demográficos específicos gerados, nesta tese foi realizada uma simulação atuarial do Custo Normal e das Reservas Matemáticas de Benefícios a Conceder (RMBAC) e Concedidos (RMBC) de um RPPS fictício, com base numa massa segurada de mais de 15.000 vidas, entre servidores ativos, aposentados e pensionistas. Foi comparada a tábua estática IBGE 2016 de ambos os sexos (tábua *benchmark*), como a tábua dinâmica BR-Generacional, construída na seção 6.2, quantificando, assim, o Risco de Longevidade para um conjunto específico de indivíduos, pela razão entre a Reserva Matemática calculada com a tábua geracional e aquela da tábua estática *benchmark*.

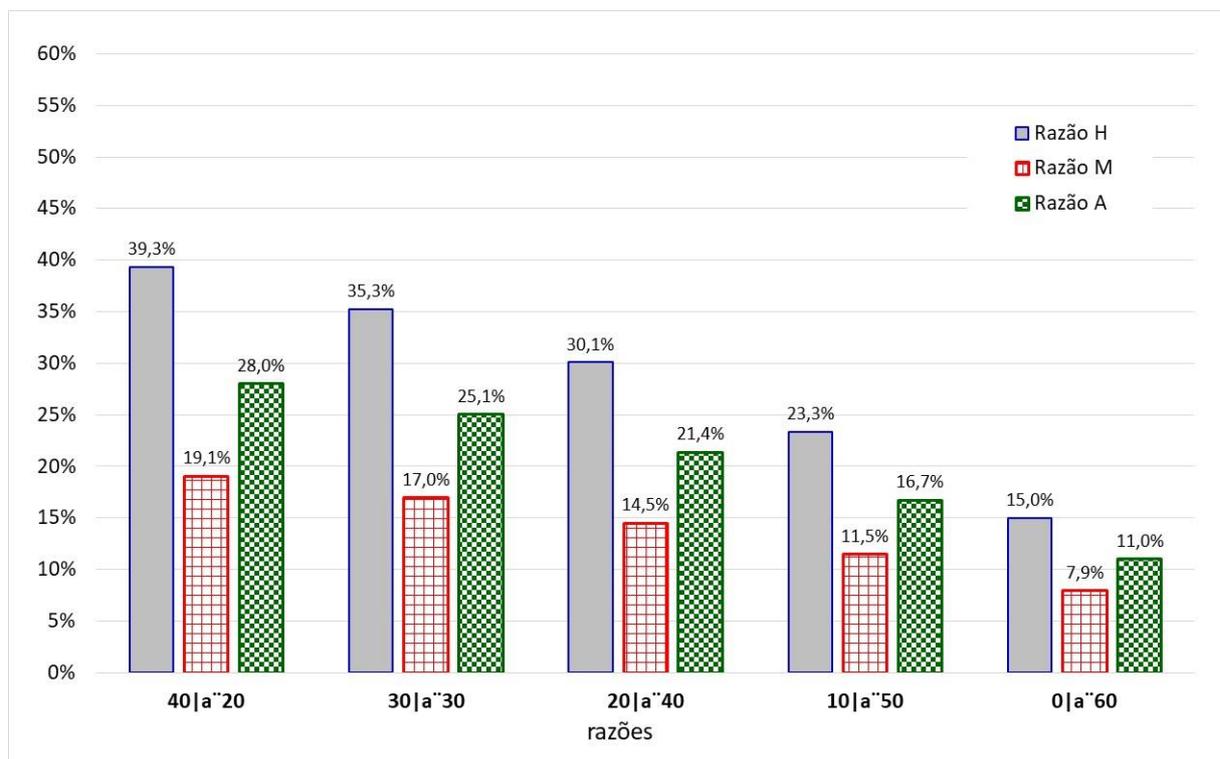
Vale ressaltar que a Tábua BR-Geracional, construída nesta tese, levou em consideração a mortalidade média da população brasileira, como um todo. Os segurados vinculados aos RPPS, EAPC's, EFPC's e FUNPRESP, objetos de comparação e aferição do IRL, possuem uma mortalidade naturalmente menor, quando comparada à população brasileira em geral, por se tratar de servidores públicos federais, estaduais e municipais, além de participantes de Fundos de Pensão e pessoas que compram produtos de previdência no mercado aberto, indivíduos esses de um nível sócio-econômico bem acima da média do brasileiro em geral, e que, conseqüentemente, possuem maior sobrevivência. Caso fossem construídas tábuas geracionais específicas, com base em projeções da mortalidade considerando informações administrativas confiáveis de cada um desses quatro segmentos previdenciários brasileiros abordados (RPPS's, EAPC's, EFPC's, FUNPRESP), todos os valores apresentados na seqüência, a título de Impacto do Risco de Longevidade (IRL), seriam, obrigatoriamente, majorados, visto que as novas tábuas geracionais teriam níveis de mortalidade inferiores aos da Tábua BR-Geracional construída nesta tese.

### 6.3.1) Risco de Longevidade em relação à tábua base de 2010

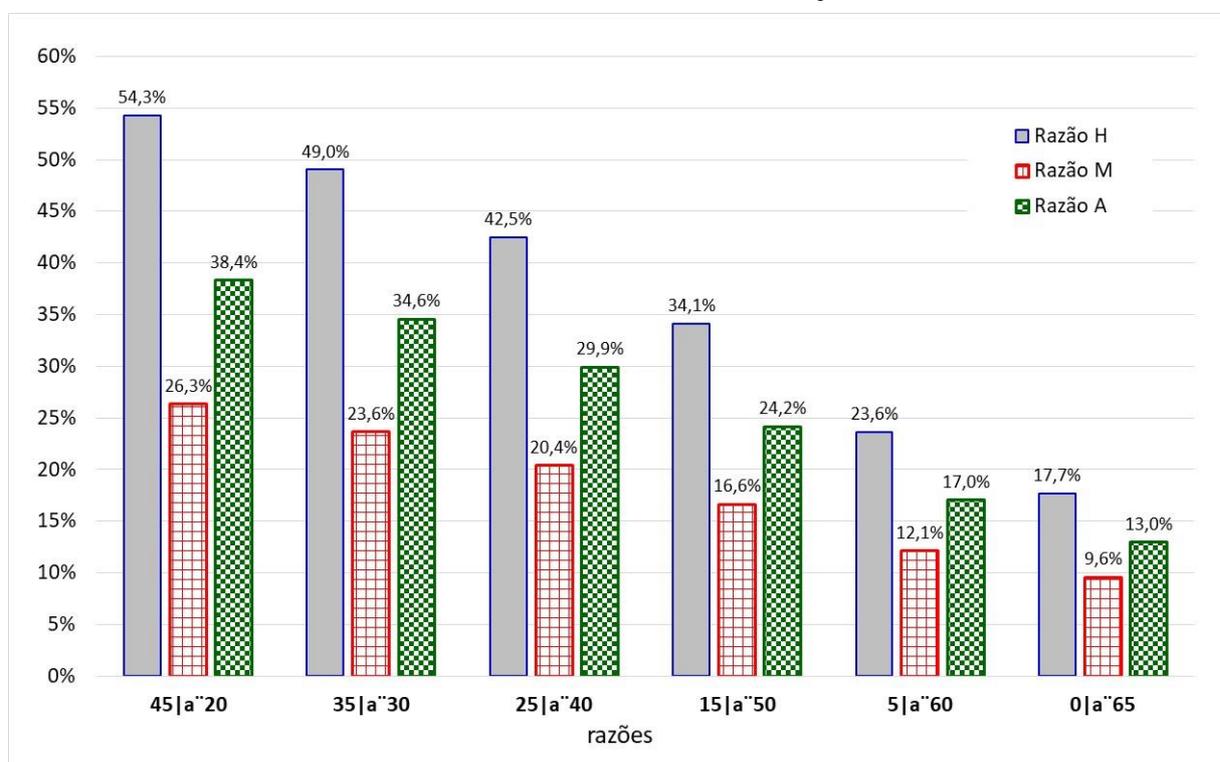
Em estudo preliminar executado antes do trabalho desta tese (Silva, 2018b) foram utilizadas as tábuas de mortalidade projetadas pelo IBGE (IBGE, 2018) de 2011-2060, para a construção das tábuas geracionais. A razão entre as anuidades diferidas, calculadas com base na tábua geracional e aquela do ano-base de 2010, foi utilizada como *proxy* para a estimativa do Impacto do Risco de Longevidade nos RPPS's do Brasil. Considerando uma taxa de juros de 6% a.a., foi calculado, aos 20 anos de idade, um impacto da ordem de 23,79% no valor da anuidade diferida antecipada vitalícia dos homens, 13,76% das mulheres e 18,29% da população de ambos os sexos. Esse impacto diminui, conforme a idade aumenta, sendo aos 60 anos de idade igual a 9,81%, 6,73% e 8,62%, para os três respectivos grupos. O trabalho preliminar foi conclusivo, no sentido de destacar a importância em se incorporar a projeção da mortalidade no cálculo atuarial dos Custos e Reservas Matemáticas, sob pena de subestimação das responsabilidades da instituição e possibilidade de comprometimento do Equilíbrio Financeiro e Atuarial (EFA) do Sistema.

O *Gráfico 65* e o *Gráfico 66*, a seguir, apresentam o cálculo do Risco de Longevidade dos homens, mulheres e ambos os sexos, com *benchmark* na tábua IBGE-2010, para a taxa de juros de 6% a.a., e considerando como idades de entrada em gozo de benefício os 60 e 65 anos, respectivamente. Na sequência, o *Painel 16* apresenta gráficos com o IRL, em função de diferentes taxas de juros, variando de 6% a.a. até 0% a.a.. As linhas do painel apresentam os resultados, por sexo, enquanto as colunas apresentam os resultados, considerando, como idade de aposentadoria, 60 e 65 anos.

Por exemplo, para um homem com 20 anos de idade que vá se aposentar aos 60 anos, o Impacto do Risco de Longevidade (IRL) considerando a taxa de juros de 6% a.a., foi calculado em 39,35%, aumentando para 54,28%, no caso da aposentadoria se dar aos 65 anos. Para uma mulher nas mesmas condições, o IRL passa de 19,05%, aos 60 anos, para 26,34%, aos 65 anos. Considerando, agora, que a pessoa possui 60 anos e já pode se aposentar, o IRL foi de 15,03%, no caso dos homens, e 7,95%, no caso das mulheres. Caso a aposentadoria se dê aos 65 anos, para os homens com essa idade, o IRL passa para 17,69%, e no caso feminino para 9,57%.

Gráfico 65 –  $IRL_x$  – benchmark Tábua IBGE-2010, taxa de juros de 6% a.a., BC 60 anos

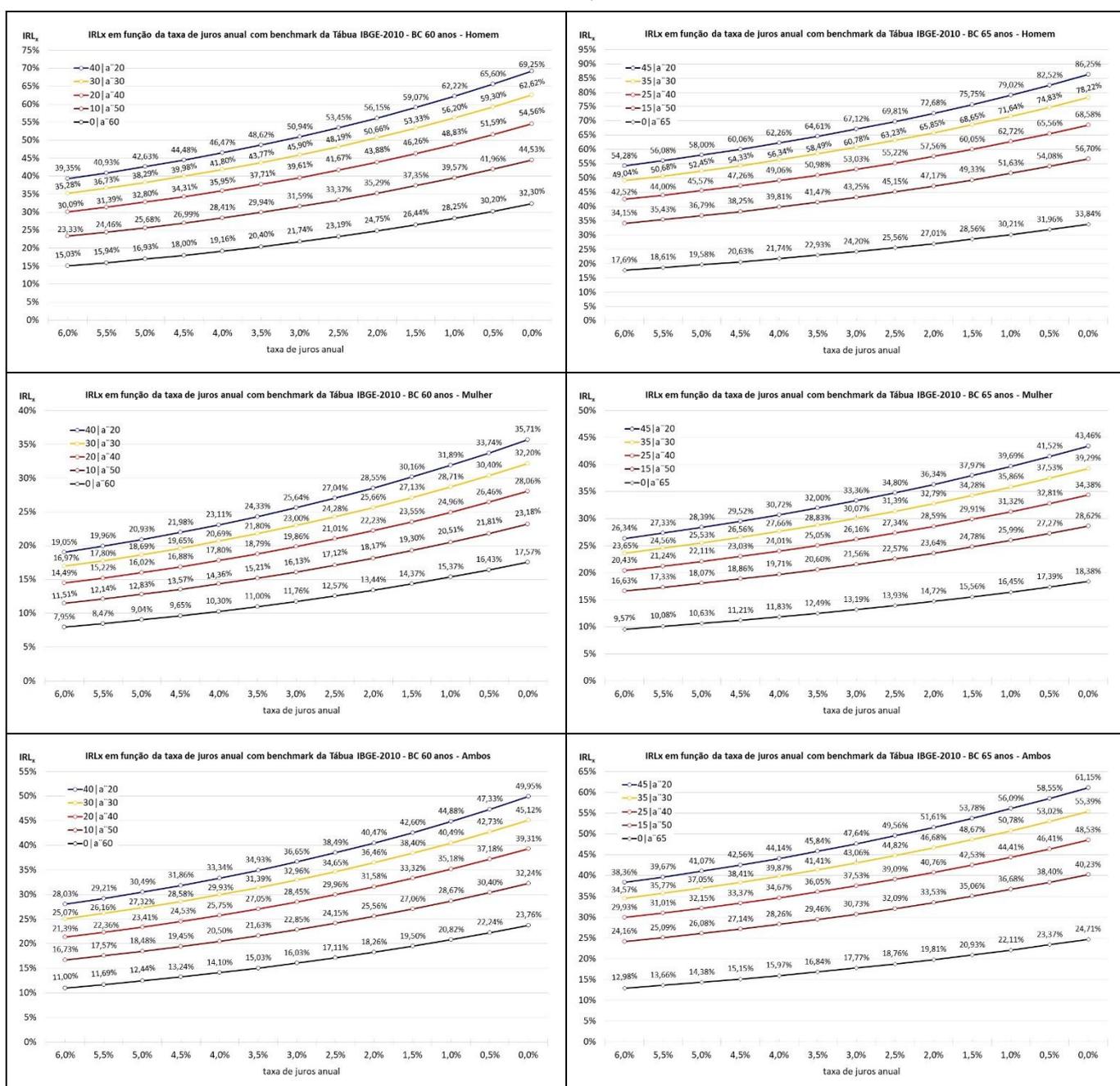
fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 66 –  $IRL_x$  – benchmark Tábua IBGE-2010, taxa de juros de 6% a.a., BC 65 anos

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Analisando a sensibilidade do IRL, em relação à taxa de juros, para o homem de 20 anos que vá se aposentar aos 60 anos, o IRL sobe para 42,63% e 46,47%, com de taxas de juros de 5% a.a. e 4% a.a., respectivamente. Caso a aposentadoria se de aos 65 anos, o IRL sobe mais ainda, para 58,00% e 62,26%, considerando as mesmas taxas de juros. No caso da mulher de 20 anos que vá se aposentar aos 60 anos, o IRL sobe para 20,93% e 23,11%, com taxas de juros de 5% a.a. e 4% a.a., respectivamente. Caso a aposentadoria se de aos 65 anos, o IRL sobe mais ainda, para 28,39% e 30,72%, considerando as mesmas taxas de juros.

Painel 16 – Impacto do Risco de Longevidade em função da taxa de juros com *benchmark* na Tábua IBGE-2010 – Homem, Mulher e Ambos os Sexos



fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

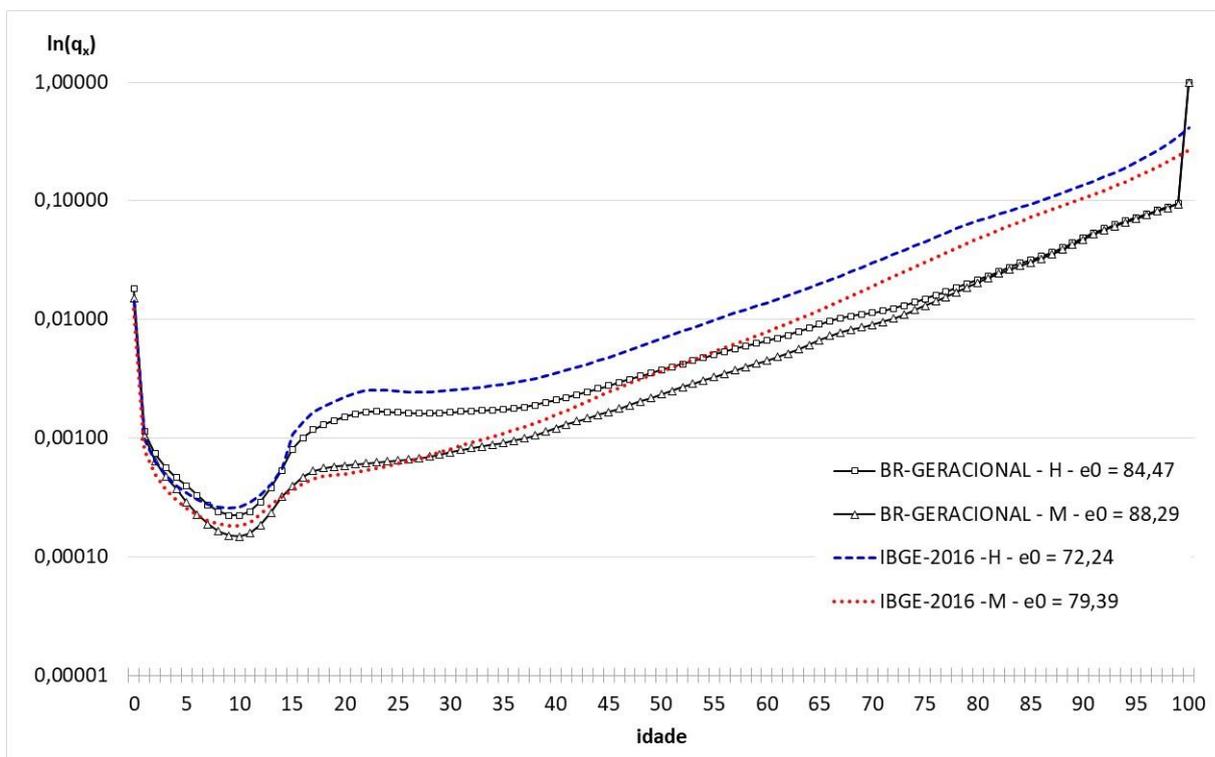
### 6.3.2) Risco de Longevidade nos Regimes Próprios de Previdência Social (RPPS)

O Gráfico 67 e o Gráfico 68 apresentam, respectivamente, os  $q_x$ 's da Tábua BR-Generacional e da tábua IBGE-2016, por sexo, e a razão entre os referidos  $q_x$ 's. Aqui é importante lembrar que a tábua do IBGE-2016 é gerada via interpolação linear entre a tábua IBGE-2010 e a tábua limite disponibilizada pelo *U.S. Census Bureau*. Como já era esperado, as tábuas geracionais estão em níveis bem abaixo aos da tábua IBGE-2016, em praticamente todas as idades. A expectativa de vida ao nascer da tábua geracional é 12,23 e 8,90 anos maior do que a  $e_0$  da tábua IBGE-2016, para homens ( $e_0 = 72,24$  anos) e mulheres ( $e_0 = 79,39$  anos), respectivamente.

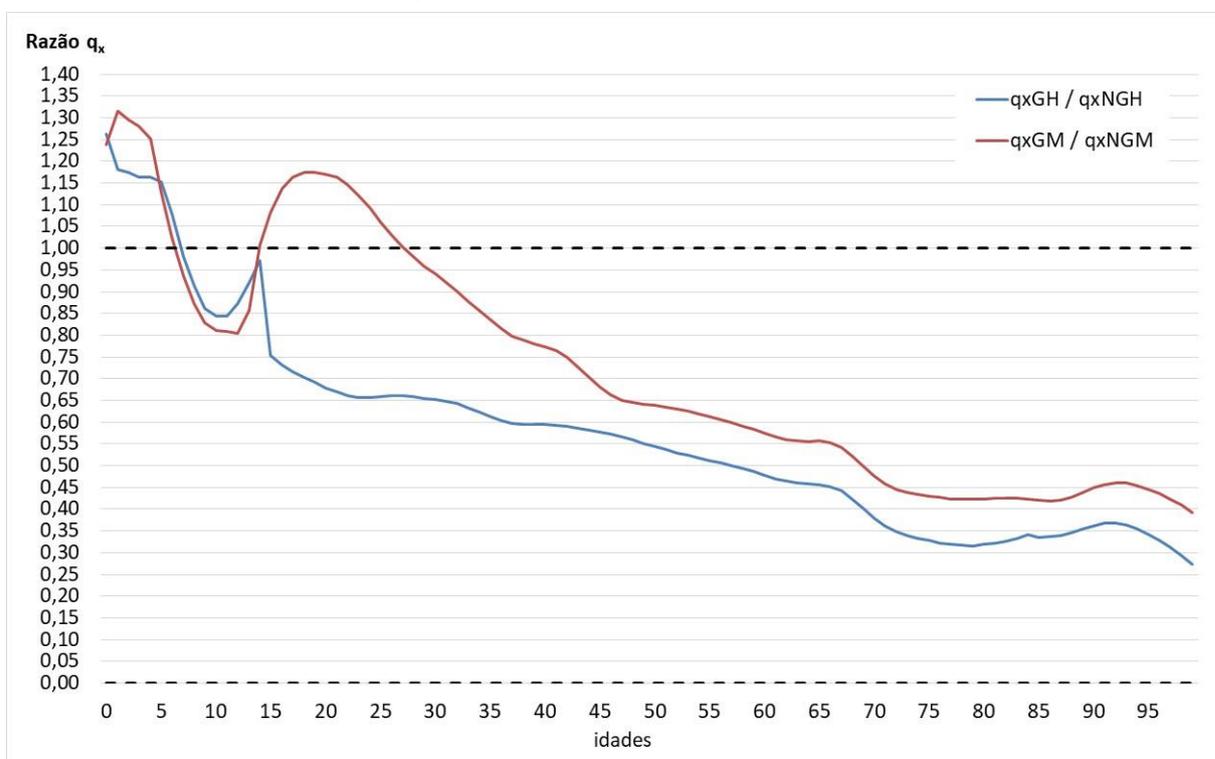
O Gráfico 69 e o Gráfico 70 apresentam o cálculo do Risco de Longevidade, por sexo, com *benchmark* na tábua IBGE-2016 e taxa de juros de 6% a.a., considerando os 60 e os 65 anos como as idades elegíveis para o requerimento do benefício pleno. O Painel 17 apresenta os gráficos com o IRL, em função das taxas de juros de variando de 6% a.a. até 0% a.a., onde as linhas representam os resultados por sexo e as colunas, para as idades de aposentadoria, aos 60 e aos 65 anos.

Por exemplo, para um homem com 20 anos de idade que vá se aposentar aos 60 anos, o Impacto do Risco de Longevidade (IRL), considerando a taxa de juros de 6% a.a., foi calculado em 31,97%, aumentando para 44,19% no caso da aposentadoria se dar aos 65 anos. Para uma mulher nas mesmas condições, o IRL passa de 15,40%, aos 60 anos, para 21,42%, aos 65 anos. Considerando que a pessoa possui 60 anos e já pode se aposentar, o IRL foi de 12,21%, no caso dos homens, e 6,05%, no caso das mulheres. Caso a aposentadoria se dê aos 65 anos, para os homens com essa idade, o IRL passa para 14,46%, e no caso feminino, para 7,39%.

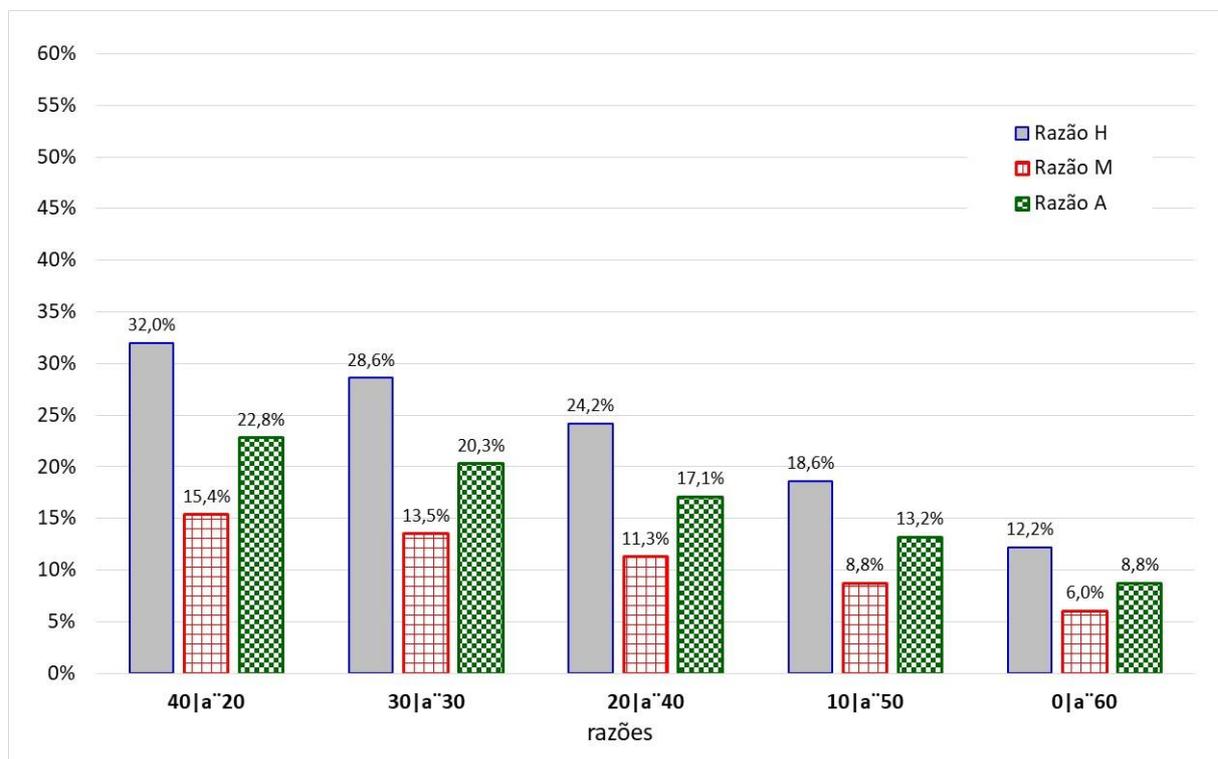
Analisando a sensibilidade do IRL em relação à taxa de juros, para o homem de 20 anos que vá se aposentar aos 60 anos, o IRL sobe para 34,82% e 38,14%, com taxas de juros de 5% a.a. e 4% a.a., respectivamente. Caso a aposentadoria se dê aos 65 anos, o IRL sobe mais ainda, para 47,41% e 51,08%, considerando as mesmas taxas de juros. No caso da mulher de 20 anos que vá se aposentar aos 60 anos, o IRL sobe para 17,06% e 19,00%, para as taxas de juros de 5% a.a. e 4% a.a., respectivamente. Caso a aposentadoria se dê aos 65 anos, o IRL sobe mais ainda, para 23,26% e 25,34%, considerando as mesmas taxas de juros.

Gráfico 67 –  $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua IBGE-2016

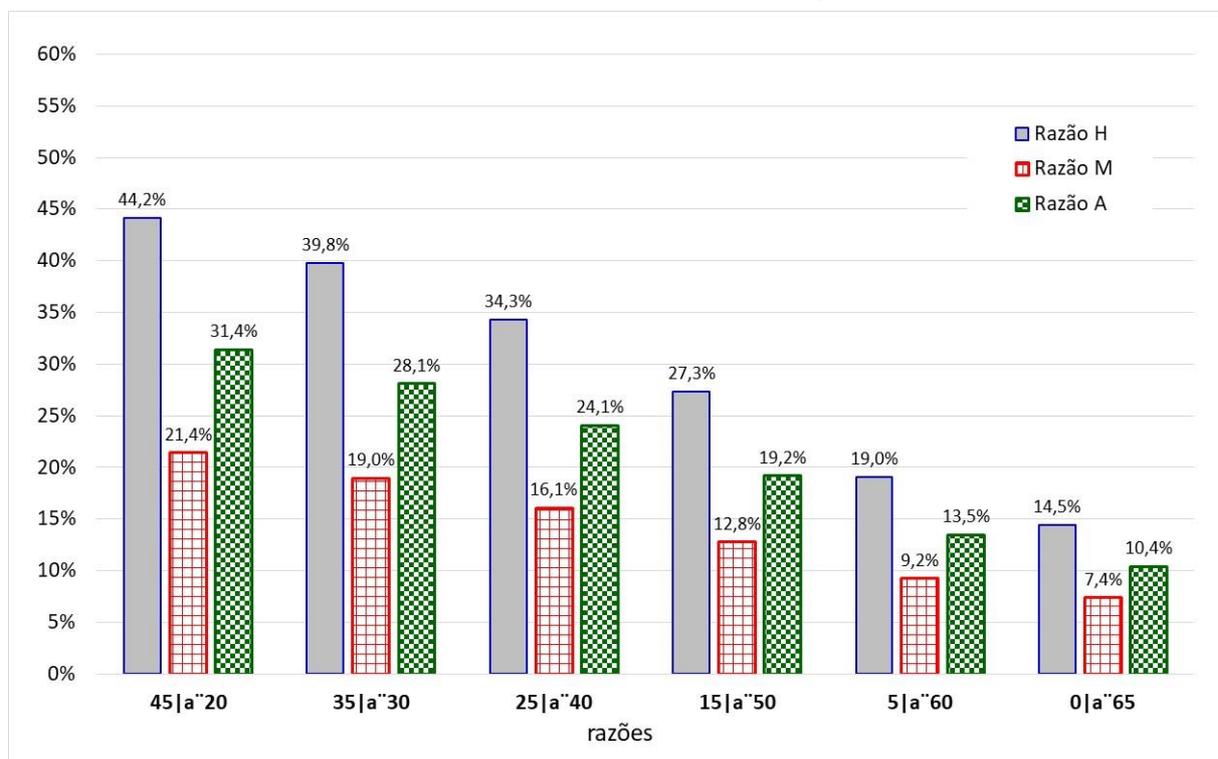
fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, 2016 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 68 – Razão  $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua IBGE-2016

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, 2016 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

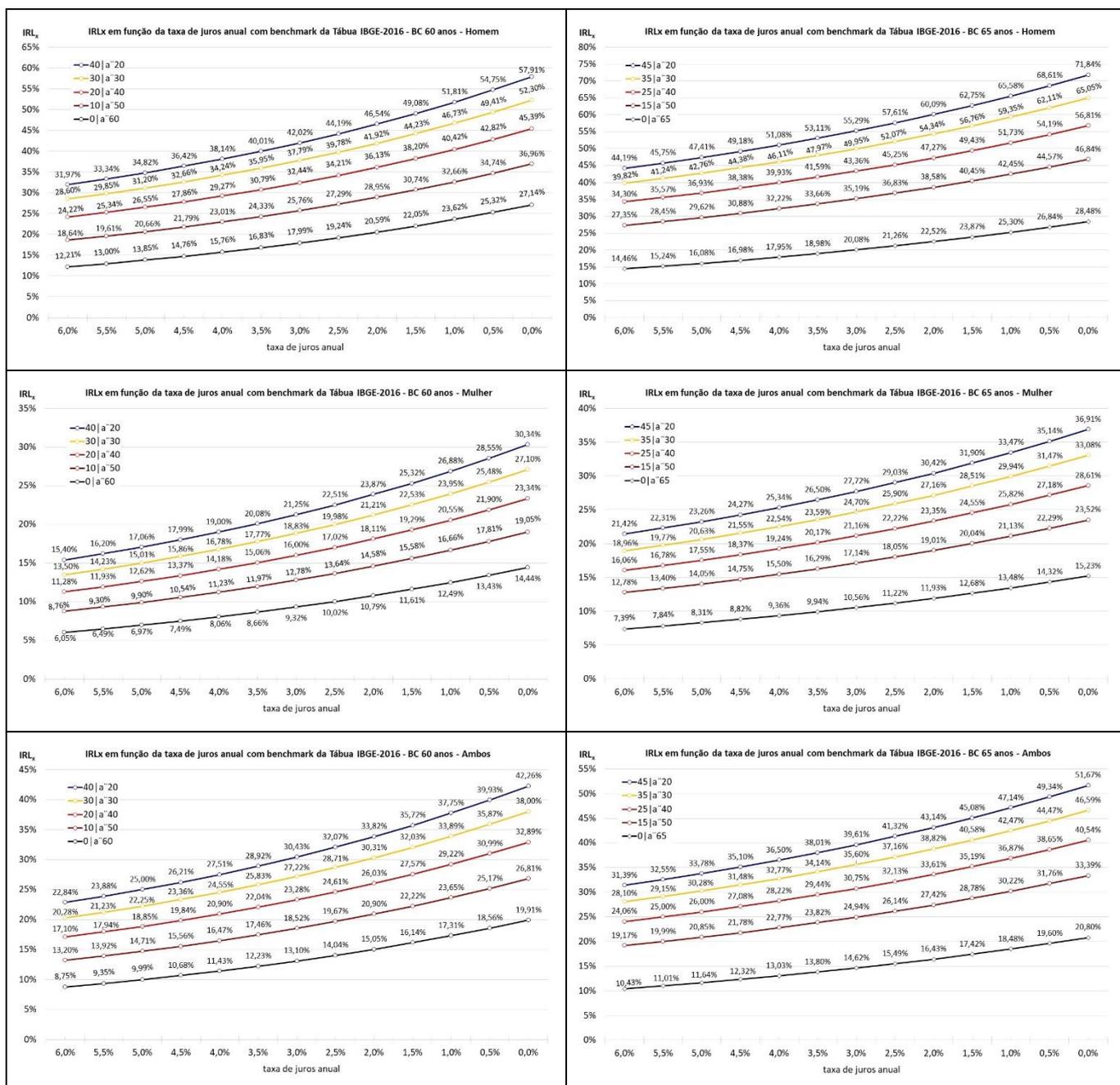
Gráfico 69 –  $IRL_x$  – benchmark Tábua IBGE-2016, taxa de juros de 6% a.a., BC 60 anos

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, 2016 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Gráfico 70 –  $IRL_x$  – benchmark Tábua IBGE-2016, taxa de juros de 6% a.a., BC 65 anos

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, 2016 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

Painel 17 – Impacto do Risco de Longevidade em função da taxa de juros com *benchmark* na Tábua IBGE-2016 – Homem, Mulher e Ambos os Sexos



fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, 2016 e estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970

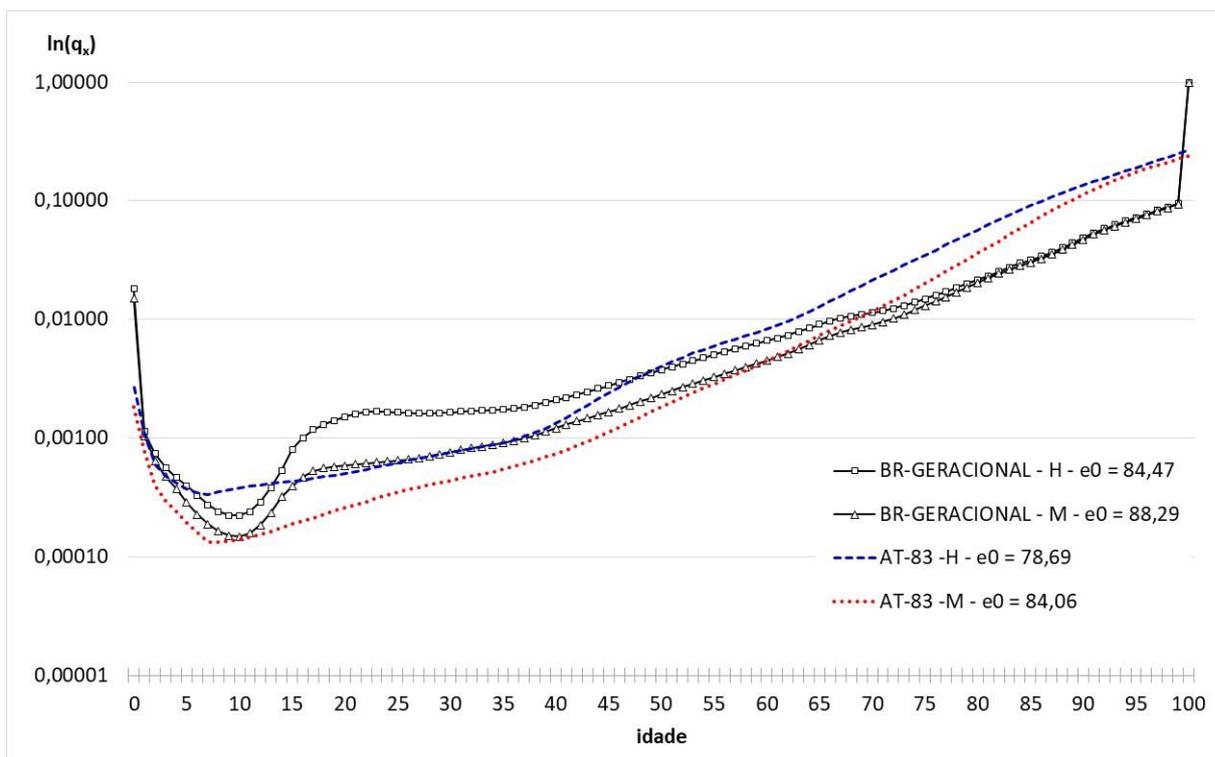
### 6.3.3) Risco de Longevidade nas Entidades Fechadas (EFPC) e Abertas (EAPC) de Previdência Complementar

O *Gráfico 71* e o *Gráfico 72* apresentam, respectivamente, os  $q_x$ 's da Tábua BR-Generacional e da tábua AT-83 por sexo, e a razão entre os referidos  $q_x$ 's. Percebe-se claramente três *crossovers* nas probabilidades de morte masculinas e um *crossover* no caso feminino. Mesmo sendo uma tábua concebida há mais de 35 anos atrás nos Estados Unidos, os  $q_x$ 's da AT-83 são menores do que os da tábua BR-Generacional até os 60 anos de idade, no caso das mulheres. No caso masculino, os  $q_x$ 's da AT-83 são menores até os 5 anos de idade e entre os 14 e 47 anos. Em relação à expectativa de vida ao nascer, a  $e_0$  geracional é 5,78 e 4,23 anos maior do que a  $e_0$  da tábua AT-83 para homens ( $e_0 = 78,69$  anos) e mulheres ( $e_0 = 84,06$  anos), respectivamente.

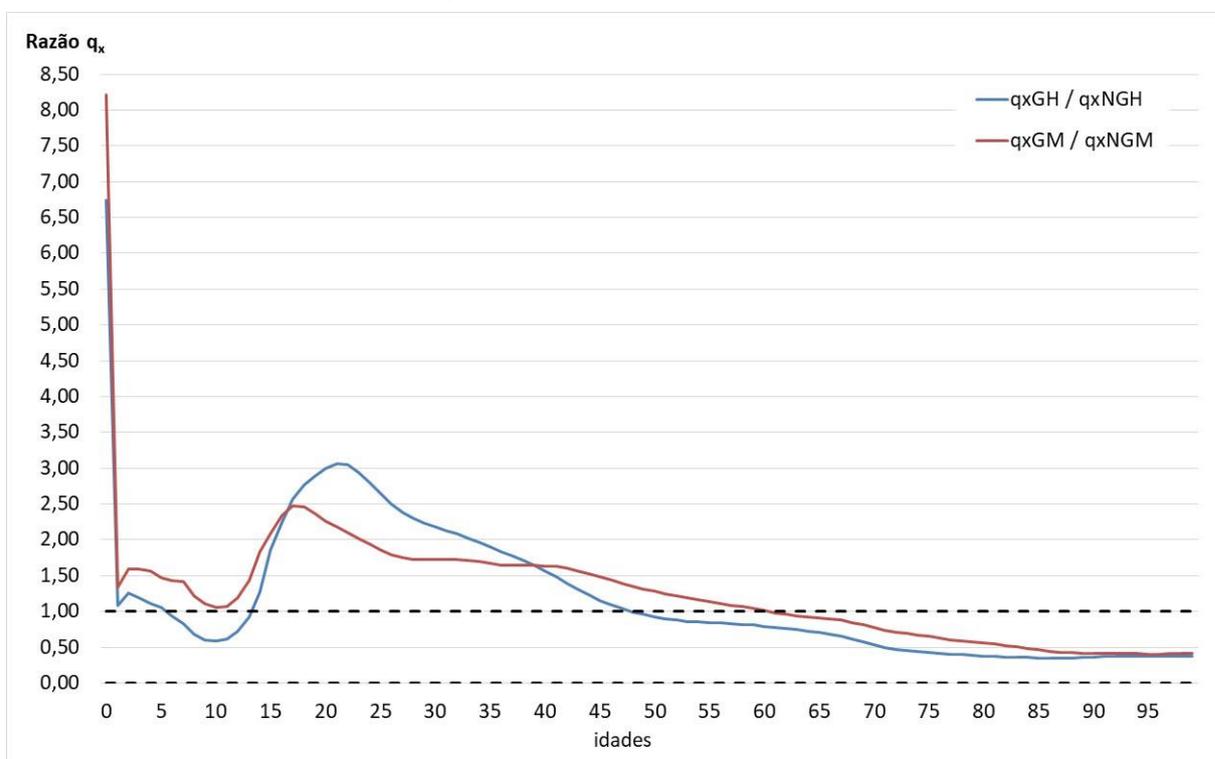
O *Gráfico 73* e o *Gráfico 74* apresentam o cálculo do IRL, por sexo, com *benchmark* na tábua AT-83 e taxa de juros de 6% a.a., considerando os 60 e os 65 anos como as idades elegíveis para o requerimento do benefício pleno, respectivamente. O *Painel 18* apresenta os gráficos do IRL, em função das taxas de juros variando de 6% a.a. até 0% a.a., onde as linhas representam os resultados por sexo e as colunas as idades de aposentadoria, aos 60 e aos 65 anos.

Por exemplo, para um homem com 20 anos de idade que vá se aposentar aos 60 anos, o Impacto do Risco de Longevidade (IRL), considerando a taxa de juros de 6% a.a., foi calculado em 11,64%, aumentando para 18,08%, no caso da aposentadoria se dar aos 65 anos. Para uma mulher nas mesmas condições, o IRL passa de 4,23%, aos 60 anos, para 6,88%, aos 65 anos. Considerando que a pessoa possui 60 anos e já pode se aposentar, o IRL foi de 5,01%, no caso dos homens, e 0,23%, no das mulheres. Caso a aposentadoria se dê aos 65 anos, para os homens com essa idade, o IRL passa para 6,99%, e no caso feminino, para 0,86%.

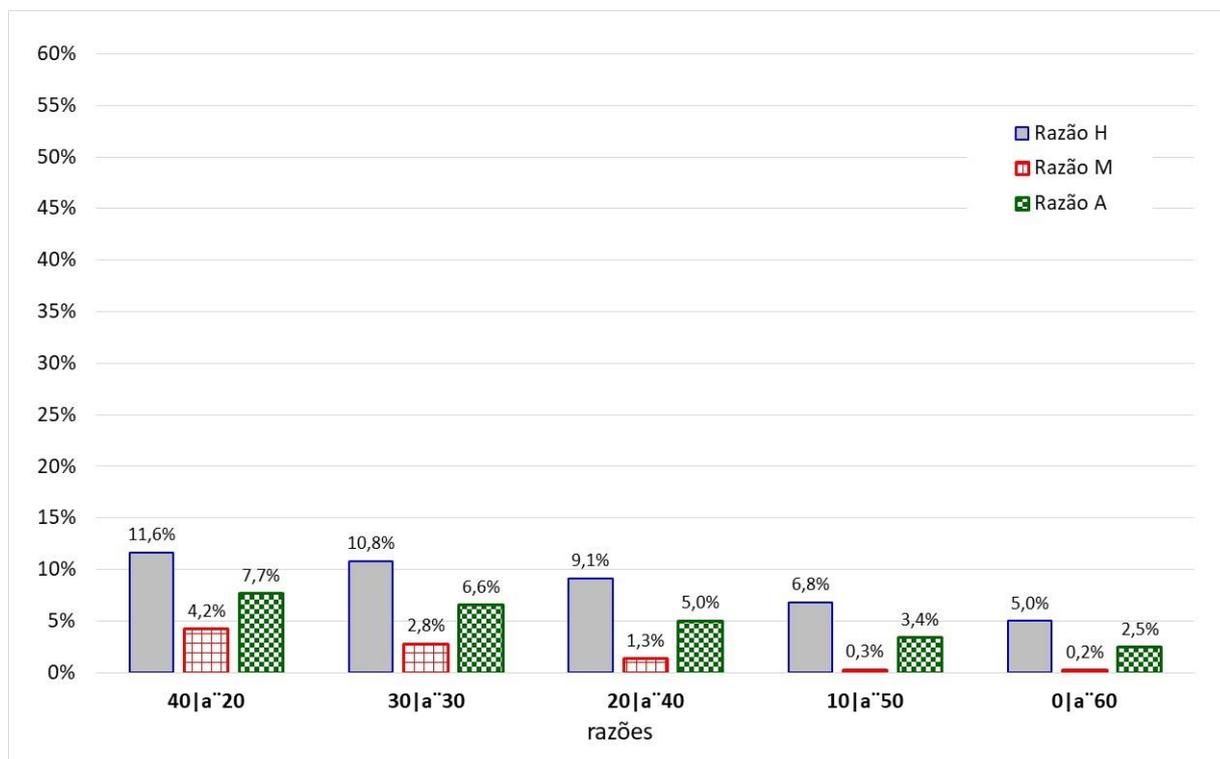
Analisando a sensibilidade do IRL em relação à taxa de juros, para o homem de 20 anos que vá se aposentar aos 60 anos, o IRL sobe para 13,50% e 15,70%, com taxas de juros de 5% a.a. e 4% a.a., respectivamente. Caso a aposentadoria se dê aos 65 anos, o IRL sobe mais ainda, para 20,23% e 22,70%, considerando as mesmas taxas de juros. No caso da mulher de 20 anos que vá se aposentar aos 60 anos, o IRL sobe para 5,25% e 6,46%, com taxas de juros de 5% a.a. e 4% a.a., respectivamente. Caso a aposentadoria se dê aos 65 anos, o IRL sobe mais ainda, para 8,07% e 9,44%, considerando as mesmas taxas de juros.

Gráfico 71 –  $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua AT-83

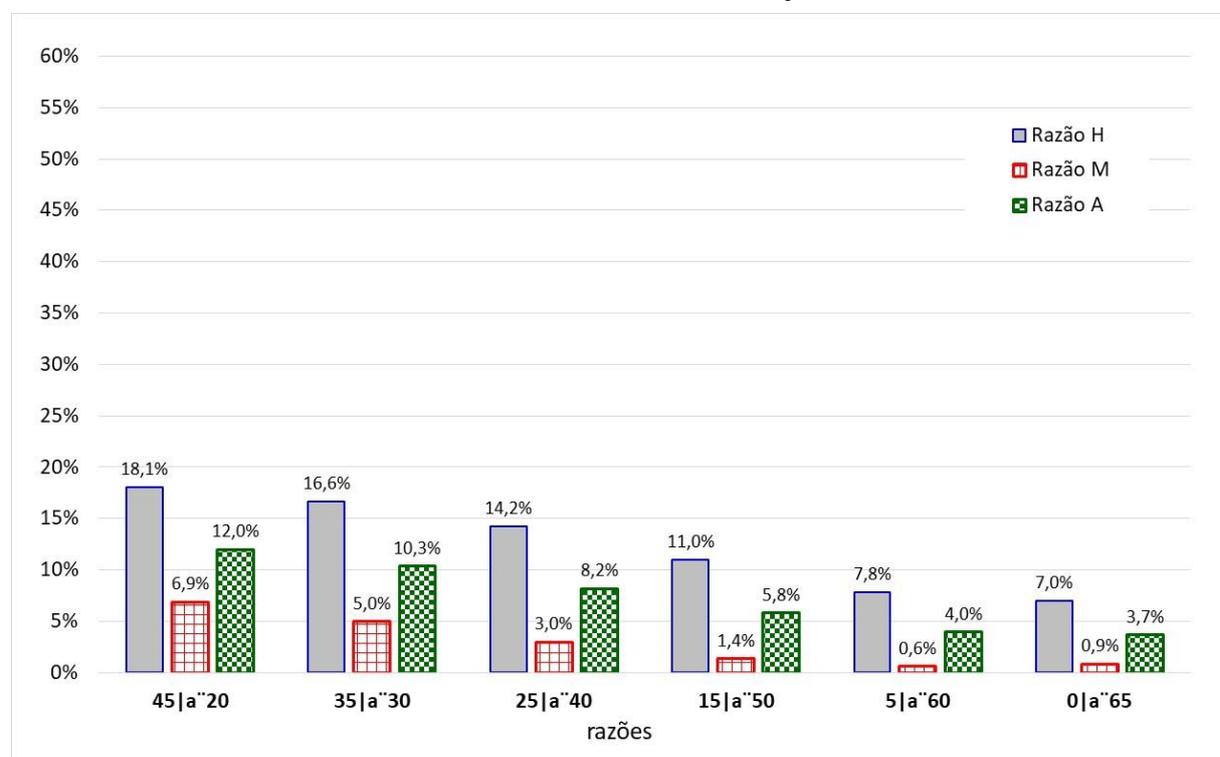
fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua AT-83

Gráfico 72 – Razão  $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua AT-83

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua AT-83

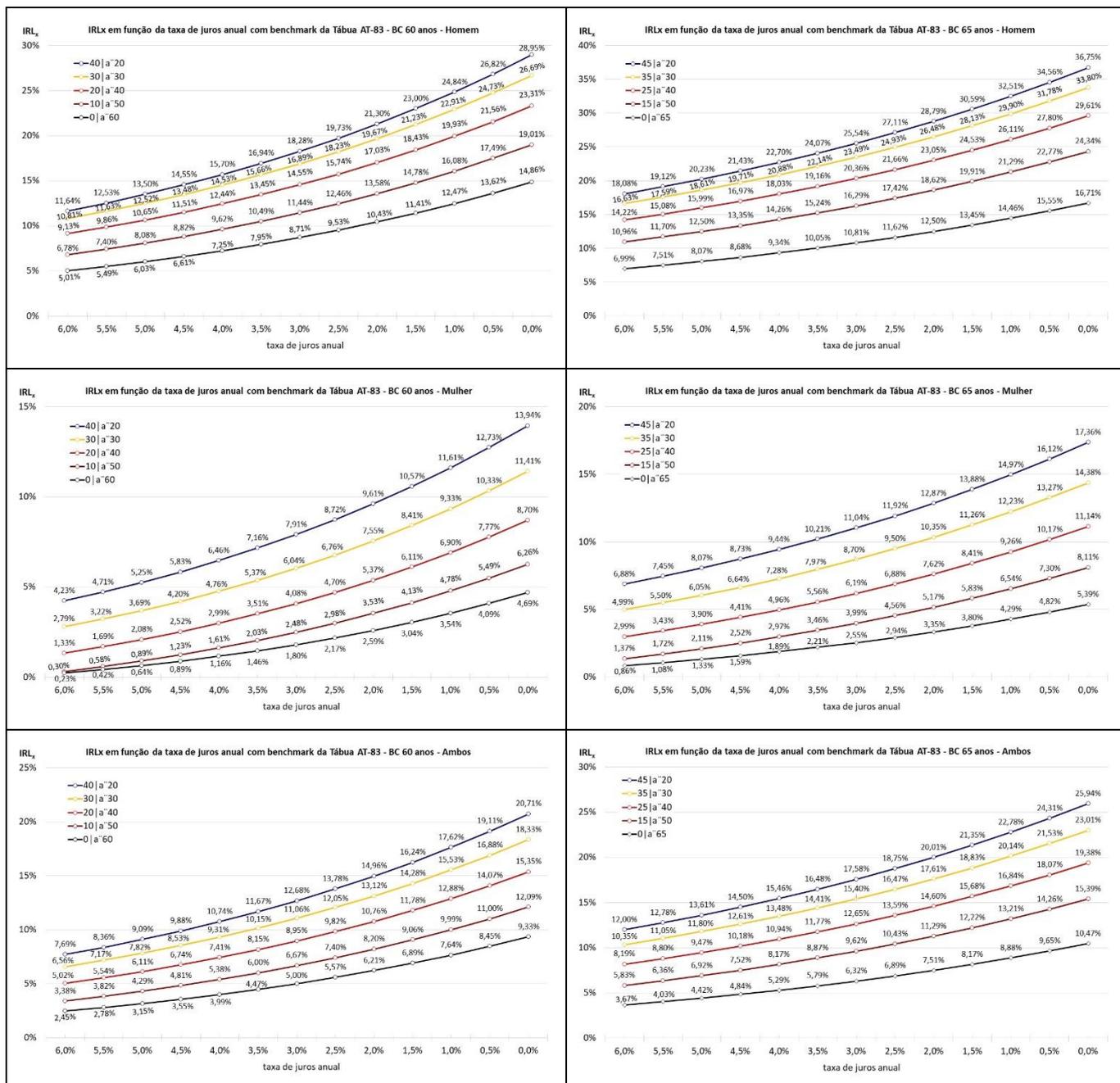
Gráfico 73 –  $IRL_x$  – benchmark Tábua AT-83, taxa de juros de 6% a.a., BC 60 anos

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua AT-83

Gráfico 74 –  $IRL_x$  – benchmark Tábua AT-83, taxa de juros de 6% a.a., BC 65 anos

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua AT-83

Painel 18 – Impacto do Risco de Longevidade em função da taxa de juros com *benchmark* na Tábua AT-83 – Homem, Mulher e Ambos os Sexos



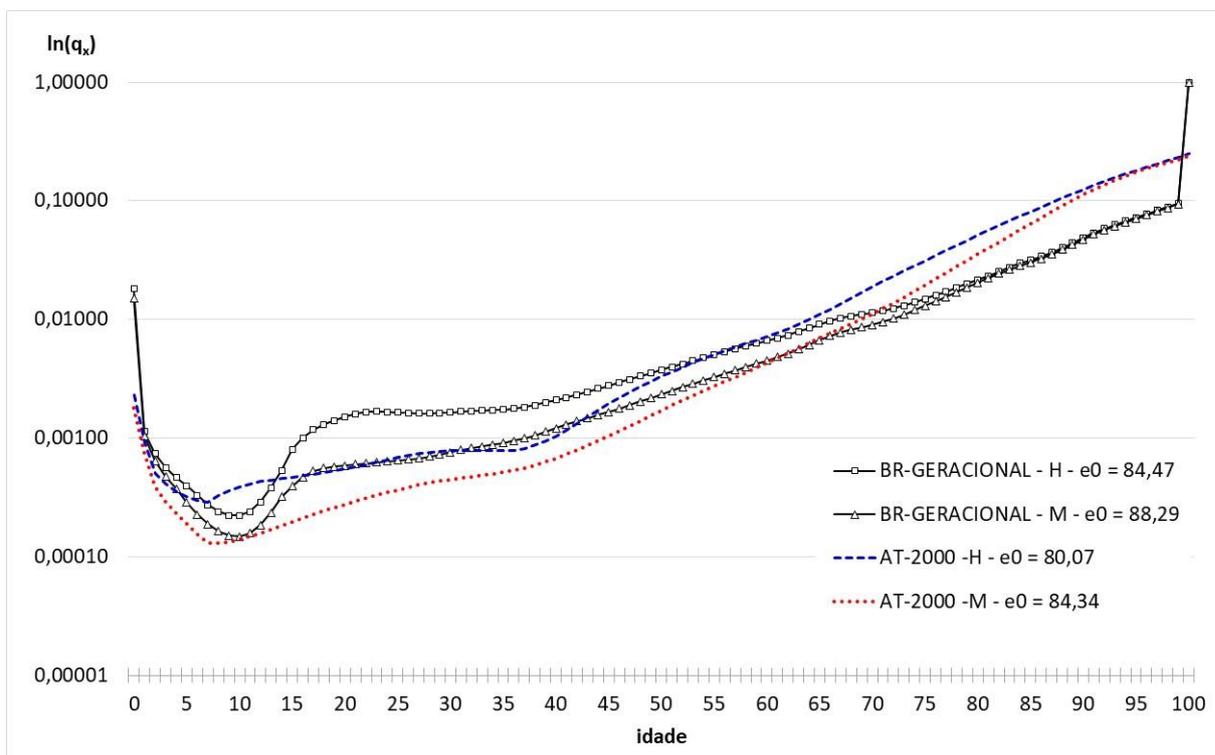
fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua AT-83

O *Gráfico 75* e o *Gráfico 76* apresentam, respectivamente, os  $q_x$ 's da Tábua BR-Geracional e da tábua AT-2000 por sexo, e a razão entre os referidos  $q_x$ 's. Tal qual ocorrera em relação à tábua AT-83, percebe-se, claramente, três *crossovers* nas probabilidades de morte masculinas e um *crossover* no caso feminino. Mesmo sendo uma tábua concebida na virada do século XX, os  $q_x$ 's da AT-2000 são menores do que os da tábua BR-Geracional até os 62 anos de idade, no caso das mulheres. No caso masculino, os  $q_x$ 's da AT-2000 são menores até os 6 anos de idade e entre os 14 e 54 anos. Em relação à expectativa de vida ao nascer, a  $e_0$  geracional é 4,40 e 3,95 anos maior do que a  $e_0$  da tábua AT-2000 para homens ( $e_0 = 80,07$  anos) e mulheres ( $e_0 = 84,34$  anos), respectivamente.

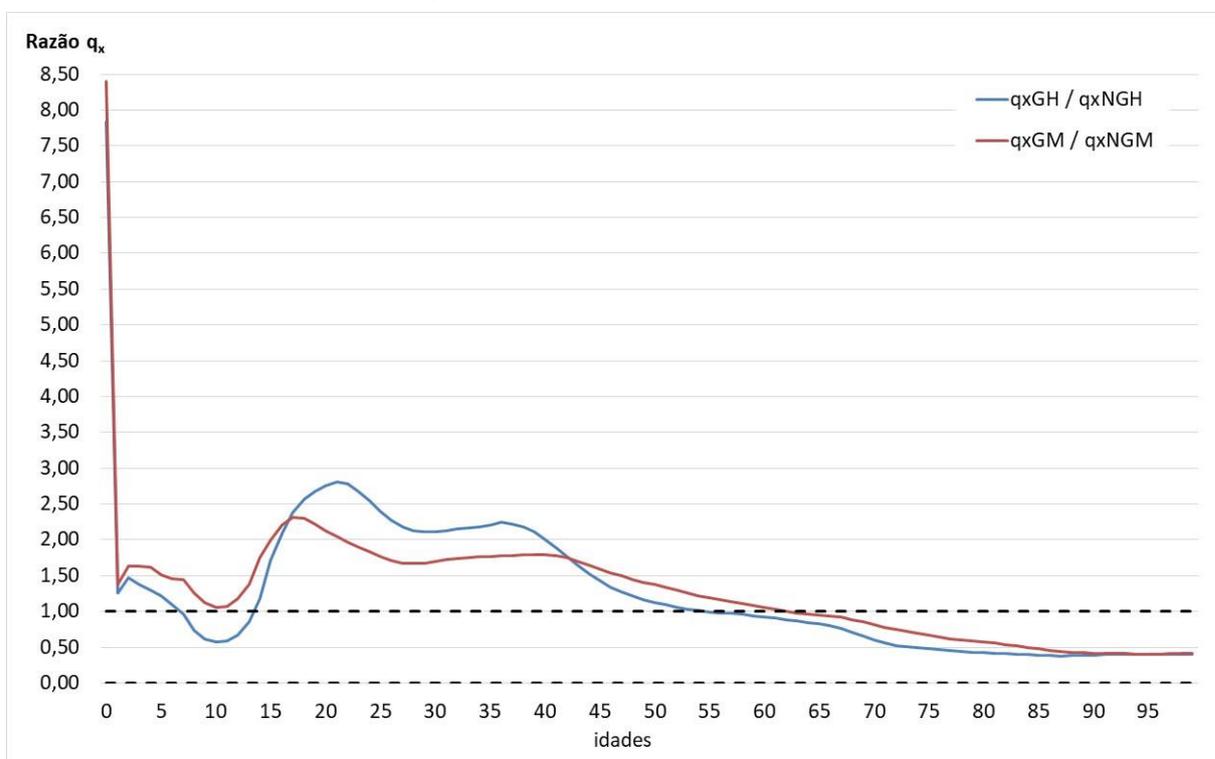
O *Gráfico 77* e o *Gráfico 78* apresentam o cálculo do IRL, por sexo, com *benchmark* na tábua AT-2000 e taxa de juros de 6% a.a., considerando os 60 e os 65 anos como as idades elegíveis para o requerimento do benefício pleno, respectivamente. O *Painel 19* apresenta os gráficos do IRL, em função das taxas de juros variando de 6% a.a. até 0% a.a., onde as linhas representam os resultados, por sexo, e as colunas, as idades de aposentadoria, 60 e 65 anos.

Por exemplo, para um homem com 20 anos de idade que vá se aposentar aos 60 anos, o Impacto do Risco de Longevidade (IRL), considerando a taxa de juros de 6% a.a., foi calculado em 7,57%, aumentando para 12,50%, no caso da aposentadoria se dar aos 65 anos. Para uma mulher nas mesmas condições, o IRL passa de 3,54%, aos 60 anos, para 5,96%, aos 65 anos. Considerando que a pessoa possui 60 anos e já pode se aposentar, o IRL foi de 2,63%, entre os homens, e -0,20%, no caso das mulheres. No caso da aposentadoria se dar aos 65 anos, para os homens com essa idade, o IRL passa para 4,13%, e no caso feminino, para 0,35%.

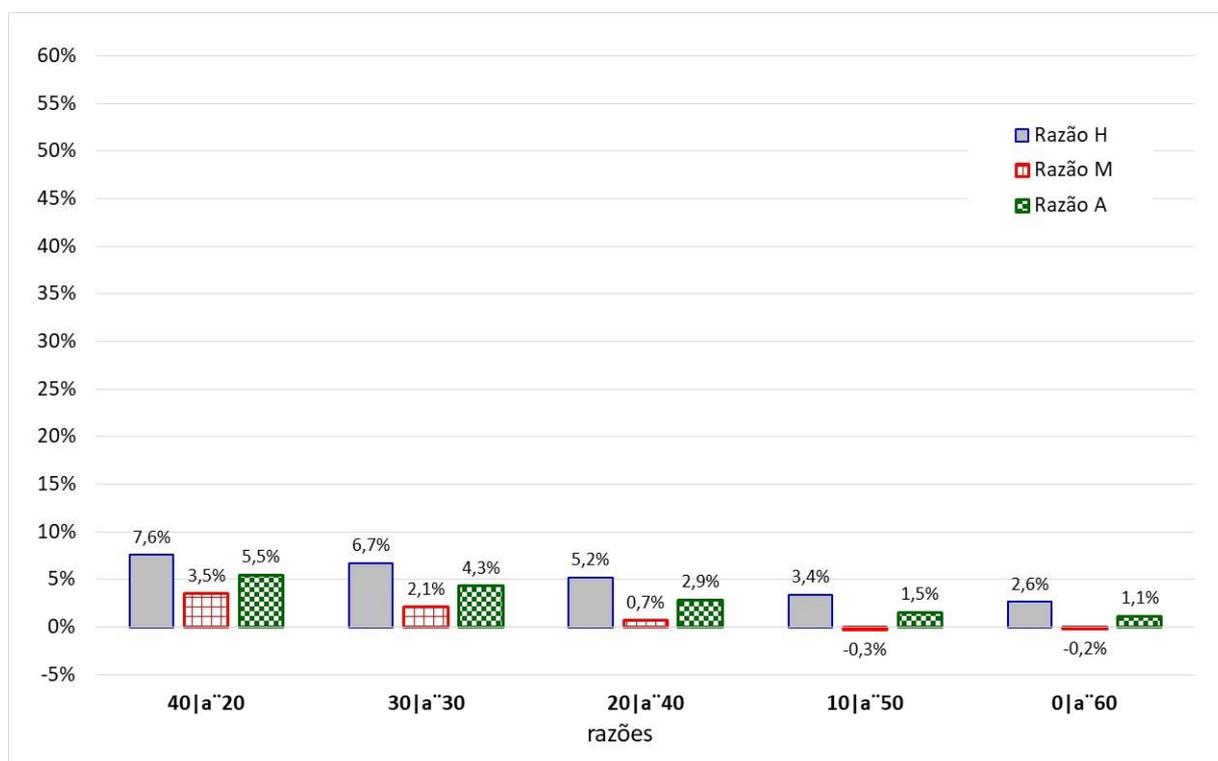
Analisando a sensibilidade do IRL em relação à taxa de juros, para o homem de 20 anos que vá se aposentar aos 60 anos, o IRL sobe para 9,11% e 10,93%, com taxas de juros de 5% a.a. e 4% a.a., respectivamente. Caso a aposentadoria se dê aos 65 anos, o IRL sobe mais ainda, para 14,28% e 16,33%, com as mesmas taxas de juros. No caso da mulher de 20 anos que vá se aposentar aos 60 anos, o IRL sobe para 4,50% e 5,66%, com taxas de juros de 5% a.a. e 4% a.a., respectivamente. Caso a aposentadoria se dê aos 65 anos, o IRL sobe, mais ainda, para 7,10% e 8,41%, considerando as mesmas taxas de juros.

Gráfico 75 –  $q_x$ 's – Tábua BR-Generacional X Tábua AT-2000

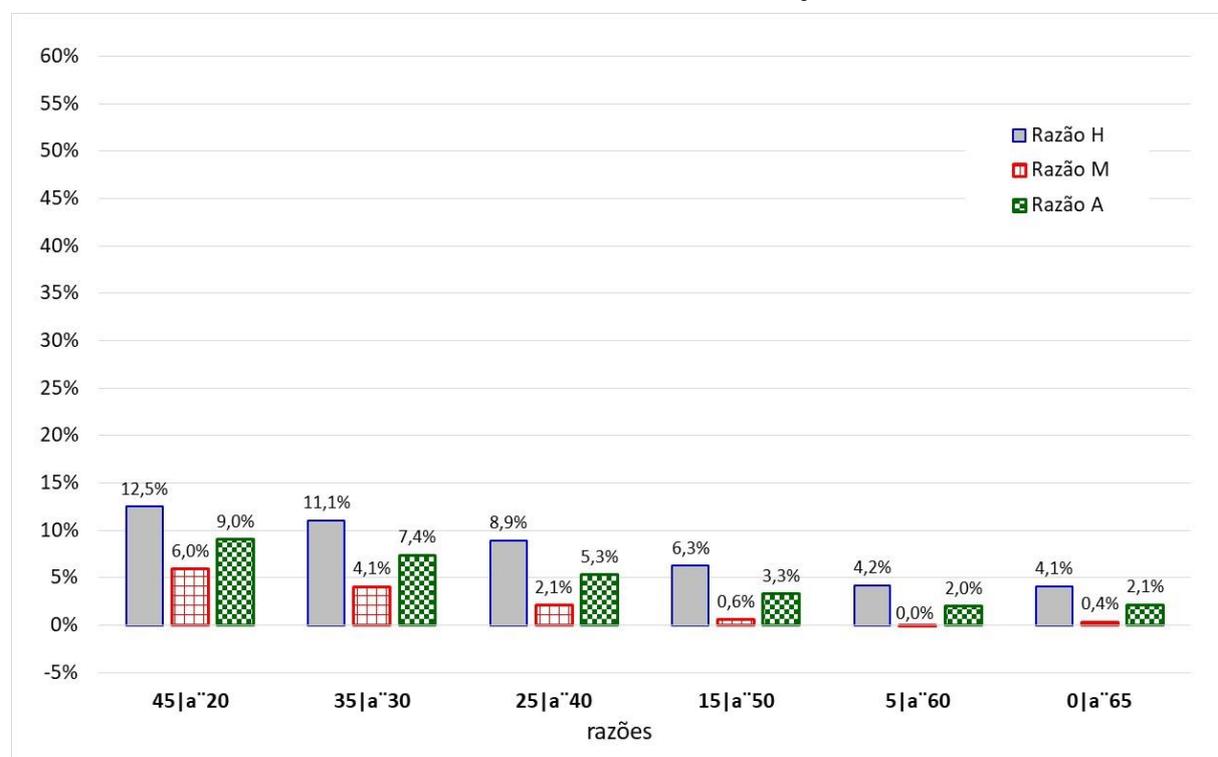
fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua AT-2000

Gráfico 76 – Razão  $q_x$ 's – Tábua BR-Generacional X Tábua AT-2000

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua AT-2000

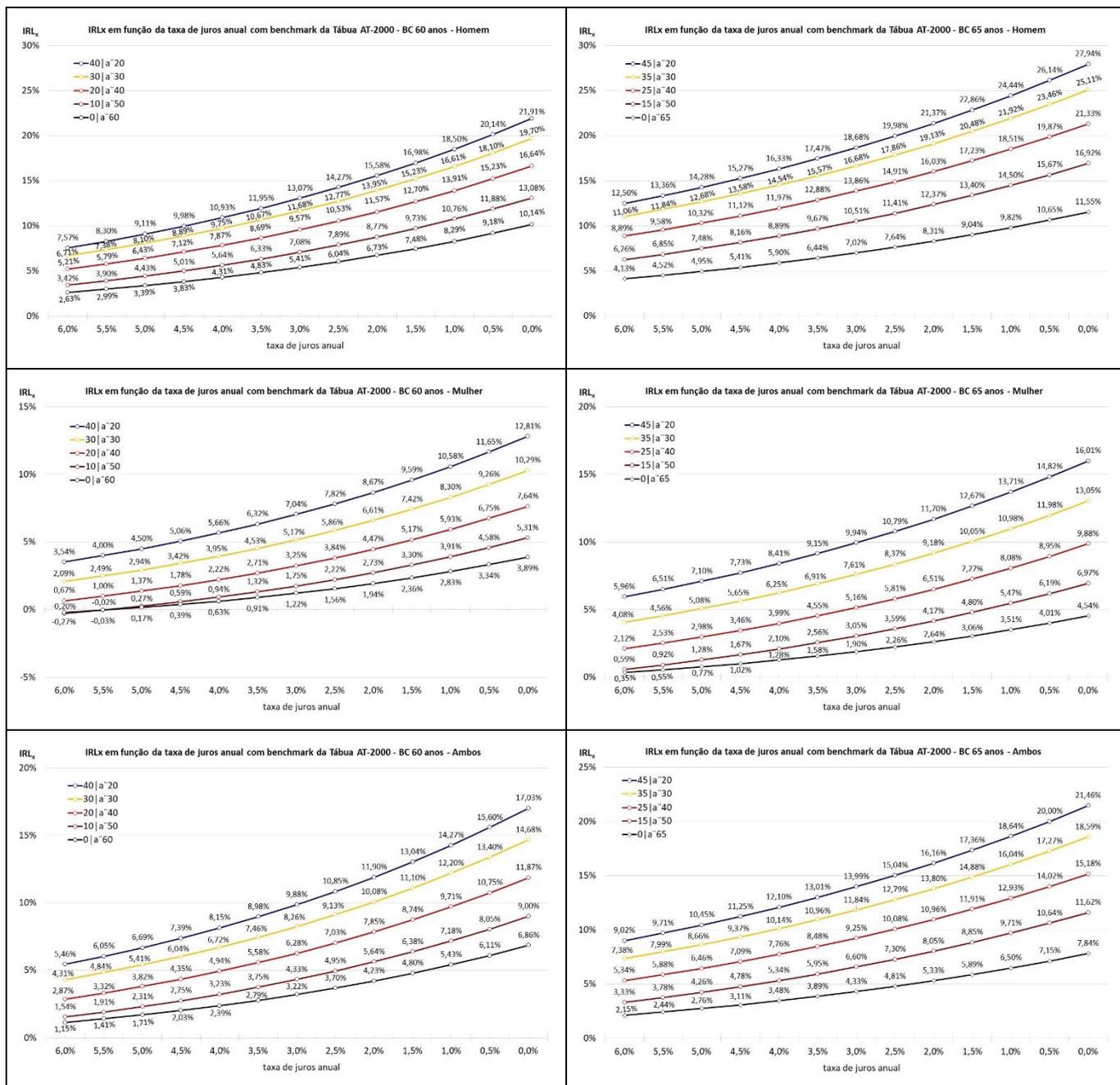
Gráfico 77 –  $IRL_x$  – benchmark Tábua AT-2000, taxa de juros de 6% a.a., BC 60 anos

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua AT-2000

Gráfico 78 –  $IRL_x$  – benchmark Tábua AT-2000, taxa de juros de 6% a.a., BC 65 anos

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua AT-2000

Painel 19 – Impacto do Risco de Longevidade em função da taxa de juros com *benchmark* na Tábua AT-2000 – Homem, Mulher e Ambos os Sexos



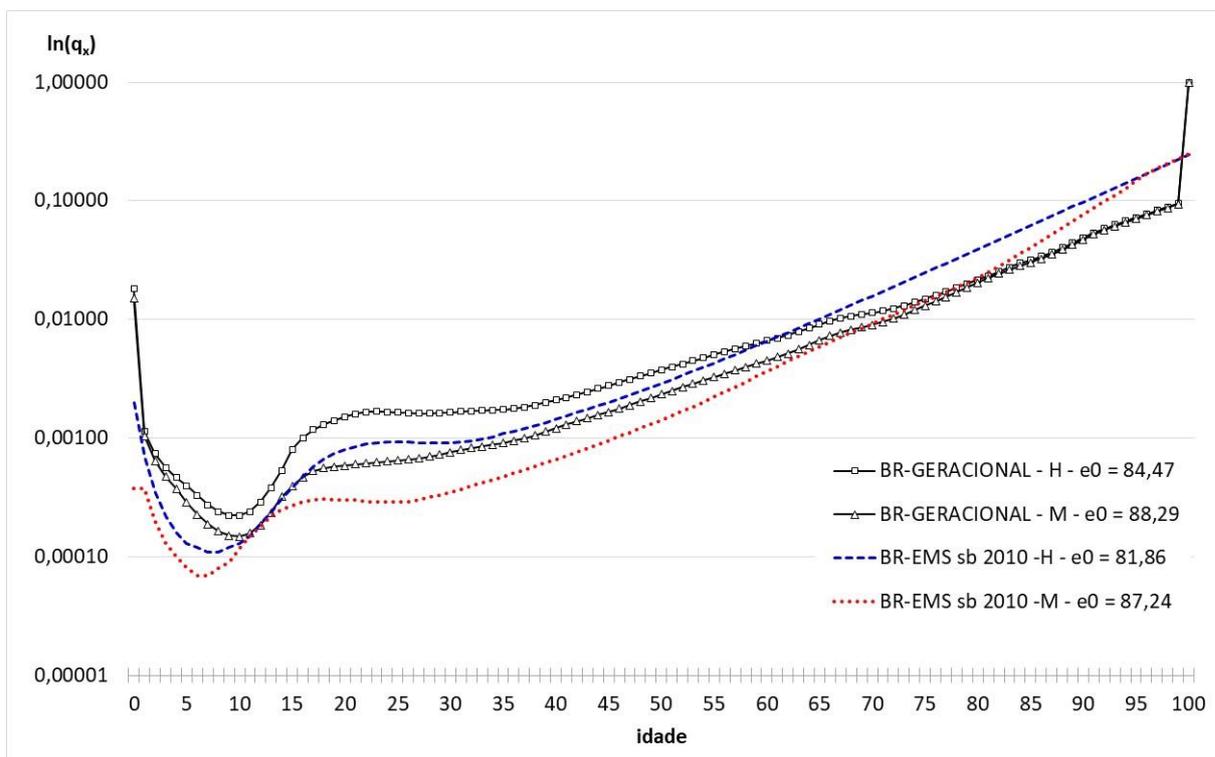
fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua AT-2000

O *Gráfico 79* e o *Gráfico 80* apresentam, respectivamente, os  $q_x$ 's da Tábua BR-Generacional e da tábua EMS-sb-2010, por sexo, e a razão entre os referidos  $q_x$ 's. Aqui, percebe-se claramente um *crossover* nas probabilidades de morte masculinas e um *crossover* para no caso feminino. Como a tábua EMS-sb-2010 representa uma experiência genuína nacional, baseada em informações de um seletivo grupo de indivíduos, aquelas pessoas que compram o produto previdência junto às EAPC's, sua probabilidade de morte é menor em todas as idades, quando comparada com a tábua do ano-base das projeções, a IBGE-2010, tanto para homens, quanto para mulheres. Comparando com a Tábua BR-Generacional, os  $q_x$ 's da EMS-sb-2010 são menores até os 60 anos de idade, para os homens, e até os 69 anos de idade, para as mulheres. Em relação à expectativa de vida ao nascer, a  $e_0$  geracional é 2,62 e 1,06 anos maior do que a  $e_0$  da tábua BR-EMS-sb 2010, para homens ( $e_0 = 81,86$  anos) e mulheres ( $e_0 = 87,24$  anos), respectivamente.

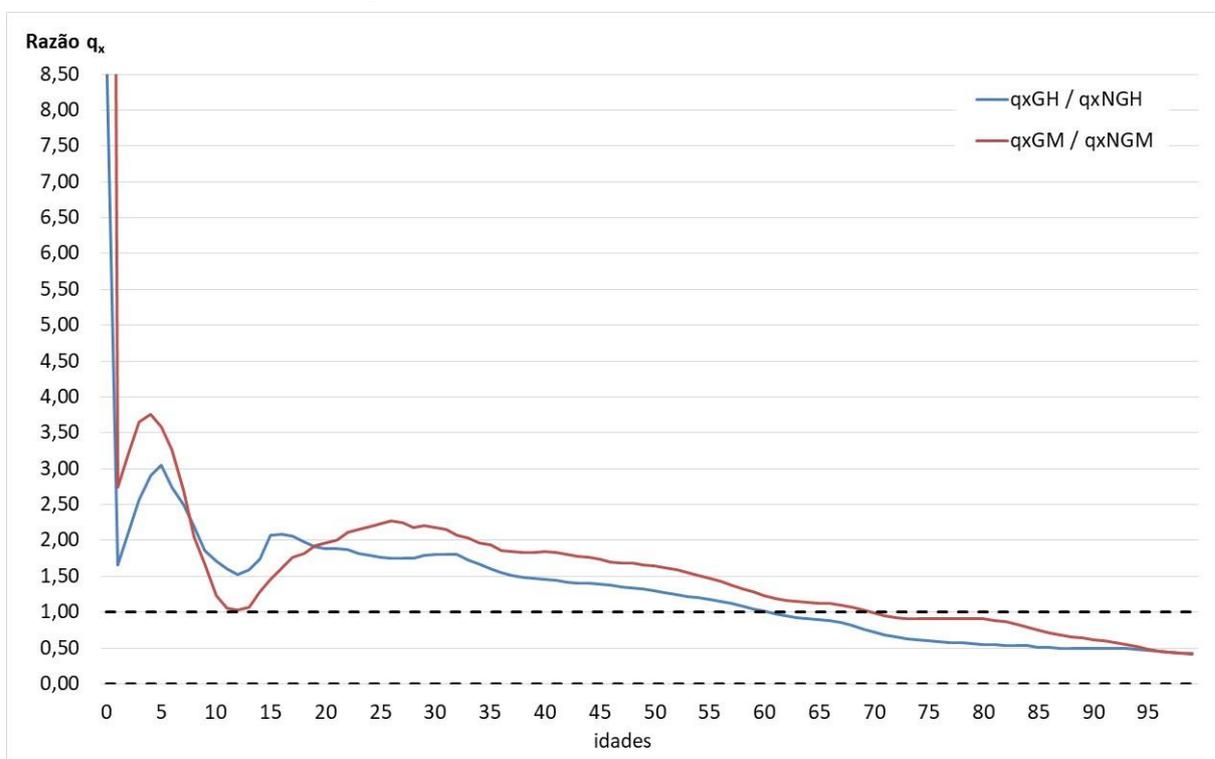
O *Gráfico 81* e o *Gráfico 82* apresentam o cálculo do IRL, por sexo, com *benchmark* na tábua EMS-sb-2010 e taxa de juros de 6% a.a., considerando os 60 e os 65 anos como as idades elegíveis para o requerimento do benefício pleno, respectivamente. O *Painel 20* apresenta os gráficos do IRL, em função das taxas de juros, variando de 6% a.a. até 0% a.a., onde as linhas representam os resultados por sexo e as colunas, as idades de aposentadoria, 60 e 65 anos.

Por exemplo, para um homem com 20 anos de idade que vá se aposentar aos 60 anos, o Impacto do Risco de Longevidade (IRL), considerando a taxa de juros de 6% a.a., foi calculado em 4,07%, aumentando para 7,07%, no caso da aposentadoria se dar aos 65 anos. Para uma mulher nas mesmas condições, o IRL passa de -0,99%, aos 60 anos, para -0,45%, aos 65 anos. Considerando que a pessoa possui 60 anos e já pode se aposentar, o IRL foi de -0,62%, no caso dos homens, e -3,91%, no caso das mulheres. Se aposentadoria se der aos 65 anos, para os homens com essa idade, o IRL passa para -0,51%, no caso feminino, para -4,72%.

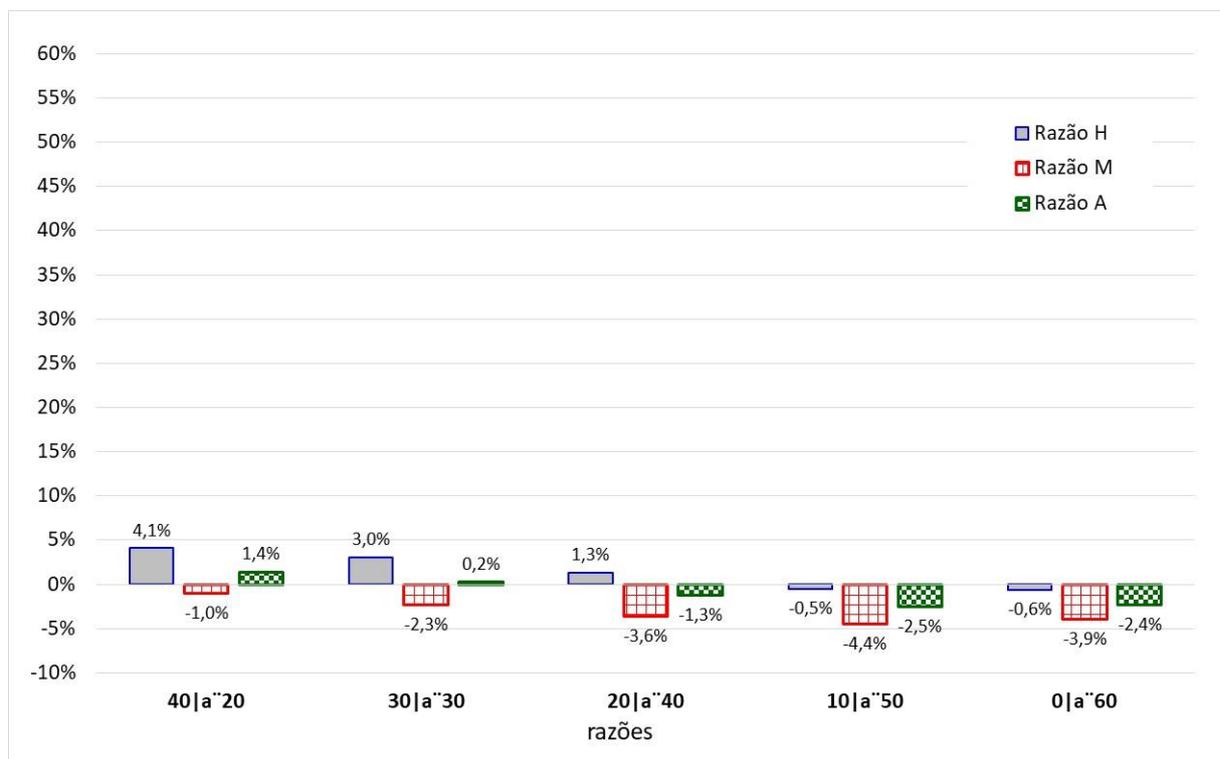
Analisando a sensibilidade do IRL em relação à taxa de juros, para o homem de 20 anos que vá se aposentar aos 60 anos, o IRL sobe para 5,08% e 6,27%, com taxas de juros de 5% a.a. e 4% a.a., respectivamente. Caso a aposentadoria se dê aos 65 anos, o IRL sobe mais ainda, para 8,22% e 9,55%, com as mesmas taxas de juros. No caso da mulher de 20 anos que vá se aposentar aos 60 anos, o IRL sobe para -0,64% e -0,22%, com taxas de juros de 5% a.a. e 4% a.a., respectivamente. Caso a aposentadoria se dê aos 65 anos, o IRL sobe mais ainda, para -0,02% e 0,49%, com as mesmas taxas de juros.

Gráfico 79 –  $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua BR-EMS-sb-2010

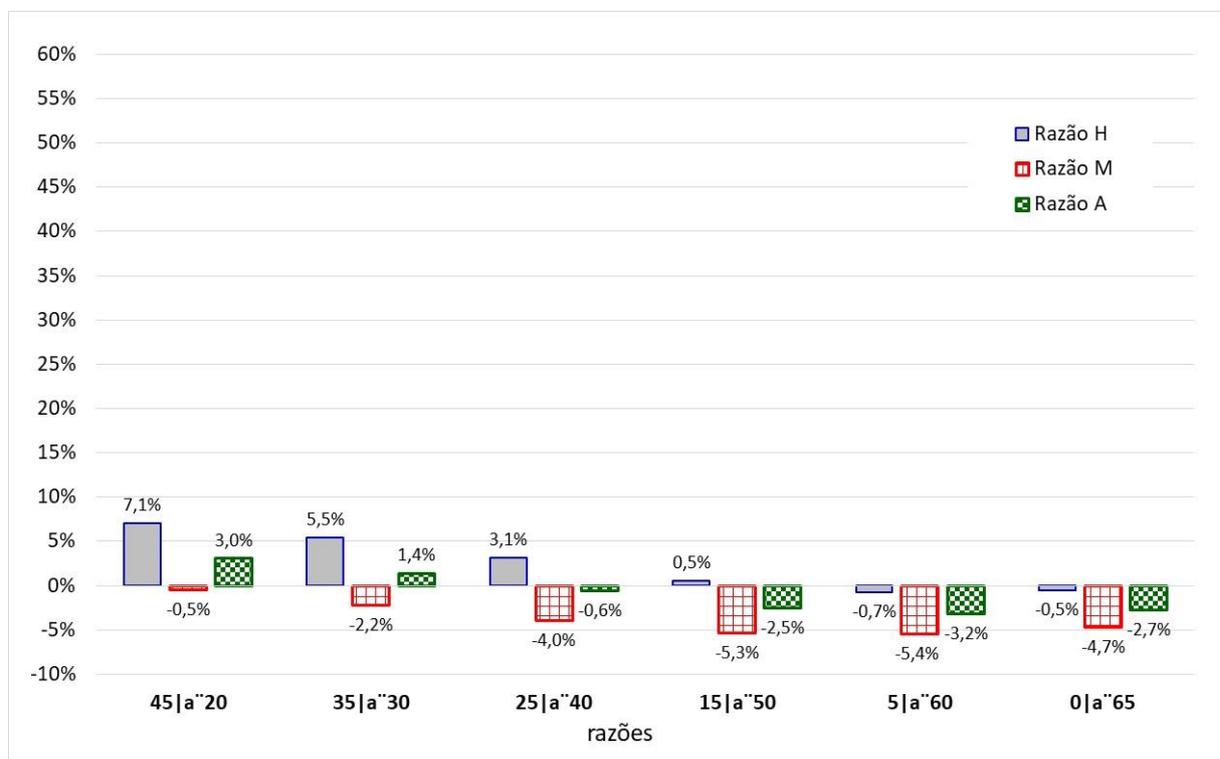
fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua BR-EMS-sob-2010

Gráfico 80 – Razão  $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua BR-EMS-sb-2010

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua BR-EMS-sob-2010

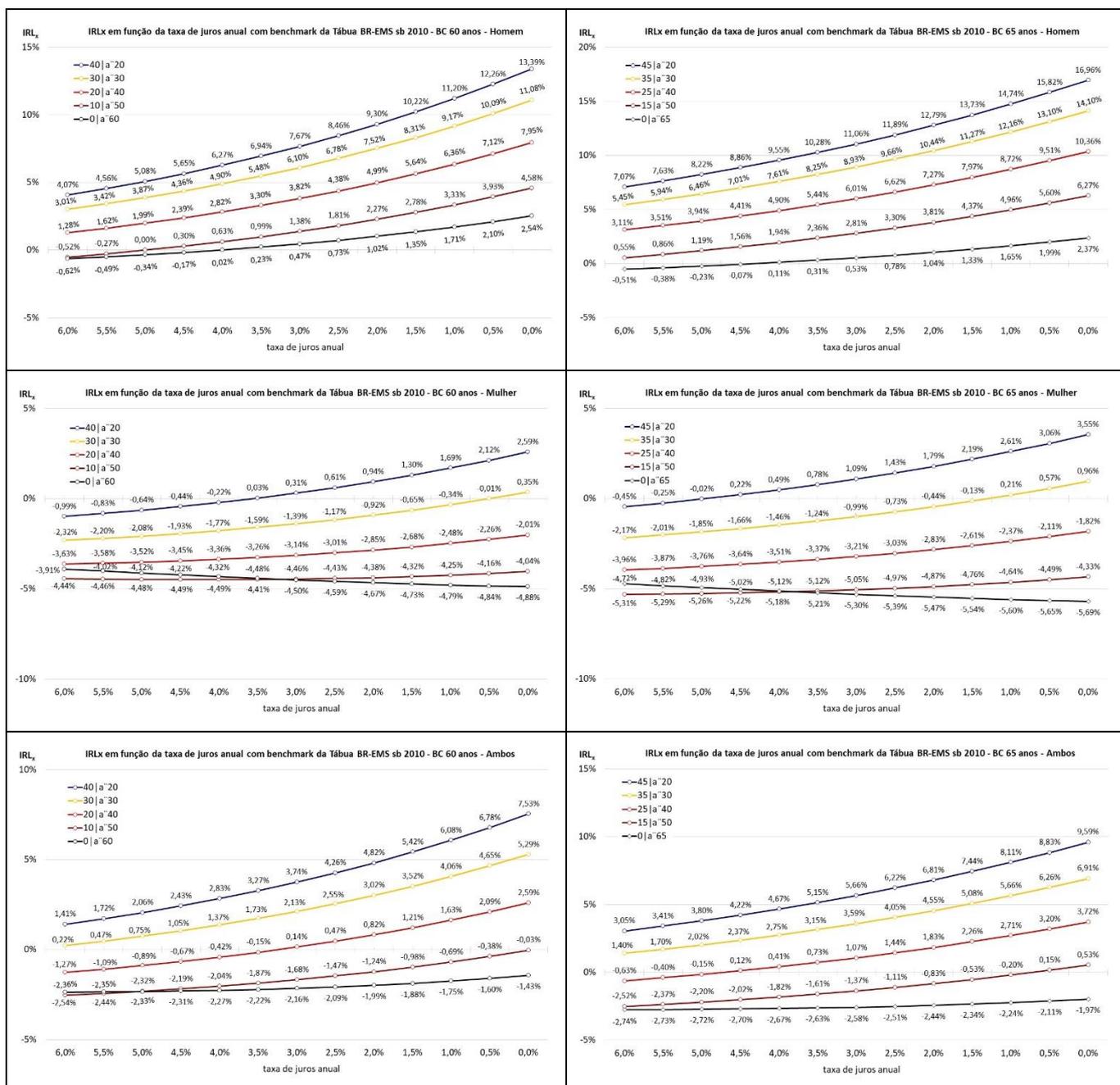
Gráfico 81 – IRL<sub>x</sub> – benchmark Tábua BR-EMS-sb-2010, taxa de juros de 6% a.a., BC 60 anos

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua BR-EMS-sob-2010

Gráfico 82 – IRL<sub>x</sub> – benchmark Tábua BR-EMS-sb-2010, taxa de juros de 6% a.a., BC 65 anos

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua BR-EMS-sob-2010

Painel 20 – Impacto do Risco de Longevidade em função da taxa de juros com *benchmark* na Tábua BR-EMS-sb-2010 – Homem, Mulher e Ambos os Sexos



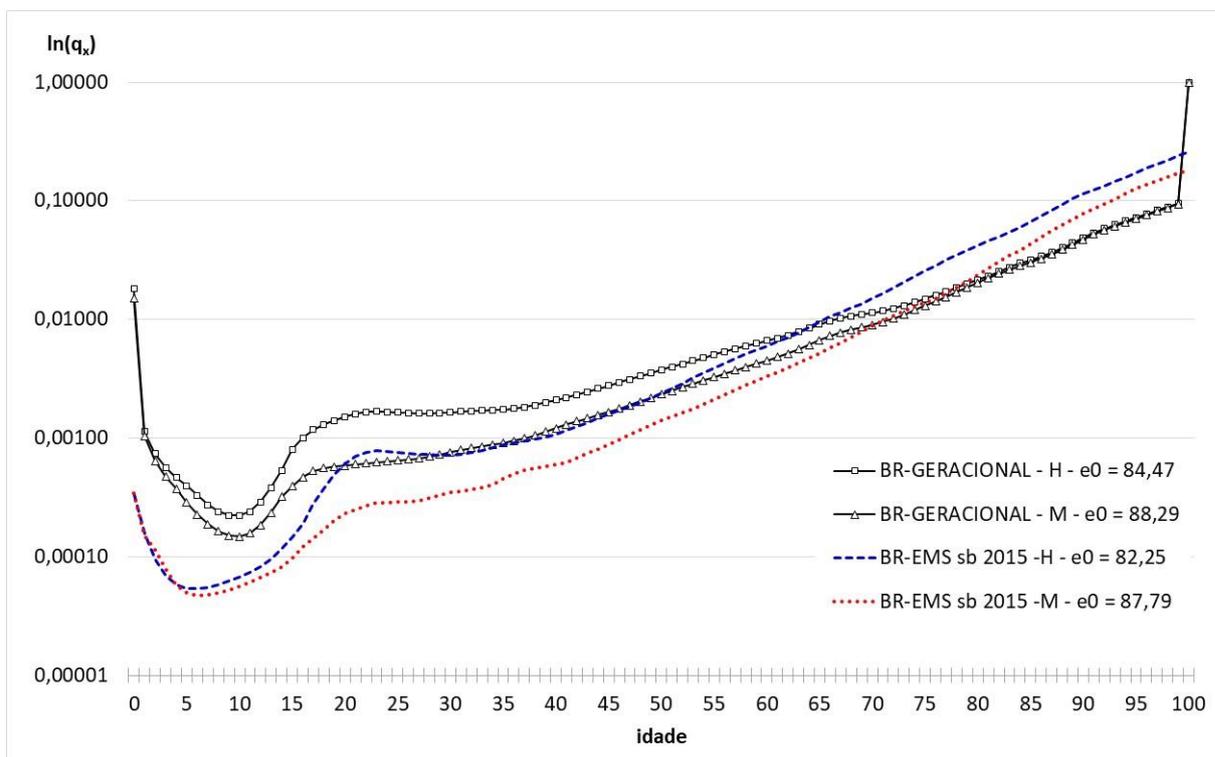
fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua BR-EMS-sob-2010

O *Gráfico 83* e o *Gráfico 84* apresentam, respectivamente, os  $q_x$ 's da Tábua BR-Geracional e da tábua EMS-sb-2015, por sexo, e a razão entre os referidos  $q_x$ 's. Tal qual ocorrera na tábua EMS-sb-2010 anterior, percebe-se claramente um *crossover* nas probabilidades de morte masculinas e um *crossover* no caso feminino. A tábua EMS-sb-2015 representa uma atualização da EMS-sb-2010, sendo sua probabilidade de morte menor em todas as idades, quando comparada à tábua IBGE-2010, do ano-base da projeção, tanto para homens, quanto para mulheres. Comparando com a Tábua BR-Geracional, os  $q_x$ 's da EMS-sb-2015 são menores até os 63 anos de idade, para os homens, e até os 70 anos, para as mulheres. Em relação à expectativa de vida ao nascer, a  $e_0$  geracional é 2,22 e 0,50 anos maior do que a  $e_0$  da tábua BR-EMS-sb-2015 para homens ( $e_0 = 82,25$  anos) e mulheres ( $e_0 = 87,79$  anos), respectivamente.

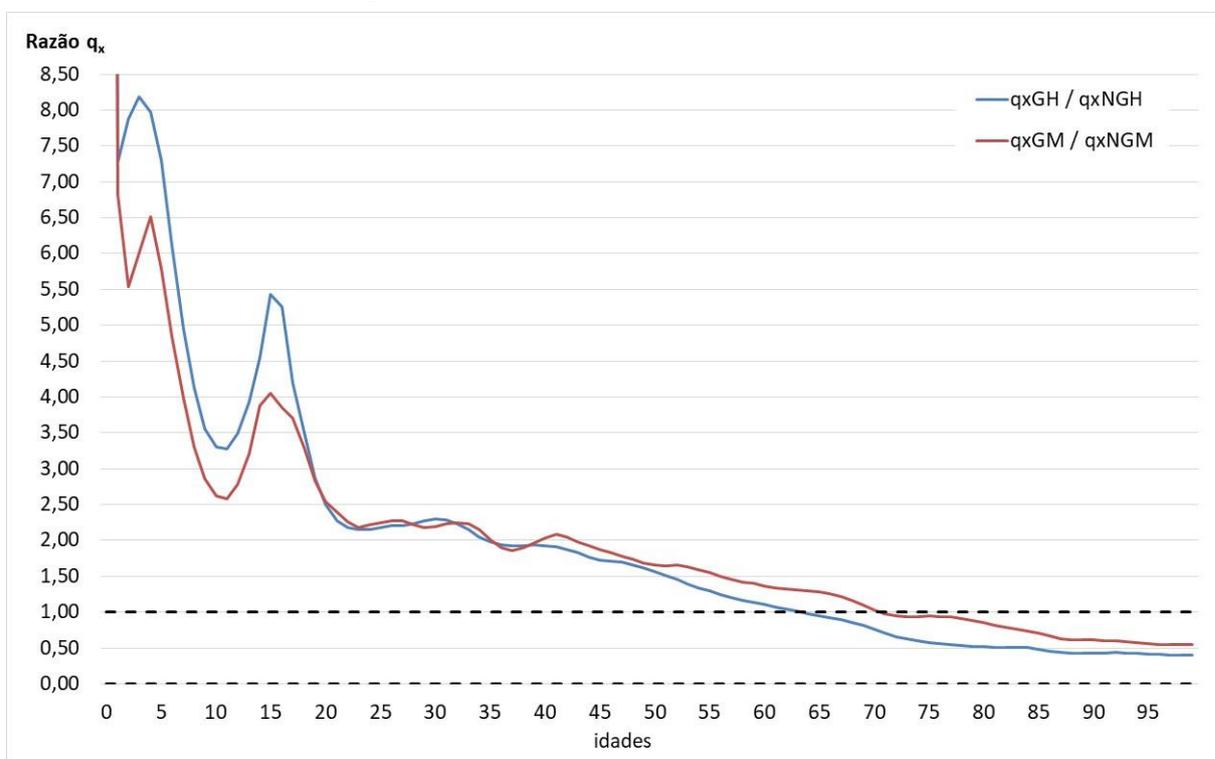
O *Gráfico 85* e o *Gráfico 86* apresentam o cálculo do IRL, por sexo, com *benchmark* na tábua BR-EMS-sb-2015 e taxa de juros de 6% a.a., considerando os 60 e os 65 anos como as idades elegíveis para o requerimento do benefício pleno, respectivamente. O *Painel 21* apresenta os gráficos do IRL, em função das taxas de juros de variando de 6% a.a. até 0% a.a., onde as linhas representam os resultados por sexo e as colunas, as idades de aposentadoria, 60 e 65 anos.

Por exemplo, para um homem com 20 anos de idade que vá se aposentar aos 60 anos, o Impacto do Risco de Longevidade (IRL), considerando a taxa de juros de 6% a.a., foi calculado em 2,91%, aumentando para 6,02%, caso a aposentadoria se dê aos 65 anos. Para uma mulher nas mesmas condições, o IRL passa de -1,56%, aos 60 anos, para -1,15%, aos 65 anos. Considerando que a pessoa possui 60 anos e já pode se aposentar, o IRL foi de -0,48%, entre dos homens, e -4,26%, entre as mulheres. No caso da aposentadoria se dar aos 65 anos, para os homens com essa idade, o IRL passa para 0,09%, no caso feminino, para -4,94%.

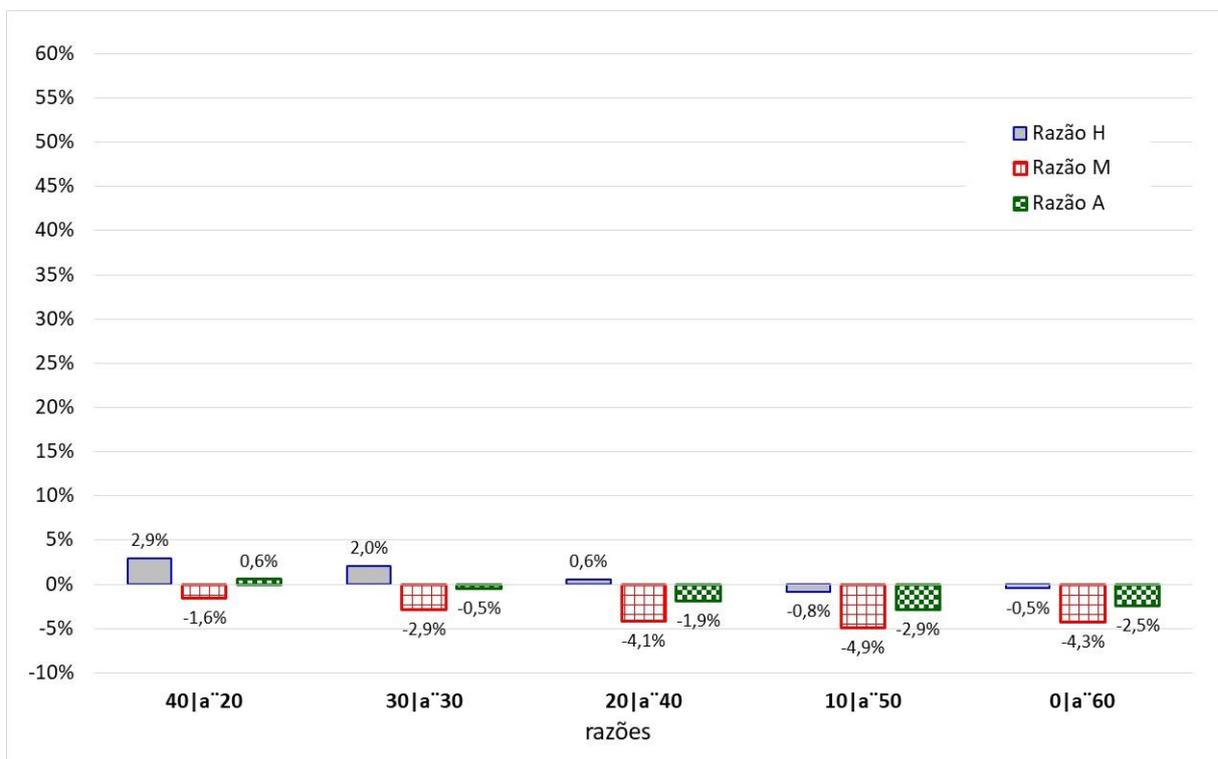
Analisando a sensibilidade do IRL em relação à taxa de juros, para o homem de 20 anos que vá se aposentar aos 60 anos, o IRL sobe para 4,02% e 5,34%, com taxas de juros de 5% a.a. e 4% a.a., respectivamente. Caso a aposentadoria se dê aos 65 anos, o IRL sobe mais ainda, para 7,31% e 8,80%, considerando as mesmas taxas de juros. No caso da mulher de 20 anos que vá se aposentar aos 60 anos, o IRL sobe para -1,23% e -0,82%, com taxas de juros de 5% a.a. e 4% a.a., respectivamente. Caso a aposentadoria se dê aos 65 anos, o IRL sobe mais ainda para -0,73% e -0,23%, considerando as mesmas taxas de juros.

Gráfico 83 –  $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua BR-EMS-sb-2015

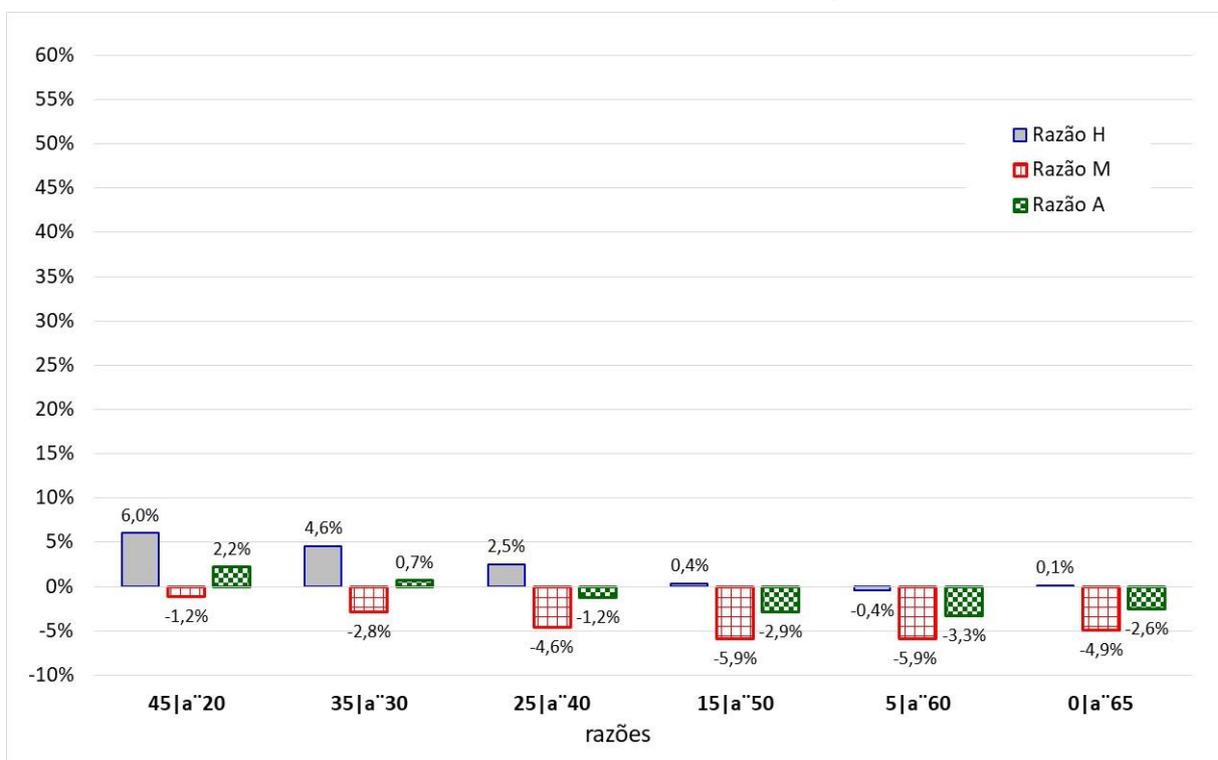
fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua BR-EMS-sob-2015

Gráfico 84 – Razão  $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua BR-EMS-sb-2015

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua BR-EMS-sob-2015

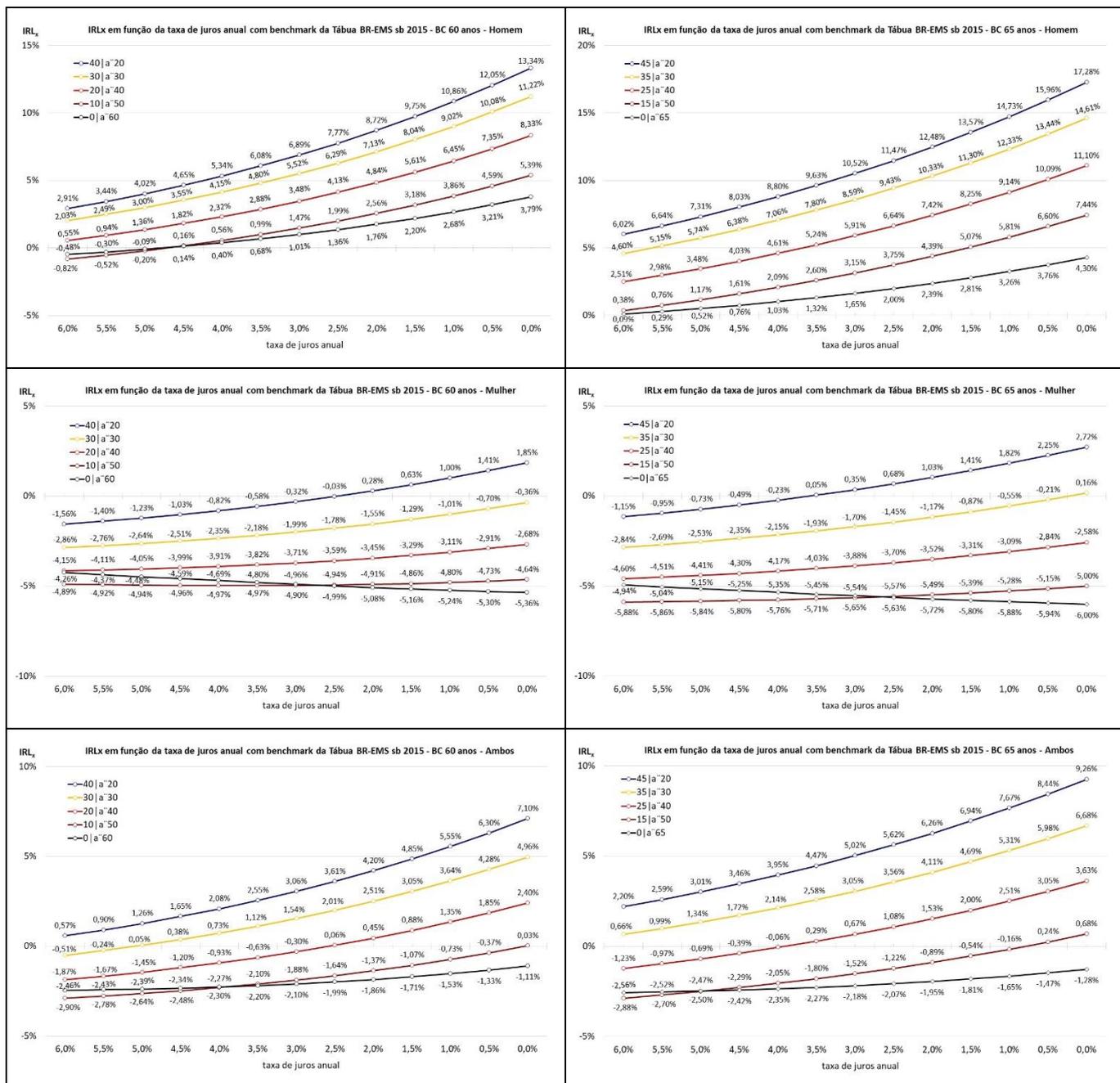
Gráfico 85 –  $IRL_x$  – benchmark Tábua EMS-sb-2015, taxa de juros de 6% a.a., BC 60 anos

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua BR-EMS-sob-2015

Gráfico 86 –  $IRL_x$  – benchmark Tábua EMS-sb-2015, taxa de juros de 6% a.a., BC 65 anos

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua BR-EMS-sob-2015

Painel 21 – Impacto do Risco de Longevidade em função da taxa de juros com *benchmark* na Tábua EMS-sb-2015 – Homem, Mulher e Ambos os Sexos



fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua BR-EMS-sob-2015

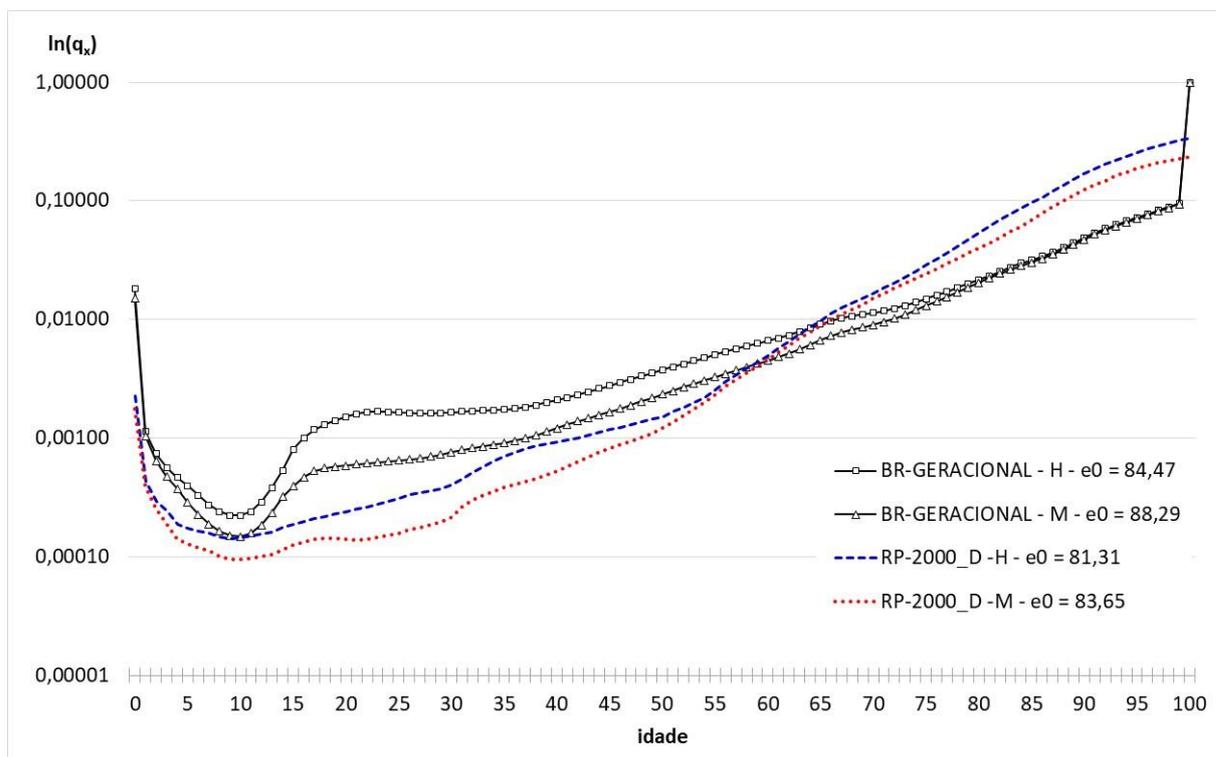
### 6.3.4) Risco de Longevidade na Previdência Complementar do Servidor Público Federal - FUNPRESP

O *Gráfico 87* e o *Gráfico 88* apresentam, respectivamente, os  $q_x$ 's da Tábua BR-Generacional e da tábua RP-2000 atualizada (pela escala de *improvement* AA para 2019), por sexo, e a razão entre os referidos  $q_x$ 's. Percebe-se claramente um *crossover* nas probabilidades de morte masculinas e um *crossover*, no caso feminino. Comparando com a Tábua BR-Generacional, os  $q_x$ 's da RP-2000 atualizada são menores até os 63 anos de idade, entre os homens, e até os 59 anos de idade, entre as mulheres. Em relação à expectativa de vida ao nascer, a  $e_0$  geracional é 3,17 e 4,64 anos maior do que a  $e_0$  da tábua RP-2000 (atualizada) de homens ( $e_0 = 81,31$  anos) e mulheres ( $e_0 = 83,65$  anos), respectivamente.

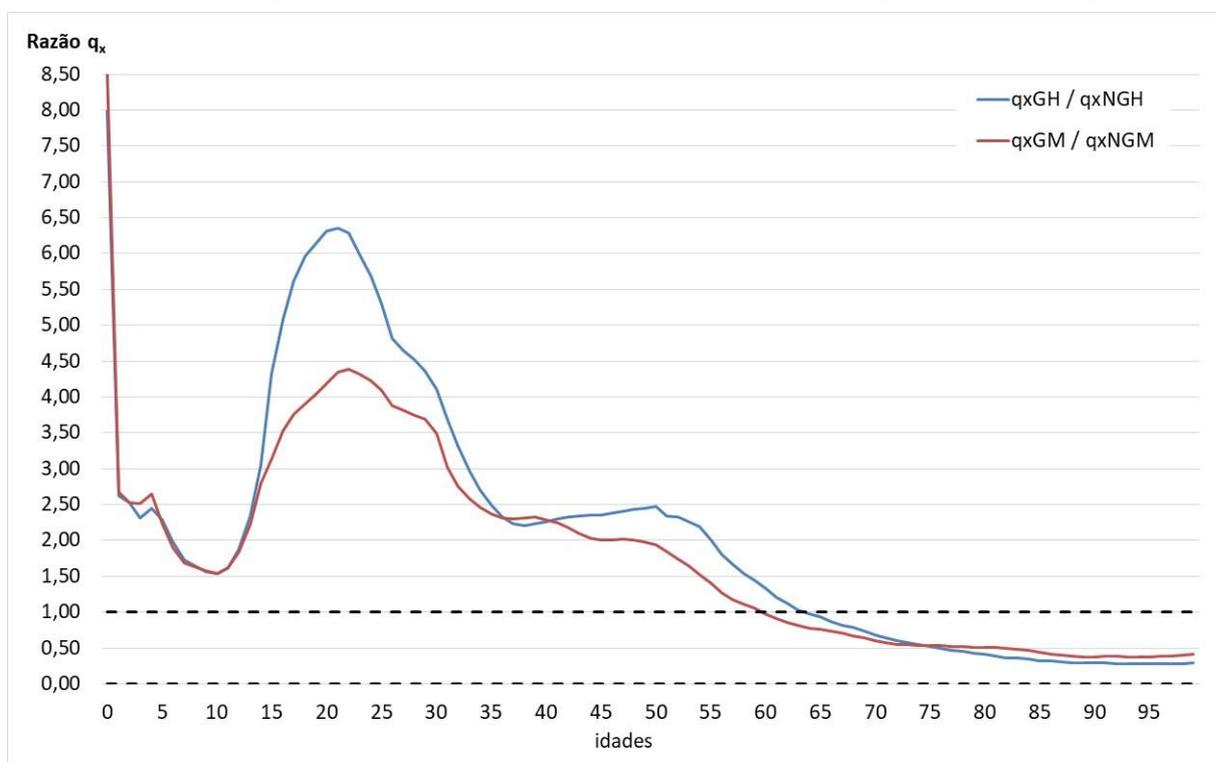
O *Gráfico 89* e o *Gráfico 90* apresentam o cálculo do IRL, por sexo, com *benchmark* na tábua RP-2000 atualizada e taxa de juros de 6% a.a., considerando os 60 e os 65 anos como as idades elegíveis para o requerimento do benefício pleno, respectivamente. O *Painel 22* apresenta os gráficos do IRL, em função das taxas de juros variando de 6% a.a. até 0% a.a., onde as linhas representam os resultados por sexo e as colunas, as idades de aposentadoria, 60 e 65 anos.

Por exemplo, para um homem com 20 anos de idade que vá se aposentar aos 60 anos, o Impacto do Risco de Longevidade (IRL), considerando a taxa de juros de 6% a.a., foi calculado em 3,06%, aumentando para 7,61%, no caso da aposentadoria se dar aos 65 anos. Para uma mulher nas mesmas condições, o IRL passa de 5,26%, aos 60 anos, para 9,07%, aos 65 anos. Se a pessoa tiver 60 anos e já pode se aposentar, o IRL é de 1,92%, no caso dos homens, e 2,40%, no caso das mulheres. Se a aposentadoria se der aos 65 anos, para os homens com essa idade, o IRL passa para 4,15%, e no caso feminino, para 3,79%.

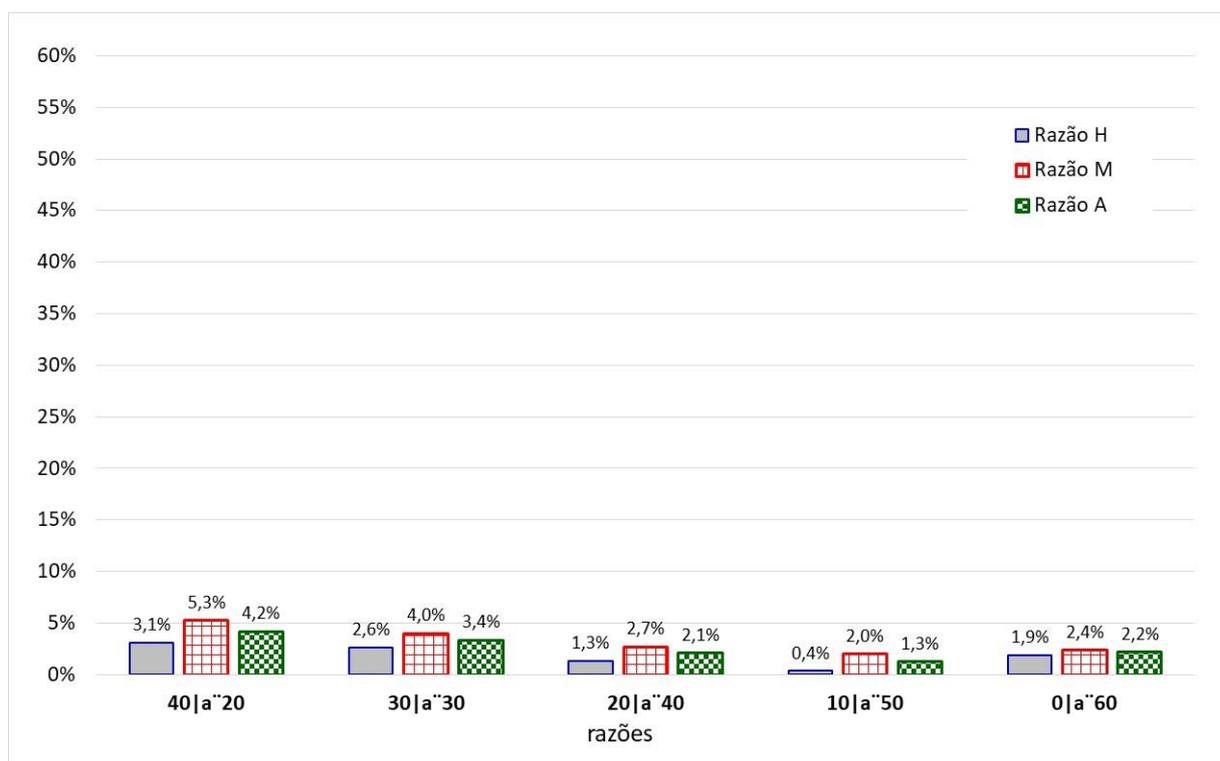
Analisando a sensibilidade do IRL em relação à taxa de juros, para o homem de 20 anos que vá se aposentar aos 60 anos, o IRL sobe para 4,66% e 6,56%, com taxas de juros de 5% a.a. e 4% a.a., respectivamente. Caso a aposentadoria se dê aos 65 anos, o IRL sobe mais ainda, para 9,51% e 11,73%, com as mesmas taxas de juros. No caso da mulher de 20 anos que vá se aposentar aos 60 anos, o IRL sobe para 6,53% e 8,04%, com taxas de juros de 5% a.a. e 4% a.a., respectivamente. Caso a aposentadoria se dê aos 65 anos, o IRL sobe mais ainda, para 10,53% e 12,21%, com as mesmas taxas de juros.

Gráfico 87 –  $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua RP-2000 proj. escala AA p/ 2019

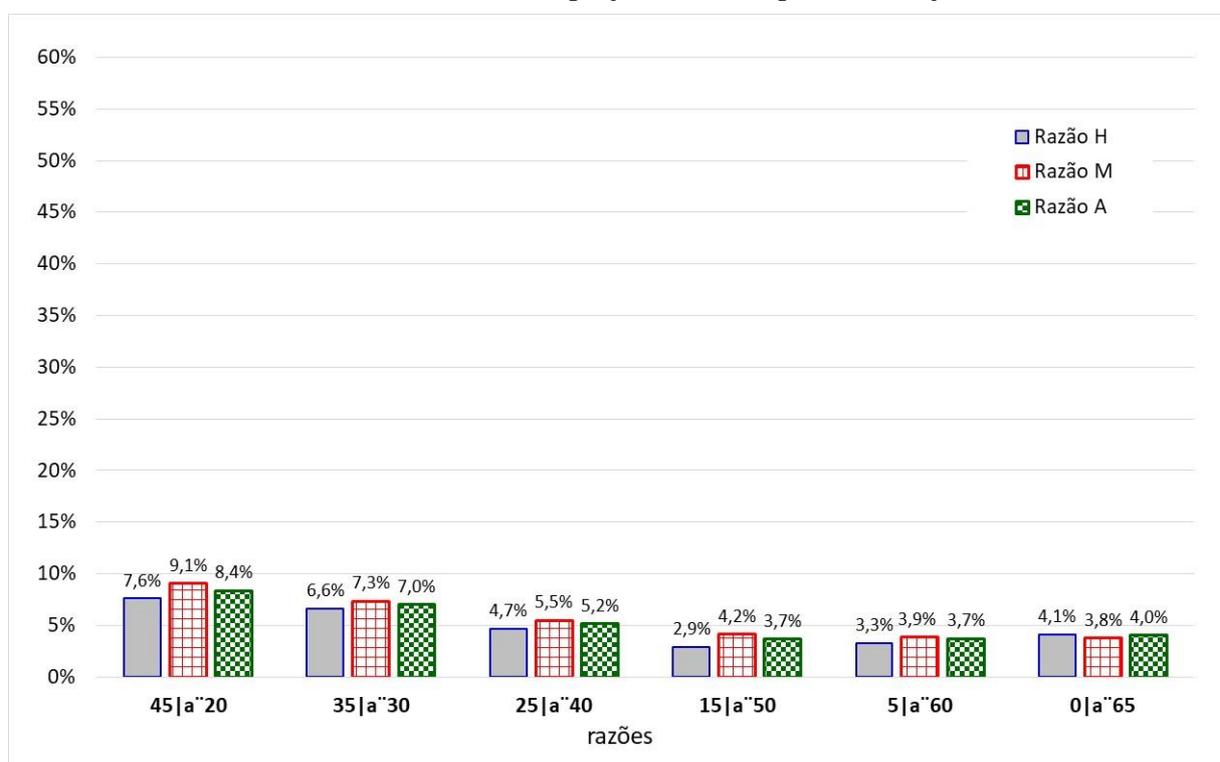
fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua RP-2000 proj.

Gráfico 88 – Razão  $q_x$ 's – Tábua BR-Geracional X Tábua RP-2000 proj. escala AA p/ 2019

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua RP-2000 proj.

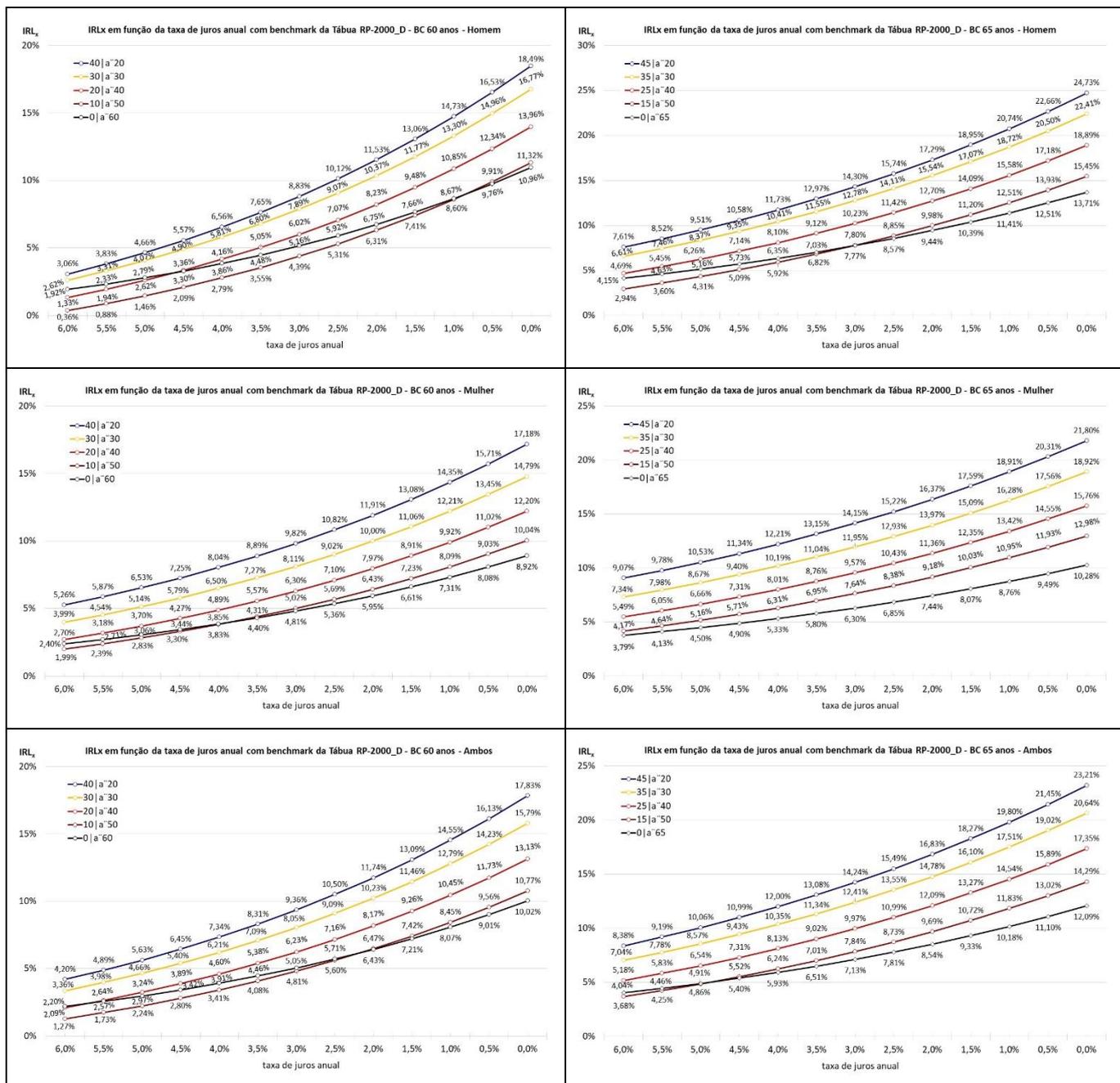
Gráfico 89 – IRL<sub>x</sub> – benchmark Tábua RP-2000 proj. escala AA p/ 2019, tx. juros de 6% a.a., BC 60 anos

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua RP-2000 proj.

Gráfico 90 – IRL<sub>x</sub> – benchmark Tábua RP-2000 proj. escala AA p/ 2019, tx. juros de 6% a.a, BC 65 anos

fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua RP-2000 proj.

Painel 22 – Impacto do Risco de Longevidade em função da taxa de juros com *benchmark* na Tábua RP-2000 proj. escala AA p/ 2019 – Homem, Mulher e Ambos os Sexos



fonte: IBGE, Tábuas de Mortalidade 1980, 1991, 2000, 2010, estimativas do autor para 1950, 1960 e 1970 e Tábua RP-2000 proj.

### **6.3.5) Exposição das Instituições Previdenciárias Brasileiras ao Risco de Longevidade**

Para classificar a situação de cada entidade previdenciária brasileira em relação à exposição ao Risco de Longevidade, foi criada a seguinte escala: 1) muito exposto; 2) exposto; 3) pouco exposto; e 4) não exposto.

Em linhas gerais, de todas as entidades previdenciárias brasileiras objeto de aferição e comparação do IRL no Brasil, os RPPS's foram aquelas que apresentaram o maior Impacto do Risco de Longevidade, visto que a tábua *benchmark* é a do IBGE de ambos os sexos, que, apesar de atualizada anualmente pelo Instituto com base na projeção da mortalidade utilizada na última revisão de projeção da população, ainda assim é uma tábua estática, não incorporando os paulatinos ganhos observados na sobrevivência dos indivíduos ano após ano, além de ser concebida com base na média nacional. Os resultados aqui obtidos para os RPPS apontam que os mesmos poderiam ser classificados como: 1) muito expostos ao Risco de Longevidade.

Em relação às tábuas estáticas da família das AT's (*Annuity Tables*), construídas com base na experiência norteamericana, muito utilizadas tanto nas Entidades Fechadas (EFPC), quanto nas Entidades Abertas (EAPC) de Previdência Complementar de todo o país, o IRL, apesar de ser bem menor, quando comparado àquele calculado para os RPPS's, não pode ser jamais negligenciado. O IRL é menor para a AT-2000 quando comparado ao da AT-83, como era esperado. Com base nos resultados obtidos, as EFPC's ou EAPC's que adotam as tábuas da família das AT's podem ser classificadas como: 2) expostas ao Risco de Longevidade.

As tábuas BR-EMS (sobrevivência) possuem uma característica muito peculiar, que é o fato de terem sido construídas com base na experiência de um seleto grupo de indivíduos brasileiros, aquelas pessoas que compram produtos de previdência (rendas) junto ao mercado segurador aberto, que possuem mortalidade muito menor, quando comparada à média nacional, em todas as idades. Apesar de serem tábuas atualizáveis, conforme as novas experiências vão se acumulando com o passar dos anos (como é o caso da BR-EMS-2015, que é uma atualização da BR-EMS-2010), essas tábuas retratam uma experiência de período, do passado recente, não tendo sido construídas de forma geracional com base em projeções da mortalidade. Foi calculado um leve IRL, apenas para os homens. Para as mulheres, o IRL é negativo, indicando que ao utilizarmos a Tábua BR-Geracional feminina, estaríamos subestimando as responsabilidades calculadas. Com base nos resultados obtidos, as EAPC's, que adotam as

tábuas da família das BR-EMS (sobrevivência), podem ser classificadas para os homens como: 3) pouco expostas ao Risco de Longevidade; e para as mulheres, como: 4) não expostas ao Risco de Longevidade.

Em relação à Tábua RP-2000, com atualização anual dada pela escala de *improvement* AA e utilizada pelo FUNPRESP no cálculo atuarial do Plano de Benefícios Previdenciários oferecido aos servidores públicos federais, apesar da sobrevida da tábua aumentar de forma paulatina, via aplicação dos fatores de *improvement* de um ano para outro, ainda assim a tábua continua sendo estática. Diferentemente de todas as outras tábuas objeto de comparação, a RP-2000 (atualizada para 2019, com base na escala de *improvement* AA) foi a única delas em que o IRL foi maior para as mulheres, quando comparadas aos homens. Isso ocorreu em função das características específicas dos *crossovers* de taxas observados entre a BR-Geracional e a RP-2000 atualizada. Com base nos resultados obtidos, o FUNPRESP pode ser classificado como: 2) exposto ao Risco de Longevidade.

Para finalizar esse tópico, cabe mais uma vez lembrar que os resultados do IRL apresentados nesse trabalho seriam, obrigatoriamente, majorados, caso os comparativos fossem realizados com tábuas geracionais específicas, construídas com base nos dados administrativos peculiares dos RPPS, EAPC's, EFPC's e FUNPRESP, significando dizer que o Impacto do Risco de Longevidade seria ainda mais severo do que aquele apresentado com base na utilização da Tábua BR-Geracional.

Na última seção deste capítulo serão apresentados os comentários gerais sobre o IRL nas instituições previdenciárias do Brasil.

#### **6.4) Simulação Atuarial com a Tábua BR-Geracional e o Impacto do Risco de Longevidade para uma massa de segurados**

Nesse tópico de resultados, a ideia é apresentar um caso prático, com o cálculo do Impacto do Risco de Longevidade considerando uma massa fictícia de mais de 15.000 segurados, entre ativos, aposentados e pensionistas vinculados a um RPPS.

Para tanto, foi realizado um cálculo atuarial no sentido de quantificar os principais resultados da Avaliação Atuarial (Custo Normal e Reservas Matemáticas), utilizando para tal a Tábua de Mortalidade *benchmark* prevista na legislação específica do segmento, no caso a Tábua IBGE

de ambos os sexos (atualmente a tábua de mortalidade referente a 2016), e sua comparação com os resultados obtidos a partir da Tábua BR-Geracional, por sexo.

#### 6.4.1) Premissas atuariais utilizadas nas simulações com a Tábua IBGE 2016 X Tábua BR-Geracional

Para as simulações aqui consideradas, foram utilizadas as seguintes premissas ou hipóteses atuariais conforme o *Quadro 5* a seguir:

Quadro 5 – Premissas Atuariais utilizadas na Simulação

PREMISSA / HIPÓTESE		TÁBUA ESTÁTICA	TÁBUA BR-GERACIONAL
DATA	Base dos Dados	31/12/2017	
	Base da Avaliação Atuarial	31/12/2017	
TÁBUA BIOMÉTRICA	Sobrevivência	IBGE-2016 (ambos)	BR-Geracional (por sexo)
	Mortalidade	IBGE-2016 (ambos)	BR-Geracional (por sexo)
	Entrada em Invalidez	Álvaro Vindas	
	Mortalidade de Inválidos	IBGE-2016 (ambos)	BR-Geracional (por sexo)
TAXA	Real Anual de Juros	6,0% (máx)	
	Anual de Rotatividade	1,0% (máx)	
	Anual de Inflação	0,00%	
	Real Anual de Cresc. Salários	1,0% (mín)	
	Real Anual de Cresc. Benefícios	0,00%	
	Despesas Administrativas	2,0% (máx)	
CONTRIB. PATROCINADOR	para Servidor Ativo	11,00%	
CONTRIB. SERVIDOR	Ativo, Aposentado e Pensionista	11,00%	
Início de Contribuição à Previdência Social		24 anos	
Composição do Grupo Familiar		Informações da Base de Dados	
Novos Entrados (Geração Futura)		Grupo constante	
Benefício Máximo do INSS (na Data Base)		R\$ 5.645,80	

fonte: IBGE, Tábua de Mortalidade 2016 e parâmetros utilizados pelo autor na simulação

Além das hipóteses atuariais elencadas no quadro anterior, foi utilizado o método de Financiamento conhecido como Idade de Entrada Normal (IEN) (*entry age normal funding method*) e os Regimes Financeiros de: 1) Capitalização: para os benefícios programáveis de

aposentadoria por idade, tempo de contribuição e compulsória, e pensões decorrentes dessas aposentadorias (reversões); 2) Repartição de Capitais de Cobertura: para os benefícios de aposentadoria por invalidez (e pensões decorrentes / reversões) e pensão por morte de ativos, chamados de benefícios de risco; e 3) Repartição Simples: para os chamados auxílios (auxílio reclusão, auxílio doença, salário família e salário maternidade).

O ANEXO 7 apresenta as principais fórmulas atuariais utilizadas na simulação apresentada neste capítulo. Maiores detalhes poderão ser obtidos em Scott (1989), Winklevoss (1993), Aitken (1996), Iyer (1999) e Booth et al. (2005), dentre outros

#### **6.4.2) Resultados da simulação atuarial em relação ao Impacto do Risco de Longevidade**

A *Tabela 10*, a seguir, apresenta as principais estatísticas em relação à base de dados utilizada para a simulação atuarial aqui conduzida.

De forma sucinta, do total de 17.578 participantes, 26,6% são homens e 73,4% são mulheres. Essa situação da grande maioria dos segurados de um RPPS ser do sexo feminino é corriqueira nesse tipo de segmento da previdência nacional, onde o grande peso da massa segurada está alocada nas Secretarias de Educação e Saúde, órgãos estes que possuem seus cargos ocupados majoritariamente por mulheres. A idade média da população, em geral, está na casa dos 50 anos, sendo os homens em média dois anos mais velhos que as mulheres (51 anos os homens X 49 anos as mulheres). O segurado mais novo possui 3 anos, enquanto que o mais velho possui 100 anos, sendo ambos pensionistas do sexo feminino. Os servidores ativos possuem uma idade média de 45 anos, tendo sido admitidos, em média, na municipalidade, aos 32 anos e com uma idade média de aposentadoria projetada para os 58 anos. Os homens ativos se aposentam, em média, seis anos depois das mulheres ativas (63 anos os homens X 57 anos as mulheres), recebendo, em média, um salário de R\$ 3.669,53, maior em R\$ 490,73, do que a média salarial feminina, calculada em R\$ 3.178,80. Os servidores aposentados possuem uma idade média de 66 anos, sendo que os homens aposentados, em média, entram em gozo de benefício com sete anos a mais do que as mulheres (71 anos os homens X 64 anos as mulheres). O benefício médio de aposentadoria foi calculado em R\$ 2.410,28, com os homens recebendo, em média, um benefício R\$ 636,60 maior que o feminino (em média, homens, R\$ 2.863,02 e mulheres, R\$ 2.226,42). Já os pensionistas possuem uma idade média de 63 anos, sendo os homens, em média, 10 anos mais jovens que as mulheres (55 anos os homens X 65 anos as mulheres). O

benefício médio de pensão foi calculado em R\$ 2.651,15. Aqui, ocorre o inverso do observado no caso dos servidores ativos e aposentados, onde o benefício de pensão pago a uma mulher é, em média, R\$ 249,35 maior do que o benefício pago a um homem (em média, homens, R\$ 2.459,15, e mulheres R\$ 2.708,50).

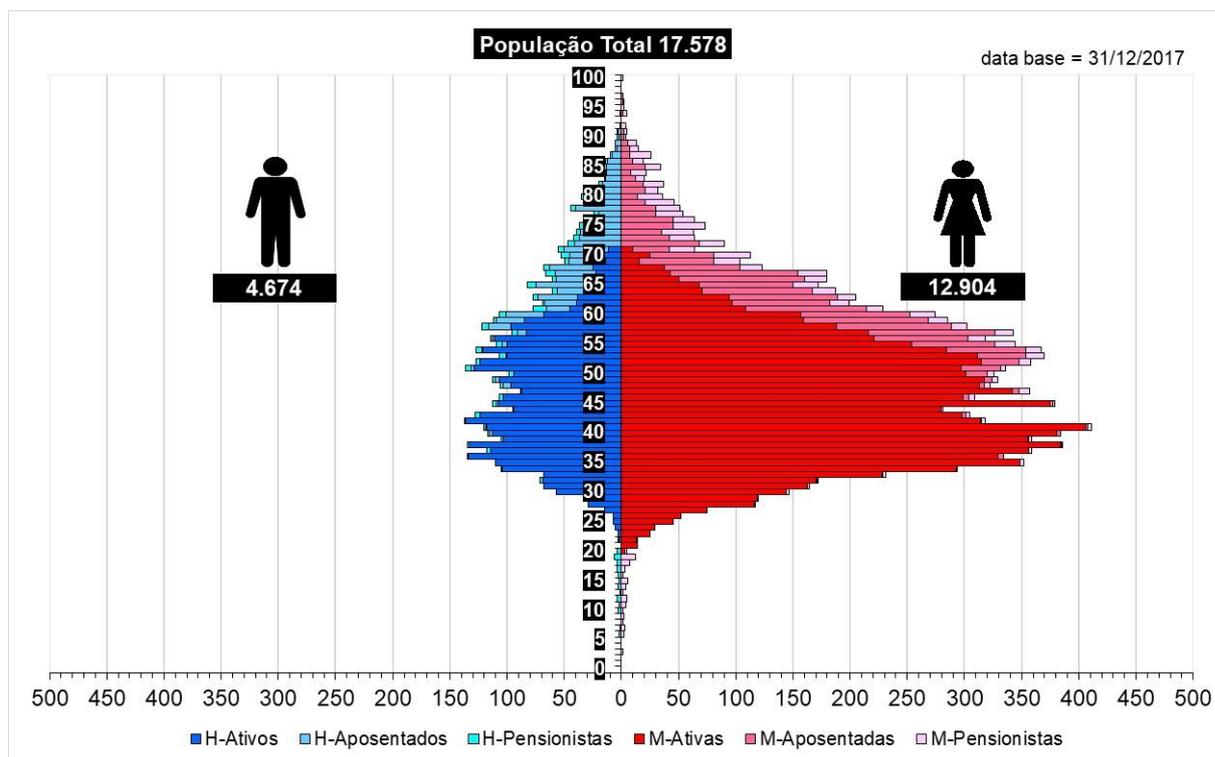
Tabela 10 – Estatísticas da Base de Dados fictícia utilizada na Simulação Atuarial

SERVIDOR	Discriminação	Sexo		Total
		Masculino	Feminino	
<b>TOTAL</b>	<b>População</b>	<b>4.674</b>	<b>12.904</b>	<b>17.578</b>
	<b>Idade Média</b>	<b>51 anos</b>	<b>49 anos</b>	<b>50 anos</b>
Ativo	População	3.547	9.910	13.457
	Folha salarial mensal	R\$ 13.015.819,48	R\$ 31.501.934,43	R\$ 44.517.753,91
	Salário médio	R\$ 3.669,53	R\$ 3.178,80	R\$ 3.308,15
	Idade média atual	46 anos	45 anos	45 anos
	Idade média de admissão	32 anos	32 anos	32 anos
	Idade média aposent. Proj.	63 anos	57 anos	58 anos
Aposentado	População	880	2.167	3.047
	Folha de Benefícios	R\$ 2.519.461,72	R\$ 4.824.653,50	R\$ 7.344.115,22
	Benefício médio	R\$ 2.863,02	R\$ 2.226,42	R\$ 2.410,28
	Idade mínima atual	40 anos	28 anos	28 anos
	Idade média atual	71 anos	64 anos	66 anos
	Idade máxima atual	94 anos	97 anos	97 anos
Pensionista	População	247	827	1.074
	Folha de Benefícios	R\$ 607.409,46	R\$ 2.239.927,43	R\$ 2.847.336,89
	Benefício médio	R\$ 2.459,15	R\$ 2.708,50	R\$ 2.651,15
	Idade mínima atual	6 anos	3 anos	3 anos
	Idade média atual	55 anos	65 anos	63 anos
	Idade máxima atual	91 anos	100 anos	100 anos

fonte: base de dados utilizada pelo autor

O Gráfico 91 apresenta a pirâmide populacional da base de dados fictícia utilizada na simulação atuarial. Fica fácil perceber o grande peso que os segurados do sexo feminino exercem no valor total das Reservas Matemáticas, observando a sua representatividade de quase  $\frac{3}{4}$  da população total em estudo.

Gráfico 91 – Pirâmide Populacional da base de dados fictícia utilizada na Simulação Atuarial



fonte: base de dados utilizada pelo autor

O *Quadro 6* apresenta o Impacto do Risco de Longevidade (IRL) no Custo Normal calculado. Antes de adentrarmos nos resultados propriamente ditos, importante definir o Custo Normal de um Plano de Previdência como sendo o valor correspondente às necessidades de custeio mensal atuarialmente calculadas, conforme os regimes financeiros e método de financiamento adotados, referentes aos períodos compreendidos entre a data da avaliação atuarial e a data de início dos benefícios previdenciários. Para melhor entendimento do gestor previdenciário, o custo normal é apresentado como percentual da folha salarial dos servidores ativos. Por exemplo, considerando a tábua de mortalidade IBGE-2016 de ambos os sexos, o Custo Normal dos Benefícios Previdenciários de Aposentadorias, Pensões e Auxílios foi calculado em 30,94%, valor esse que aumenta para 33,10% quando a tábua *benchmark* é substituída pela Tábua BR-Generacional por sexo, representando um IRL da ordem de 6,98%. Interessante destacar que, para o benefício de Aposentadoria Voluntária reversível em Pensão, o IRL no Custo Normal foi calculado em 15,62%, enquanto que para o benefício de Aposentadoria por Invalidez reversível em Pensão, o IRL foi calculado em 9,94%. Já para o benefício de Pensão por morte de Ativos, o IRL foi negativo em -41,44%, ou seja, o Custo Normal calculado via tábua geracional é menor do que aquele calculado com a tábua IBGE-2016. Essa situação era esperada, visto que, como a Tábua BR-Generacional, no jargão atuarial, *mata menos* que a IBGE-2016, conseqüentemente menos óbitos serão gerados pela sua aplicação, o que resulta num

menor montante de recursos necessários para o pagamento dos novos benefícios de pensão por morte de ativos.

Quadro 6 – Impacto do Risco de Longevidade no Custo Normal do Plano de Benefícios

CUSTO NORMAL	TÁBUA IBGE-2016 (ambos os sexos)		TÁBUA BR-GERACIONAL (homem e mulher)		IRL
	Custo Anual	Taxa sobre a folha de ativos	Custo Anual	Taxa sobre a folha de ativos	
Aposentadoria Voluntária reversível em Pensão	R\$ 125.989.695,35	21,77%	R\$ 145.666.542,60	25,17%	15,62%
Aposentadoria por invalidez reversível em Pensão	R\$ 18.056.400,99	3,12%	R\$ 19.850.466,47	3,43%	9,94%
Pensão por morte de Ativos	R\$ 21.644.531,95	3,74%	R\$ 12.674.204,54	2,19%	-41,44%
Auxílios	R\$ 13.368.681,50	2,31%	R\$ 13.368.681,50	2,31%	
<b>CUSTO ANUAL LÍQUIDO NORMAL</b>	<b>R\$ 179.059.309,79</b>	<b>30,94%</b>	<b>R\$ 191.559.895,11</b>	<b>33,10%</b>	<b>6,98%</b>
Administração do Plano	R\$ 11.574.616,02	2,00%	R\$ 11.574.616,02	2,00%	
<b>CUSTO ANUAL NORMAL TOTAL</b>	<b>R\$ 190.633.925,81</b>	<b>32,94%</b>	<b>R\$ 203.134.511,13</b>	<b>35,10%</b>	<b>6,56%</b>

fonte: IBGE, Tábua de Mortalidade 2016, Tábua Geracional construída e base de dados utilizada pelo autor

Para finalizar a aplicação prática, o *Quadro 7*, na sequência, apresenta o Impacto do Risco de Longevidade (IRL) nas Reservas Matemáticas do Plano de Benefício Definido do RPPS, aqui tomado como exemplo.

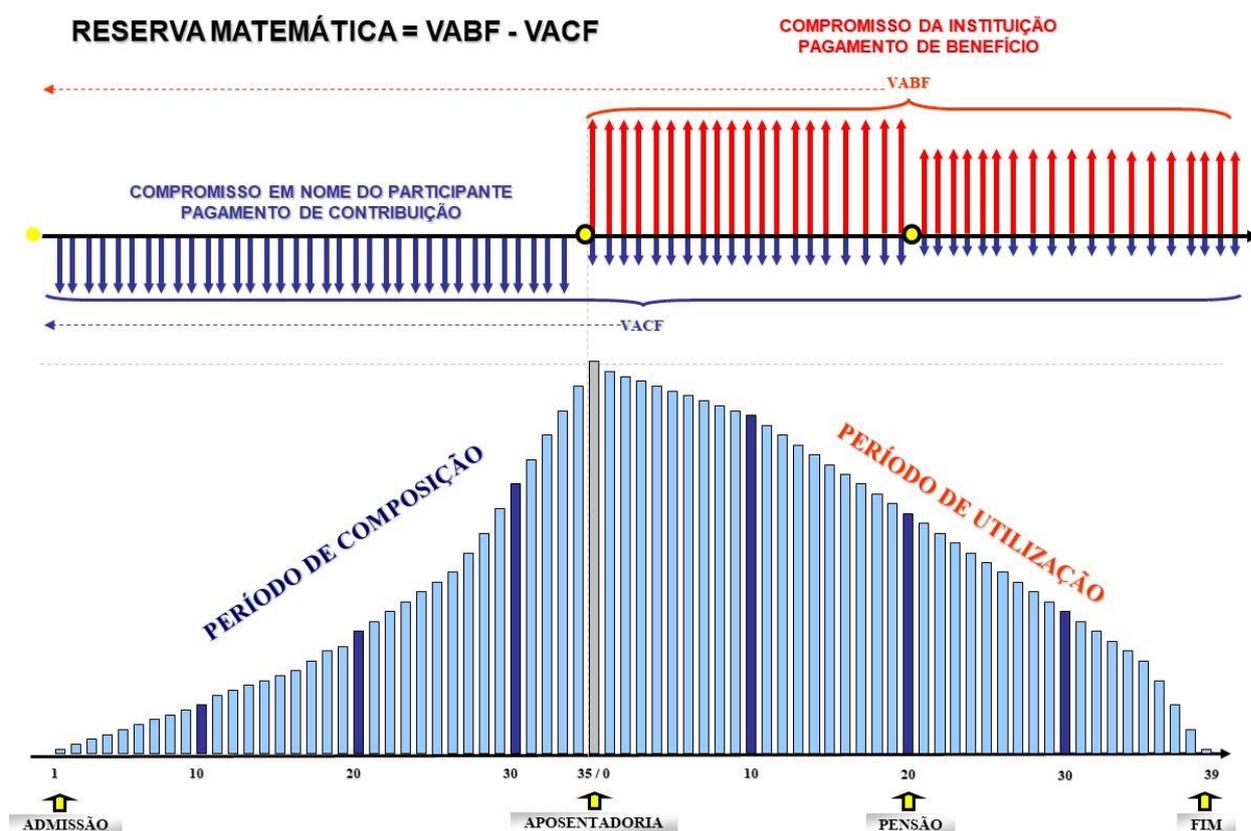
Antes de apresentar os resultados finais, cabe definir a chamada Reserva Matemática, no método chamado de prospectivo, como a diferença entre o Valor Atual do Benefício Futuro (VABF)<sup>62</sup> e o Valor Atual da Contribuição Futura (VACF)<sup>63</sup>. Nesse sentido, a dita reserva nada mais é do que o valor que deveria dispor a Instituição Previdenciária para garantir o cumprimento de suas obrigações (pagamento de aposentadorias e pensões) com os seus segurados ativos e assistidos. As Reservas Matemáticas são segmentadas em Reservas Matemáticas de Benefícios a Conceder (RMBAC), calculadas para os participantes ativos, e Reservas Matemáticas de Benefícios Concedidos (RMBC), para os assistidos do Plano de Benefícios administrado pela instituição. A *Figura 1* apresenta, de forma didática, o que seria

<sup>62</sup> Quanto vale “hoje”, todo o fluxo de benefícios previdenciários que será pago ao segurado, descontado à uma taxa de juros e considerando a probabilidade do segurado estar vivo em cada ano.

<sup>63</sup> Quanto vale “hoje”, todo o fluxo de contribuições que serão pagas por segurado e patrocinador, descontado à uma taxa de juros e considerando a probabilidade do segurado estar vivo em cada ano.

a evolução da Reserva Matemática em um sistema Equilibrado Financeira e Atuarialmente (EFA). Nos primeiros anos depois da admissão do segurado, a poupança previdenciária cresce de forma lenta, até mais ou menos a metade do período contributivo, enquanto ativo, crescendo de forma muito mais acelerada na segunda metade da vida laboral, em virtude da magnitude da capitalização e dos juros sobre juros, auferidos principalmente no final do período de atividade, até atingir um pico ou valor máximo na data de aposentadoria do segurado. Caso o sistema esteja Equilibrado Financeira e Atuarialmente (EFA), a Reserva Matemática constituída será suficiente para pagar o benefício de aposentadoria enquanto o segurado titular estiver vivo e, depois da sua morte, ao seu cônjuge sobrevivente, de forma que, em média, quando o cônjuge vier a falecer, a Reserva Matemática individual seria igual a zero.

Figura 1 – Representação da Evolução da Reserva Matemática e do Equilíbrio Financeiro e Atuarial (EFA)



fonte: elaborada pelo autor

Por exemplo, ao trocarmos a tábua de mortalidade *benchmark* (IBGE-2016 de ambos os sexos) pela Tábua BR-Generacional, por sexo, o IRL na Reserva Matemática de Benefícios Concedidos (RMBC) foi calculado em 15,82%, enquanto que, na Reserva Matemática de Benefícios a

Conceder (RMBAC), foi calculado em 12,72%. Pensando nas Reservas Totais, o IRL foi calculado em 13,88%.

Quadro 7 – Impacto do Risco de Longevidade nas Reservas Matemáticas do Plano de Benefícios

Discriminação	TÁBUA IBGE-2016 (ambos os sexos)	TÁBUA BR-GERACIONAL (homem e mulher)	IRL
	Valores	Valores	
(-) Valor Presente dos Benefícios Futuros (aposentados)	R\$ (1.164.315.125,52)	R\$ (1.334.449.912,71)	14,61%
(+) Valor Presente das Contribuições Futuras (aposentados)	R\$ 8.345.789,99	R\$ 9.679.415,90	15,98%
(-) Valor Presente dos Benefícios Futuros (pensionistas)	R\$ (379.019.963,33)	R\$ (453.277.478,62)	19,59%
(+) Valor Presente das Contribuições Futuras (pensionistas)	R\$ 4.341.312,47	R\$ 5.189.291,06	19,53%
(+) Valor Presente da Compensação Previdenciária a receber	R\$ -	R\$ -	
<b>Reserva Matemática de Benefícios Concedidos (RMBC)</b>	<b>R\$ (1.530.647.986,39)</b>	<b>R\$ (1.772.858.684,37)</b>	<b>15,82%</b>
(-) Valor Presente dos Benefícios Futuros	R\$ (3.980.892.285,77)	R\$ (4.532.639.844,11)	13,86%
(+) Valor Presente das Contribuições Futuras - Serv. Ativos	R\$ 351.710.990,08	R\$ 386.827.649,84	9,98%
(+) Valor Presente das Contribuições Futuras - Serv. Apos. e Pens.	R\$ 1.950.623,56	R\$ 2.246.963,17	15,19%
(+) Valor Presente das Contribuições Futuras - Ente Sobre Ativos	R\$ 654.816.268,36	R\$ 788.429.510,22	20,40%
(+) Valor Presente das Contribuições Futuras - Ente Sobre Apos. e Pens	R\$ -	R\$ -	
(+) Valor Presente da Compensação Previdenciária a receber	R\$ 398.089.228,58	R\$ 453.263.984,41	13,86%
<b>Reserva Matemática de Benefícios a Conceder (RMBAC)</b>	<b>R\$ (2.574.325.175,19)</b>	<b>R\$ (2.901.871.736,47)</b>	<b>12,72%</b>
<b>Reservas Matemáticas (RMBAC + RMBC)</b>	<b>R\$ (4.104.973.161,58)</b>	<b>R\$ (4.674.730.420,84)</b>	<b>13,88%</b>

fonte: IBGE, Tábua de Mortalidade 2016, Tábua Geracional construída e base de dados utilizada pelo autor

A próxima seção traz os comentários gerais sobre o IRL nas instituições previdenciárias do Brasil, bem como os achados nesta simulação prática.

## 6.5) Considerações sobre o Risco de Longevidade no Brasil

À medida que a mortalidade diminui, o *gap* entre medidas ( $M_x$ 's,  $e_x$ 's etc) de período e coorte aumenta. Isso ocorre em grande parte em função das idades mais avançadas, nas quais diminuição da mortalidade tem efetivamente se concentrando. Nesse contexto, a mortalidade de período torna-se uma medida cada vez mais obsoleta para representar a real experiência das coortes de indivíduos (Goldstein & Wachter, 2006).

O Risco de Longevidade suportado pelas instituições previdenciárias que oferecem Planos de Benefício Definido (BD) constitui um risco inerente em um regime demográfico de mortalidade declinante, tal como o observado no Brasil (vide *Gráfico 5* e *Gráfico 6*). Não apenas um indivíduo aposentado, em particular, ou pensionista pode viver mais do que o esperado e definido em determinada tábua de vida, como, todos os indivíduos de um grupo específico podem, em média, viver mais do que o esperado. No presente capítulo, foram estimadas determinadas *proxys* para o Impacto do Risco de Longevidade no Brasil, tendo sido realizado um primeiro estudo com foco mais teórico, pensando na questão do indivíduo vinculado a algum tipo de entidade previdenciária nacional (RPPS's, EAPC's, EFPC's e FUNPRESP), e um segundo estudo, com foco mais prático, referente a um grupo de indivíduos (massa de segurados).

As projeções da mortalidade realizadas nesta tese resultaram em ganhos maiores para os homens, quando comparados às mulheres, o que resultou num maior Impacto do Risco de Longevidade para os primeiros. Essa situação também foi observada por Dushi et al. (2010), que calcularam um potencial de subestimação das responsabilidades atuariais de 2,3% até 12,2%, para homens, e de 0,5% até 8,4% para as mulheres, quando utilizada a projeção da mortalidade realizada pela *Social Security Administration (SSA)*, adotando o método de Lee-Carter, ao invés das tábuas de mortalidade GAM-83 e RP-2000, comumente utilizadas nos Fundos de Pensão norte-americanos.

Em relação à aplicação atuarial teórica, onde foi calculada uma *proxy* para o IRL, em função da razão entre as anuidades atuariais calculadas com base na tábua BR-Geracional e na tábua *benchmark* do segmento específico, embora possa, obviamente, existir discordância sobre que tipo de estatística poderia constituir uma estimativa mais precisa, o fato é que tanto a tábua de mortalidade anual divulgada pelo IBGE (utilizada pelo RPPS's), como as tábuas AT-83, AT-2000 (utilizadas pelas EAPC's e EFPC's) e RP-2000 (utilizada pelo FUNPRESP), subestimam,

nos mais diversos graus, a longevidade de homens e mulheres, quando comparadas à tábua BR-Geracional construída com base nas projeções pelos métodos coerente de Hyndman (1º estágio - projeção  $e_0$ ) e Lee-Carter coerente (2º estágio - projeção  ${}_nM_x$ 's). Com isso, resta claro que as instituições previdenciárias, ao calcularem seus Passivos Atuariais (Reservas Matemáticas) com base nas referidas tábuas de mortalidade não projetadas, estariam subestimando suas obrigações, nos mais diversos patamares.

Uma limitação, em relação aos estudos comparativos aqui apresentados, diz respeito ao fato da tábua BR-Geracional, construída com base nas projeções, representar uma média nacional, e não as características peculiares de sobrevivência dos subgrupos populacionais vinculados às instituições previdenciárias brasileiras. Como é sabido, os servidores públicos vinculados aos RPPS's e ao FUNPRESP, os participantes de Fundos de Pensão (EFPC's), e os indivíduos que compram produtos de previdência junto às EAPC's, são pessoas que possuem sobrevivência acima da média observada para o brasileiro, em geral. Os resultados apresentados nos itens anteriores deste capítulo tendem a estar todos subestimados, sem exceção, o que agrava o Impacto do Risco de Longevidade aqui mensurado. Como solução para esse óbice, o ideal é que sejam construídas tábuas de mortalidade anuais específicas para cada um desses sub-grupos populacionais, com base em seus registros administrativos, tal qual feito no caso das tábuas BR-EMS-sb 2010 e BR-EMS-sb 2015, que representam a experiência do mercado segurador brasileiro (construídas com base nas informações das EAPC's). Além disso, que essas tábuas sejam utilizadas para projetar a mortalidade futura desses subgrupos, com base em algum tipo de metodologia, dentro do *framework* de Lee-Carter. Apenas dessa forma, poderíamos obter estimativas mais precisas quanto ao verdadeiro Impacto do Risco de Longevidade nas instituições previdenciárias brasileiras.

A aplicação atuarial teórica apontou para alguns resultados gerais, similares aos de Antolin (2007) e OECD (2014), todavia mais abrangentes e detalhados, além de terem sido baseados em projeções da mortalidade com uma matriz de dados-base mais robusta, e que consubstanciou as superfícies de mortalidade construídas. Em linhas gerais, foi identificado nos resultados obtidos que:

- 1) o Risco de Longevidade é inversamente proporcional à idade do participante, ou seja, quanto mais jovem o indivíduo maior é o Risco de Longevidade;

- 2) o Risco de Longevidade é maior para os homens do que para as mulheres, visto que nas projeções aqui conduzidas foram estimados maiores ganhos para a população masculina ao longo do horizonte de 100 anos;
- 3) o Risco de Longevidade é diretamente proporcional à idade de entrada em gozo de benefício. Quanto maior a idade mínima de entrada em gozo de benefício, maior o Risco de Longevidade calculado. Por exemplo, o IRL é maior quando a idade mínima passa de 60 para 65 anos;
- 4) o Risco de Longevidade é inversamente proporcional à taxa de juros, ou seja, quanto menor a taxa de juros, maior o Risco de Longevidade;
- 5) se a Tábua BR-Geracional estiver em nível abaixo ao de determinada tábua *benchmark* em todas as idades, maior será o Risco de Longevidade, independentemente da idade  $x$  e do prazo de diferimento ( $n$ ) da anuidade atuarial.
- 6) se existirem *crossovers* entre as taxas de mortalidade da Tábua BR-Geracional e da tábua *benchmark*, pode ser que o IRL seja maior em função da utilização de uma ou de outra tábua, dependendo da idade  $x$  específica tomada para cálculo, da localização desses *crossovers* no *age span* (idade em que ocorrem), da direção (qual tábua fica em nível mais baixo e a partir de que idade) e da intensidade (quão grande fica o *gap*/afastamento entre as curvas depois do cruzamento entre elas).

A aplicação atuarial prática realizada teve como objetivo apresentar um exemplo mais concreto da utilização de uma tábua geracional projetada (BR-Geracional), no cálculo atuarial de uma entidade previdenciária brasileira, no caso um RPPS com uma população fictícia de mais de 15.000 vidas seguradas, entre servidores ativos, aposentados e pensionistas. Normalmente, as bases de dados dos servidores estatutários vinculados aos RPPS's são compostas, majoritariamente, por mulheres, em virtude do grande peso das secretarias de saúde e educação em relação ao todo, carreiras estas ocupadas, em sua grande maioria, por indivíduos do sexo feminino. Foi esse o caso da base de dados aqui utilizada na simulação atuarial, em que praticamente  $\frac{3}{4}$  dos segurados são mulheres e apenas  $\frac{1}{4}$  homens. Como a tábua geracional masculina construída incorpora ganhos maiores em longevidade, quando comparados aos ganhos da tábua geracional feminina, quanto mais homens compuserem a base de segurados da instituição previdenciária, maior será o Impacto do Risco de Longevidade calculado.

Na aplicação atuarial prática, foi avaliado o IRL em dois resultados obtidos numa Avaliação Atuarial, a saber: Custo Normal e Reserva Matemática. Em relação ao Custo Normal Líquido Anual, foi apurado um IRL da ordem de 6,98%. Isso significa dizer que as contribuições previdenciárias deveriam ser majoradas em 6,98%, de forma a mitigar o Risco de Longevidade. Importante destacar que, para o benefício de *Aposentadoria Voluntária reversível em Pensão* (+15,62%) e o benefício de *Aposentadoria por Invalidez reversível em Pensão* (+9,94%), o IRL foi positivo, enquanto que para o benefício de *Pensão por morte de Ativos* (-41,44%), o IRL foi negativo. Isso ocorreu porque, como a tábua BR-Geracional “*mata menos*” que a tábua IBGE-2016 (vide Gráfico 67), um menor quantitativo de óbitos será gerado com sua utilização em Regime Financeiro de Repartição de Capitais de Cobertura, resultando num menor montante de recursos necessários para o pagamento dos novos benefícios de pensão por morte de segurados ativos. Em relação ao IRL nas Reservas Matemáticas, o mesmo foi estimado em 13,88%. Isso significa dizer que para mitigar o Risco de Longevidade, as Reservas Matemáticas deveriam ser 13,88% maiores do que as calculadas com a tábua *benchmark*.

No próximo e último capítulo desta tese, são feitas as considerações finais de todo o trabalho realizado, apresentando um pequeno resumo e destacando a contribuição oferecida, discutindo os principais achados e motivando as direções de pesquisa a serem conduzidas no futuro.

## CAPÍTULO 7 - DISCUSSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

As séries temporais de  $M_x$ 's 1950-2010 estimadas, do Brasil e Grandes Regiões, registraram melhorias significativas, ao longo desses 61 anos. Se, no passado os ganhos estavam concentrados, basicamente, na mortalidade infantil e de jovens, atualmente são observados ganhos, cada vez maiores, nas idades mais avançadas, normalmente idades em que o indivíduo recebe algum tipo de benefício previdenciário. O considerável aumento da longevidade dos brasileiros fica muito claro, quando observadas as pirâmides populacionais sobrepostas do Brasil, ao longo dos sete censos demográficos ocorridos no período 1950-2010. Cada vez mais homens e mulheres chegam a idades acima de 70, 80, 90 anos, com aumento, inclusive, nos casos de indivíduos centenários. Este aspecto, altamente positivo, torna-se uma preocupação muito grande, no que diz respeito à sustentabilidade dos Sistemas de Aposentadorias e Pensões.

Conhecendo um pouco da evolução da mortalidade, o mais importante agora é saber qual seria o caminho futuro previsto para essa componente da dinâmica demográfica brasileira. Tal qual preconizaram Lee-Carter, é muito razoável considerar que o futuro, de alguma forma, será uma continuidade do passado e, nesse sentido, o melhor guia para um olhar prospectivo seria a partir de uma trajetória retrospectiva.

No contexto de paulatino aumento na sobrevivência das pessoas, as projeções da mortalidade tornaram-se ferramentas fundamentais na previsão e modelagem futura das taxas específicas de mortalidade ( ${}_nM_x$ ) e das expectativas de vida ( $e_x$ ). Utilizar um bom modelo de projeção é de suma importância, considerando o impacto que seus resultados possuem sobre o planejamento de políticas sociais e econômicas de um país. Entre os métodos mais modernos de projeção da mortalidade, amplamente utilizado por pesquisadores ao redor do mundo, o de Lee-Carter representa um marco, em termos de salto de qualidade metodológica, sendo considerado um divisor de águas nesse tipo de pesquisa.

Projetar a mortalidade no Brasil por métodos estocásticos, a partir da ideia de Lee-Carter, é missão das mais complexas, visto a carência de longas séries temporais de taxas de mortalidade, necessárias para a obtenção de resultados consistentes, principalmente quando se deseja trabalhar com longos horizontes de projeção, como no caso dos 100 anos utilizado nesta tese.

Em virtude da grande lacuna existente no Brasil em termos de pesquisa, no âmbito da projeção da mortalidade por métodos estocásticos, dentro da linha de Lee-Carter, e que sejam baseados

em informações genuinamente nacionais, atingir os objetivos elencados no capítulo introdutório representa a principal contribuição de todo o trabalho realizado nesta tese.

A **primeira contribuição** do trabalho foi a criação das séries temporais de 61 anos, das taxas de mortalidade, por idade simples, de 0 até 100+ anos, do Brasil e Grandes Regiões (Norte, Nordeste, Sudeste, Sul e Centro-Oeste), no período 1950-2010.

Essas séries temporais possuem algumas limitações na sua concepção, tais como: os métodos indiretos utilizados na construção das tábuas-base abreviadas do IBGE de 1980, 1991, 2000 e 2010; o ajuste logístico utilizado para retroprojetar o nível da mortalidade ( $e_0$ ) para os anos de 1950, 1960 e 1970 e a hipótese do padrão de 1980 se aplicar a esses anos; a metodologia aplicada para a abertura das tábuas abreviadas em tábuas completas até a idade original de 80+ anos; a aplicação do modelo de Kannisto para a extrapolação das tábuas de 80+ anos até 100+ anos; e a interpolação das  $M_x$ 's para o período intercensitário. Essa última limitação, em particular, arbitra um padrão de variação das taxas de mortalidade, capturado pelos métodos estocásticos de projeção.

Apesar das limitações existentes na sua construção, dificuldades estas inerentes aos países em desenvolvimento, como o Brasil, as séries temporais deixam claro a trajetória de considerável redução na mortalidade da população brasileira, aqui desde o ano de 1950. Essas informações têm a vantagem de representarem uma experiência verdadeiramente nacional, visto que tomaram, como base, as tábuas do IBGE de quatro censos demográficos consecutivos. Merecem destaque as superfícies de mortalidade 1950-2010 construídas para o BR e GR's, para homens, mulheres e população total, até então inexistentes, e que constituíram os insumos base para a aplicação do modelo de projeção adotado.

Geradas as séries temporais de  $M_x$ 's, a **segunda contribuição** do trabalho foi apresentar uma discussão metodológica e de resultados para o Brasil, utilizando nove diferentes métodos estocásticos de projeção da mortalidade, num longo horizonte de projeção de 100 anos, até 2110. De todos os métodos testados, sete projetam a mortalidade dos sub-grupos (homens e mulheres), de forma independente, sendo o método de Lee-Carter a *baseline* de todos, e dois projetam a mortalidade de forma coerente, os métodos Lee-Carter coerente (Lee-Carter estendido) e produto-razão de Hyndman.

Em função da segunda contribuição desta tese, foi demonstrado que é possível utilizar, mesmo num contexto de país em desenvolvimento, como o Brasil, métodos de projeção da mortalidade

dentro da linha proposta por originalmente por Lee-Carter, que possuem inúmeras vantagens, quando comparados aos métodos tradicionais de *targeting*, como aquele utilizado pelo IBGE. Dentre as vantagens, a utilização da série histórica de  $M_x$ 's, que possibilita de obtenção de intervalos de confiança para a mortalidade projetada, além da menor dependência da *expert opinion*, à qual são inerentes diversos graus de subjetividade. Os resultados das projeções são úteis, inclusive, para a avaliação da qualidade das projeções oficiais realizadas, bem como para servirem de referência para essas projeções, tal qual faz *U.S Census Bureau*, que utiliza o método de Lee-Carter como *benchmark*.

Depois de vários testes e exercícios realizados com diversos períodos-base, optou-se por trabalhar com a matriz de  $M_x$ 's completa, de 1950-2010. Cabe destacar que, para cada período-base diferente utilizado no exercício (vide *Tabela 5*), um nível diferente de  $e_0$  foi obtido, por exemplo, no ano projetado de 2050, uns divergindo mais e outros menos, tanto para homens, quanto para mulheres.

Isso ressalta a importância da adoção de um período-base que o pesquisador entenda ser o mais adequado para a população, em específico. No caso do Brasil não existe muita opção em termos de escolha do período histórico de dados de  $m_x$ 's, que se tornaram disponíveis apenas na década de 1980. Como as estimativas aqui realizadas para os anos de 1950, 1960 e 1970 demonstraram melhorar os resultados das projeções para o Brasil, foi adotado o período-base 1950-2010, para todas as localidades (BR e GR's).

Infelizmente, nenhum dos métodos testados resultou em projeções satisfatórias para o binômio nível X padrão da mortalidade no horizonte de 100 anos, mesmo no caso da utilização do método coerente de Hyndman, que se acreditava, *a priori*, ser a solução para a obtenção de projeções consistentes no longo prazo. Além disso, todos os métodos que projetam a mortalidade, de forma independente, para homens e mulheres, tal como preconiza a literatura, apresentaram resultados divergentes, resultando em  $e_0$ 's elevadíssimas no final da projeção, com o aumento do *gap* entre sexos, o que não seria razoável, no longo prazo. Como solução, optou-se pela técnica de projeção em dois estágios. No 1º estágio, a expectativa de vida ao nascer ( $e_0$ ) foi projetada pelo método coerente de Hyndman et al. (2013), e, no 2º estágio, as taxas de mortalidade ( ${}_nM_x$ 's) foram projetadas pelo método coerente Lee-Carter estendido (Li, Lee, & Gerland, 2013), ajustando-as ao nível projetado no 1º estágio. O método coerente produto-razão de Hyndman resultou em vetores de  $e_0$  projetados (com IC de 95%) para o Brasil, de qualidade satisfatória e não-divergentes ao longo do período 2011-2110, para homens e

mulheres. A partir dos vetores de  $e_0$  projetados no primeiro estágio, o método coerente de Li-Lee-Gerland, aplicado na projeção das curvas de  $M_x$ 's, também resultou em projeções satisfatórias e consistentes para o Brasil. Por exemplo, espera-se que a expectativa de vida ao nascer no Brasil, no distante ano de 2110, seja de 89,31 anos, para homens, e 91,55 anos, para mulheres, no 1º estágio da projeção. Esses valores se reduzem praticamente em um ano, para 88,26 anos, no caso dos homens, e para 90,50 anos, no caso das mulheres, depois do ajuste final necessário na  $m_{100+}$ , realizado após a implementação do 2º estágio da projeção. O padrão das curvas projetadas também se mostrou consistente, mesmo no longo prazo, semelhante às curvas do ano-base de 2010, todavia com paulatina e contínua redução nas taxas de mortalidade em todas as idades, inclusive naquelas onde as causas externas atuam de forma mais incisiva (p.e. dos 15-39 anos), o que seria uma hipótese razoável no médio e longo prazos.

Essa mesma estratégia metodológica de projeção em dois estágios, que se mostrou satisfatória para o Brasil, também foi aplicada às Grandes Regiões Norte, Nordeste, Sudeste, Sul e Centro-Oeste. Nunca é demais ressaltar que a coerência proporcionada pelos métodos, até então existentes, é unidimensional. Nesse caso, a dimensão de maior interesse foi o sexo do indivíduo. Desejava-se obter projeções da mortalidade coerentes para homens e mulheres, dentro de uma unidade específica, de forma a estudar qual seria a evolução média da sobrevivência das pessoas, ao longo de 100 anos, com um intervalo de confiança de 95%. O método coerente de Hyndman proporcionou isso, tanto para o BR, quanto para as GR's, observando-se a paulatina diminuição do *gap* de  $e_0$  entre sexos, com as mulheres mantendo expectativa de vida maior que os homens em todas as idades de 0 até 100+ anos, ao longo do horizonte da projeção. O problema surgiu ao se comparar os resultados entre as GR's. Uma das limitações dos métodos coerentes testados veio à tona. As inversões no *ranking* de  $e_0$  das GR's, ocorridas ao longo das projeções, deixam claro que, apesar das projeções terem ficado coerentes, por sexo, dentro de uma mesma GR, a coerência em relação às GR's, entre si, não se manteve, notadamente em relação ao posicionamento histórico da Região CO, comparado às outras GR's. A projeção da  $e_0$  da Região CO destoou das demais, visto que, no ano-base das projeções, 2010, o Centro-Oeste equiparava-se à média nacional, passando a ocupar a última posição no *ranking* de  $e_0$ , entre todas as GR's, ao longo do horizonte da projeção. Apesar das projeções de  $e_0$  para as outras GR's terem ficado satisfatórias e até coerentes entre si (o *ranking* de  $e_0$  histórico em 2010: SU > SE > BR > NE > NO, se manteve), o fato do mesmo não ter acontecido com a Região CO representa uma limitação nas projeções aqui conduzidas. É difícil acreditar que o status histórico, *próximo à média nacional*, da Região CO se perca no futuro. Uma possível solução seria projetar as  $M_x$ 's

da população total (ambos os sexos), buscando a coerência entre as GR's e depois decompor essas taxas, por sexo, através de alguma metodologia. Uma alternativa, para tentar ajustar apenas as projeções da Região CO, seria verificar se outro período-base, diferente de 1950-2010, resulta em projeções coerentes, mantendo, no futuro, o posicionamento histórico da Região CO em relação às outras GR's.

Ainda em relação às projeções da mortalidade, mesmo que nesses exercícios alternativos, a serem executados posteriormente, se consiga corrigir o problema detectado nas projeções da Região CO, os achados desta tese implicam na necessidade de criação de uma nova metodologia de projeção, que garanta a coerência nas várias dimensões. Por exemplo, é fundamental que seja criada uma nova metodologia que garanta projeções coerentes de mortalidade, por sexo, UF, GR e país, e que proporcione, também, a inclusão de outras dimensões, necessárias para a obtenção da coerência entre os mais diversos sub-grupos populacionais (recortes de cor/raça, renda, escolaridade, dentre outros).

Tanto no passado histórico, quanto nas projeções aqui conduzidas, percebe-se um contínuo aumento na longevidade dos brasileiros, situação esta altamente positiva, mas que tem sérias implicações nos mais diversos segmentos da Previdência, potencializado, ainda mais, no cenário de iminente Reforma Previdenciária, em âmbito nacional. A **terceira contribuição** do trabalho foi a construção da tábua BR-Geracional. Ela incorpora o paulatino ganho de anos a mais a serem vividos, observados nas projeções da mortalidade, introduzindo, assim, uma perspectiva de sobrevivência de coorte (dinâmica), sempre maior que a perspectiva de período (estática), num cenário de mortalidade declinante, tal qual o observado historicamente no Brasil e também nas projeções realizadas. A tábua BR-Geracional foi então utilizada para se estimar o Risco de Longevidade no país, através de uma aplicação atuarial teórica para os mais diversos segmentos da previdência brasileira (EAPC's, EFPC's, RPPS's e FUNPRESP), e outra prática, para um conjunto fictício de segurados.

Na aplicação atuarial teórica, a Tábua BR-Geracional foi comparada tanto com a tábua do ano-base da projeção em 2010, como com as tábuas de mortalidade utilizadas como *benchmark* nas entidades previdenciárias brasileiras, na tentativa de quantificar o Risco de Longevidade inerente aos planos de benefícios oferecidos por essas instituições. Em linhas gerais foi observado que o Risco de Longevidade é inversamente proporcional à idade do participante, maior para os homens do que para as mulheres, diretamente proporcional à idade de entrada em gozo de benefício e inversamente proporcional à taxa de juros. Por exemplo, fazendo uma

comparação entre a razão das anuidades atuariais diferidas, calculadas com uma taxa de juros de 6% a.a., e considerando a Tábua BR-Geracional X Tábua do ano-base da projeção (a IBGE-2010), tem-se que para um jovem de 20 anos de idade do sexo masculino e que irá se aposentar aos 60 anos, o Impacto do Risco de Longevidade (IRL) seria de 39,35%, aumentando para 54,28%, no caso da aposentadoria se dar aos 65 anos. Para uma mulher com 20 anos de idade, o IRL cairia para 19,05%, se a mesma se aposentasse aos 60 anos, e 26,34%, se a aposentadoria se desse aos 65 anos. Considerando o exemplo de um homem idoso<sup>64</sup> de 60 anos de idade e que já pode se aposentar, o IRL foi estimado em 15,03%, passando para 17,69%, no caso de aposentadoria aos 65 anos. No caso de uma mulher com 60 anos de idade e que já possa se aposentar, o IRL foi de 7,95%, passando para 9,57%, se a aposentadoria se der aos 65 anos. Quando são consideradas taxas de juros menores, como 5% e 4%, o IRL obrigatoriamente aumenta em todos os exemplos.

Considerando a escala de classificação criada para a severidade de exposição ao Risco de Longevidade (IRL), os RPPS's foram considerados como: 1) muito expostos ao Risco de Longevidade. Já as EFPC's ou EAPC's que utilizam como *benchmark* as tábuas da família das AT's (AT-83 e AT-2000), foram classificadas como: 2) pouco expostas ao Risco de Longevidade. Caso as EAPC's adotem as tábuas da família das BR-EMS (sobrevivência), a sua classificação para os homens é de: 3) pouco expostas ao Risco de Longevidade; e para as mulheres: 4) não expostas ao Risco de Longevidade. Já o FUNPRESP foi classificado como: 2) exposto ao Risco de Longevidade.

Na aplicação atuarial prática, foi realizado um cálculo atuarial para uma massa segurada de aproximadamente 15.000 vidas de um RPPS fictício, comparando os resultados obtidos (Custos e Reservas Matemáticas) através da utilização da tábua *benchmark* IBGE-2016 e da tábua BR-Geracional. Como principal resultado, foi calculado um IRL nas Reservas Matemáticas da ordem de 13,88%, o que significa dizer que as responsabilidades da instituição seriam 13,88% maiores, caso o paulatino ganho de sobrevivência dos indivíduos fosse efetivamente incorporado nos cálculos realizados, com a utilização da tábua BR-Geracional, ao invés da IBGE-2016.

Uma limitação dos resultados do IRL, aqui apresentados, é que os mesmos se encontram de certa forma subestimados, visto que a tábua BR-Geracional representa a mortalidade projetada para o *brasileiro médio*, ao invés daquela dos segmentos previdenciários específicos, nos quais

---

<sup>64</sup> Nos termos do art. 10 da Lei nº 10.741, de 01/10/2003 (Estatuto do Idoso).

as massas seguradas possuem mortalidade menor do que a média nacional, para todas as idades dentro do *age span*. Nesse sentido, o ideal é que fossem construídas tábuas geracionais específicas, a partir das projeções da mortalidade com base nos dados administrativos de RPPS's, EAPC's, EFPC's e do próprio FUNPRESP, com o objetivo de melhorar as estimativas do IRL aqui calculadas, que seriam assim majoradas.

Apesar de resultar em valores subestimados do IRL, pelas razões expostas, as entidades previdenciárias brasileiras podem tecnicamente utilizar a Tábua BR-Generacional aqui construída, como objeto de comparação com as tábuas utilizadas na prática em seus cálculos atuariais, com o objetivo de obter uma *proxy* de qual seria o Impacto do Risco de Longevidade, em cada um dos seus planos de benefícios oferecidos.

O estudo aqui conduzido não teve a pretensão de esgotar o assunto das projeções da mortalidade e o Impacto do Risco de Longevidade no Brasil, mas, tão somente, deixar uma colaboração e abrir diversos focos de discussão, no enorme campo, ainda em aberto, desse tipo de pesquisa no país, que deverá, obrigatoriamente, ser multiplicada, através de empreitadas futuras, a serem conduzidas no decorrer do projeto pessoal de pesquisa.

Como agenda de trabalhos, entende-se como fundamental estudar e testar outras formas de estimar a mortalidade histórica no BR e GR's, do período 1950-1980, realizar projeções coerentes para a população total das GR's e estudar alternativas para decompor as  $M_x$ 's projetadas em taxas de homens e mulheres, testar se outros períodos-base diferentes de 1950-2010, para a Região CO, resultam em projeções coerentes de  $e_0$  *vis-à-vis* as outras GR's, dentre outros estudos recorrentes, incluindo aqueles com novas metodologias que porventura surjam, na tentativa de solucionar os problemas aqui apontados de coerência multidimensional.

Para finalizar, os resultados das projeções obtidos foram considerados satisfatórios para BR e Regiões Norte, Nordeste, Sudeste e Sul, excetuando-se a Região Centro-Oeste, pelas razões acerca da unidimensionalidade dos métodos coerentes existentes. Em função disto, entende-se como fundamental a criação de uma metodologia de projeção da mortalidade que forneça resultados coerentes nas diversas dimensões. Esta tese abre margem para uma boa discussão e estudos ainda mais aprofundados, sobre as projeções da mortalidade no Brasil e nos países em desenvolvimento.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AASE, Kjersti Norgård; TØNNESEN, Marianne; SYSE, Simon. The Population Projections Documentation of the BEFINN and BEFREG models. Statistics Norway, 2014.
- ABURTO, José Emanuel; GARCÍA-GUERRERO, Víctor Manuel. El modelo aditivo doble multiplicativo. Una aplicación a la mortalidad mexicana. Papeles de Población, v. 21, n. 84, p. 9–44, 2015.
- ACEVEDO, Ligia; PANJER, Harry. Modeling and Forecasting Mortality Improvement, 1999.
- AITKEN, William H. A Problem-Solving Approach to Pension Funding and Valuation. 2. ed. Winsted, Connecticut: ACTEX Publications, 1996.
- ALHO, Juha M. Discussion of Lee (2000). North American Actuarial Journal, v. 4, p. 91–93, 2000.
- ALHO, Juha M. A stochastic forecast of the population of Finland. Statistics Finland, 1998. (Reviews 1998/4).
- ALHO, Juha M.; SPENCER, Bruce D. Uncertain Population Forecasting. Journal of the American Statistical Association, v. 80, n. 390, p. 306–314, 1985.
- ALHO, Juha M.; SPENCER, Bruce D. Statistical Demography and Forecasting. Springer Science+Business Media, New York, 2005. (Springer Series in Statistics).
- ALLIANZ. 2016 Pension Sustainability Index. Munich, Germany: Allianz SE, 2016. (International Pension Papers).
- ALLIANZ. 2014 Pension Sustainability Index. Munich, Germany: Allianz SE, 2014. (International Pension Papers).
- AMERICAN ACADEMY OF ACTUARIES - AAA. Selecting and Documenting Mortality Assumptions for Pensions. AAA, Pension Committee Practice Note, 2015.
- ANDERSON, Barbara A. World Population Dynamics: An Introduction to Demography. New Jersey: Pearson, 2015.
- ANDREOZZI, Lúcia. Estimación y pronósticos de la mortalidad de Argentina utilizando el modelo de Lee-Carter. Revista de la Sociedad Argentina de Estadística, v. 10, n. 1, p. 21–43, 2012.

ANSON, Jon. Model Mortality Patterns: A Parametric Evaluation. *Population Studies*, v. 45, n. 1, p. 137–153, 1991.

ANTOLIN, Pablo. Longevity Risk and Private Pensions. *OECD Working Papers on Insurance and Private Pensions*, v. 3, n. OECD Publishing, 2007.

AON HEWITT. Understanding Longevity Risk. [s.l.]: Aon Hewitt - Risk Settlement Group, 2016. Disponível em: <[http://www.aon.com/unitedkingdom/attachments/retirement-investment/pensions-stability/risk-settlement/Aon\\_Hewitt\\_IDF-Understanding-Longevity-Risk.pdf](http://www.aon.com/unitedkingdom/attachments/retirement-investment/pensions-stability/risk-settlement/Aon_Hewitt_IDF-Understanding-Longevity-Risk.pdf)>.

AUSTRALIAN CENTRE FOR FINANCIAL STUDIES (ACFS). Melbourne Mercer Global Pension Index 2017. Australia: Monash Business School, 2017.

BABBAGE, C. On the Tables of Single and Annual Assurance Premiums. *Journal of the Institute of Actuaries*, v. 6, p. 185, 1823.

BALLOTTA, Laura; HABERMAN, Steven. The fair valuation problem of guaranteed annuity options: The stochastic mortality environment case. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 38, n. 1, p. 195–214, 2006.

BARAN, Sándor; GÁLL, József; ISPÁNY, Márton; *et al.* Forecasting Hungarian mortality rates using the Lee-Carter method. *Acta Oeconomica*, v. 57, n. 1, p. 21–34, 2007.

BARBI, Elisabeta; BERTINO, Salvatore; SONNINO, Eugenio. *Inverse Projection Techniques: Old and New Approaches*. Springer, 2004.

BASNAYAKE, B. M. S. C.; NAWARATHNA, L. S. Modeling and Forecasting Norway Mortality Rates using the Lee Carter Model. *Biometrics & Biostatistics International Journal*, v. 6, n. 1, 2017.

BAYÓ, Francisco; GLANZ, Milton. Mortality Experience of Workers Entitled to Old-Age Benefits under OASDI 1941-1961. SSA - Social Security Administration, 1965. (Actuarial Study No 60).

BEARD, R. E. Some aspects of theories of mortality, cause of death analysis, forecasting and stochastic processes. *In: Biological Aspects of Demography*. London: Taylor & Francis: William Brass ed., 1971.

BEARD, R. E. A theory of mortality based on actuarial, biological and medical considerations. *In: International Population Conference (IUSSP)*, New York, 1961, v. 1, p. 611–625.

BEERS, H. S. Six-Term Formulae for Routine Actuarial Interpolation. *Record of the American Institute of Actuaries*, v. 33, n. 68, p. 245–260, 1944.

BELLIARD, Matías; WILLIAMS, Iván. Proyección estocástica de la mortalidad. Una aplicación de Lee-Carter en la Argentina. *Revista Latinoamericana de Población*, v. 7, n. 13, p. 129–148, 2013.

BELL, Felicitie C.; MILLER, Michael L. Life Tables for the United States Social Security Area 1900-2100. SSA - Social Security Administration, 2002. (Actuarial Study No 116).

BELL, Felicitie C.; MILLER, Michael L. Life Tables for the United States Social Security Area 1900-2100. SSA - Social Security Administration, 2005. (Actuarial Study No 120).

BELL, Felicitie C. Social Security Area Population Projections 1997. SSA - Social Security Administration, 1997. (Actuarial Study No 112).

BELL, Felicitie C.; WADE, Alice H. Social Security Area Population Projections 1996. SSA - Social Security Administration, 1996. (Actuarial Study No 110).

BELL, Felicitie C.; WADE, Alice H. Actuarial Tables Based on the U. S. Life Tables: 1989-91. SSA - Social Security Administration, 1998. (Actuarial Study No 113).

BELL, Felicitie C.; WADE, Alice H.; GOSS, Stephen C. Life Tables for the United States Social Security Area 1900-2080. SSA - Social Security Administration, 1992. (Actuarial Study No 107).

BELTRÃO, Kaizô Iwakami; SUGAHARA, Sonoê Pinheiro. Differential Changes in Brazilian Public Servants' Survival Rates. *In: 3ª Conferência Brasileira de Modelagem Estatística em Seguros e Finanças 2008*, Maresias, São Paulo, 2007.

BENJAMIN, B.; POLLARD, J. H. *The Analysis of Mortality and Other Actuarial Statistics - Second Ed.* Institute of Actuaries: Butterworth Heinemann, 1980.

BENNETT, Neil G.; HORIUCHI, Shiro. Estimating the Completeness of Death Registration in a Closed Population. *Population Index*, v. 47, n. 2, p. 207–221, 1981.

BERGERON-BOUCHER, Marie-Pier; CANUDAS-ROMO, Vladimir; OEPPEN, Jim; *et al.* Coherent forecasts of mortality with compositional data analysis. *Demographic Research*, v. 37, n. 17, p. 527–566, 2017.

BIFFI, Paola; CLEMENTE, Gian Paolo. Selecting stochastic mortality models for the Italian population. *Decisions in Economics and Finance*, v. 37, n. 2, p. 255–286, 2014.

BLAKE, David; MORALES, Marco. Longevity Risk and Capital Markets\_The 2014–15 Update. *The Journal of Risk and Insurance*, v. 84, n. S1, p. 279–297, 2017.

BOHK-EWALD, Christina; RAU, Roland. Probabilistic mortality forecasting with varying age-specific survival improvements. *Genus - Journal of Population Sciences*, v. 73, n. 1, 2017.

BOHNERT, Nora; CHAGNON, Jonathan; COULOMBE, Simon; *et al.* Population Projections for Canada (2013 to 2063), Provinces and Territories (2013 to 2038): Technical Report on Methodology and Assumptions. Statistics Canada, 2015.

BOOTH, Heather. Demographic forecasting: 1980 to 2005 in review. *International Journal of Forecasting*, v. 22, n. 3, p. 547–581, 2006.

BOOTH, Heather. On the importance of being uncertain: forecasting futures for Australia. *People and Place*, v. 12, n. 2, p. 1–12, 2004.

BOOTH, Heather; HYNDMAN, Rob J.; TICKLE, Leonie; *et al.* Lee-Carter mortality forecasting: a multi-country comparison of variants and extensions. *Demographic Research*, v. 15, n. 9, p. 289–310, 2006.

BOOTH, Heather; HYNDMAN, Rob J.; TICKLE, Leonie. Prospective Life Tables. *In: Computational Actuarial Science with R*. University of Québec at Montreal Canada: Arthur Charpentier, 2015.

BOOTH, Heather; MAINDONALD, John; SMITH, Leonard Robert. Age-Time interactions in mortality projection: applying Lee-Carter to Australia. Australian National University, 2001. (Working Paper in Demography No 85), 85. ed. 2001.

BOOTH, Heather; MAINDONALD, John; SMITH, Leonard Robert. Applying Lee-Carter under Conditions of Variable Mortality Decline. *Population Studies*, v. 56, n. 3, p. 325–336, 2002.

BOOTH, Heather; TICKLE, Leonie. Mortality modelling and forecasting: A review of methods. ADSRI - The Australian Demographic & Social Research Institute, 2008. (Working Paper No 3), 3. ed. 2008.

BOOTH, Heather; TICKLE, Leonie; SMITH, Leonard Robert. Evaluation of the Variants of the Lee-Carter Method of Forecasting Mortality: A Multi-Country Comparison. *New Zealand Population Review*, v. 31, n. 1, p. 13–34, 2005.

BOOTH, Philip; CHADBURN, Robert; HABERMAN, Steven; *et al.* Modern Actuarial Theory and Practice. 2. ed. Chapman & Hall / CRC, 2005.

BORGES, Gabriel Mendes. Health transition in Brazil: regional variations and divergence/convergence in mortality. *Cadernos de Saúde Pública*, v. 33, n. 8, 2017.

BOWERS, Newton L.; GERBER, Hans U.; HICKMAN, James C.; *et al.* Actuarial Mathematics, 2nd ed. Society of Actuaries, 1997.

BOX, George E. P.; JENKINS, Gwilym M.; REINSEL, Gregory C.; *et al.* Time series analysis: forecasting and control, 5th ed. John Wiley & Sons, 2015, 2015. (Wiley Series in Probability and Statistics).

BOYER, M. Martin; MEJZA, Joanna; STENTOFT, Lars. Measuring Longevity Risk for a Canadian Pension Fund. CIRANO - Center for Interuniversity Research and Analysis of Organizations, 2011. (Scientific Series No 43/2011).

BRASIL. Circular SUSEP n° 402 de 18/03/2010. Disponível em: <<http://www2.susep.gov.br/bibliotecaweb/docOriginal.aspx?tipo=1&codigo=26529>>. Acesso em: 15 nov. 2017.

BRASIL. Constituição Federal de 1988 (de 05/10/1988). Disponível em: <[https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/518231/CF88\\_Livro\\_EC91\\_2016.pdf?sequence=1?concurso=CFS%202%202018](https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/518231/CF88_Livro_EC91_2016.pdf?sequence=1?concurso=CFS%202%202018)>. Acesso em: 22 set. 2017.

BRASIL. Decreto n° 3.266 de 29/11/1999. Disponível em: <[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/Decreto/D3266.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Decreto/D3266.htm)>. Acesso em: 7 ago. 2018.

BRASIL. Lei Complementar n° 109 de 29/05/2001. Disponível em: <[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/LCP/Lcp109.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/LCP/Lcp109.htm)>. Acesso em: 22 set. 2017.

BRASIL. Lei Estadual do Rio de Janeiro n° 7606 de 26/05/2017. Disponível em: <<http://alerjln1.alerj.rj.gov.br/CONTLEI.NSF/c8aa0900025feef6032564ec0060dfff/e715d24bb92e3b1483258131006442ba?OpenDocument>>. Acesso em: 22 set. 2017.

BRASIL. Lei n° 9.876 de 26/11/1999. Disponível em: <[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/Leis/L9876.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9876.htm)>. Acesso em: 7 ago. 2018.

BRASIL. Portaria MPS n° 403, de 10/12/2008. Disponível em: <[http://sislex.previdencia.gov.br/paginas/66/MPS/2008/403\\_1.htm](http://sislex.previdencia.gov.br/paginas/66/MPS/2008/403_1.htm)>. Acesso em: 22 set. 2017.

BRASIL. Resolução CGPC nº 11, de 21/08/2002. Disponível em: <<http://sislex.previdencia.gov.br/paginas/72/MPAS-CGPC/2002/11.htm>>. Acesso em: 22 set. 2017.

BRASIL. Resolução CGPC nº 18, de 28/03/2006. Disponível em: <<http://sislex.previdencia.gov.br/paginas/72/MPS-CGPC/2006/18.htm>>. Acesso em: 22 set. 2017.

BRASIL. Resolução CNSP nº 131 de 2005. Disponível em: <<http://www2.susep.gov.br/bibliotecaweb/docOriginal.aspx?tipo=1&codigo=19551>>. Acesso em: 22 set. 2017.

BRASS, William. On the Scale of Mortality. *In: Biological Aspects of Demography*. London: W. Brass ed., 1971.

BRASS, William. Methods for Estimating Fertility and Mortality from Limited and Defective Data. Chapel Hill: The University of North Carolina at Chapel Hill, Carolina Population Center, 1975.

BRASS, William; COALE, Ansley J.; DEMENY, Paul; *et al.* The Demography of Tropical Africa. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1968.

BRCIC, Jasenka; BRISEBOIS, Chris. An age-old story. Benefits Canada, 2010. Disponível em: <<https://www.benefitscanada.com/wp-content/uploads/2010/05/04LongevityRetirement1.pdf>>. Acesso em: 7 ago. 2018.

BRILLINGER, D. R. The natural variability of vital rates and associated statistics. *Biometrics*, n. 42, p. 693–734, 1986.

BRILLINGER, D. R. A justification of some common law of mortality. *Transactions of the Society of Actuaries*, v. 13, n. 36AB, p. 116–119, 1961.

BROOKS, C.; SAMS, D.; WILLIAMS, P. A time series of smooth approximations for age, sex, and marital status specific death rates in Australia, 1950/1951 to 1975/1976, with projections to the year 2000. Research memorandum: Melbourne, Australia: Impact Project Research Centre, 1980.

BROUHNS, Natacha; DENUIT, Michel; VERMUNT, Jeroen K. A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 31, n. 3, p. 373–393, 2002.

BROWN, Robert L. Demography - Third Ed. Winsted, Connecticut: ACTEX Publications, 1997.

BUTT, Zoltan; HABERMAN, Steven; SHANG, Han Lin. *ilc: Lee-Carter Mortality Models using Iterative Fitting Algorithms*. Disponível em: <<https://cran.r-project.org/web/packages/ilc/ilc.pdf>>. Acesso em: 28 ago. 2018.

CAIRNS, Andrew J. G. Robust Hedging of Longevity Risk. *The Journal of Risk and Insurance*, v. 80, n. 3, p. 621–648, 2013.

CAIRNS, Andrew J.G; BLAKE, David; DOWD, Kevin; *et al.* A Quantitative Comparison of Stochastic Mortality Models Using Data from England and Wales and the United States. *North American Actuarial Journal*, v. 13, n. 1, p. 1–35, 2009.

CAIRNS, Andrew J. G.; BLAKE, David; DOWD, Kevin. A Two-Factor Model for Stochastic Mortality With parameter Uncertainty: Theory and Calibration. *The Journal of Risk and Insurance*, v. 73, n. 4, p. 687–718, 2006.

CAIRNS, Andrew J. G.; BLAKE, David; DOWD, Kevin. Modelling and management of mortality risk: a review. *Scandinavian Actuarial Journal*, v. 2008, n. 2–3, p. 79–113, 2008.

CAMARDA, Carlo G. MortalitySmooth: An R Package for Smoothing Poisson Counts with P-Splines. *Journal of Statistical Software*, v. 50, n. 1, 2012.

CANNING, David. The causes and consequences of demographic transition. *Population Studies*, v. 65, n. 3, p. 353–361, 2011.

CANUDAS-ROMO, Vladimir; SCHOEN, Robert. Age-specific contributions to changes in the period and cohort life expectancy. *Demographic Research*, v. 13, n. 3, p. 63–82, 2005.

CARFORA, Maria Francesca; CUTILLO, Luisa; ORLANDO, Albina. A quantitative comparison of stochastic mortality models on Italian population data. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 112, p. 198–214, 2017.

CARRIERE, Jacques F. Parametric Models for Life Tables. *Transactions of the Society of Actuaries*, v. 44, p. 77–79, 1992.

CARTER, Lawrence R.; PRSKAWETZ, Alexia. Examining Structural Shifts in Mortality Using the Lee-Carter Method. *Max Planck Institute for Demographic Research MPIDR Working Paper*, v. 2001–007, 2001.

CARVALHO, José Alberto Magno de. Para onde iremos: algumas tendências populacionais no século XXI. *Revista Brasileira de Estudos de População - REBEP*, v. 18, n. 1/2, p. 7–13, 2001.

CARVALHO, José Alberto Magno de. Crescimento populacional e estrutura demográfica no Brasil. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional, 2004. (Texto para discussão nº 227).

CASELLI, Graziella; MESLÉ, France; VALLIN, Jacques. Epidemiologic transition theory exceptions. *Genus - Journal of Population Sciences*, v. 58, n. 1, p. 9–51, 2002.

CASELLI, Graziella; VALLIN, Jacques. Mortality and population ageing. *European Journal of Population*, v. 6, n. 1, p. 1–25, 1990.

CASELLI, Graziella; VALLIN, Jacques; VAUPEL, James W.; *et al.* Age-specific mortality trends in France and Italy since 1900: Period and Cohort effects. *European Journal of Population*, v. 3, n. 1, p. 33–60, 1987.

CENTRO LATINO AMERICANO DE DEMOGRAFIA - CELADE. América Latina: Tablas de Mortalidad 1950-2025. *Boletín Demográfico*, v. Año XXXIV, n. 74, 2004. (Santiago, Julio 2004).

CENTRO LATINO AMERICANO DE DEMOGRAFIA - CELADE. Proyecciones de población - Revisión 2016. Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL), Observatorio Demográfico de América Latina, v. 17, 2016. (Santiago, 2016).

CENTRO LATINO AMERICANO DE DEMOGRAFIA - CELADE. Estimaciones y proyecciones de población total, urbana y rural, y económicamente activa - América Latina - Revisión 2017. CELADE. Disponível em: <<https://www.cepal.org/es/temas/proyecciones-demograficas/estimaciones-proyecciones-poblacion-total-urbana-rural-economicamente-activa>>. Acesso em: 10 ago. 2018.

CHAVHAN, Rajendra Nana; SHINDE, Ramkrishna Lahu. Modeling and Forecasting Mortality Using the Lee-Carter Model for Indian Population Based on Decade-wise Data. *Sri Lankan Journal of Applied Statistics*, v. 17, n. 1, p. 51-68, 2016a.

CHAVHAN, Rajendra Nana; SHINDE, Ramkrishna Lahu. Stochastic Mortality Modeling and Forecasting for Indian Population with Applications on Actuarial Science. *Stochastic Modeling and Applications*, v. 20, n. 2, p. 79-90, 2016b.

CHIANG, Chin Long. *The Life Table and It's Applications*. Malabar, Florida: Robert E. Krieger Publishing Company, 1984.

COALE, Ansley J.; DEMENY, Paul. Regional Model Life Tables and Stable Populations, 1st ed. New York: Academic Press, 1966.

COALE, Ansley J.; DEMENY, Paul. Regional Model Life Tables and Stable Populations, 2nd ed. New York: Academic Press, 1983.

COALE, Ansley J.; KISKER, Ellen Eliason. Mortality Crossovers: Reality or Bad Data? *Population Studies*, v. 40, n. 3, p. 389–401, 1986.

COELHO, Edviges. O Método de Lee-Carter para a Modelização e Previsão da Mortalidade. Dissertação de Mestrado em Estatística e Gestão de Informação, ISEGI- Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2001.

COLEMAN, David A. Populations of the industrial world - a convergent demographic community? *International Journal of Population Geography*, v. 8, n. 5, 2002.

CONGDON, Peter. Statistical Graduation in Local Demographic Analysis and Projection. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (Statistics in Society)*, v. 156, n. 2, p. 237–270, 1993.

CONTINUOUS MORTALITY INVESTIGATION - CMI. Version 1.1 of the CMI library of mortality projections. CMI - Working Paper 37, 37. ed. 2009. Disponível em: <<https://www.actuaries.org.uk/learn-and-develop/continuous-mortality-investigation/cmi-working-papers/mortality-projections/cmi-wp-37>>.

CONTINUOUS MORTALITY INVESTIGATION BUREAU (CMIB). Continuous Mortality Investigation Reports (CMIR) nº 10. The Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries, UK, 1990.

CONTINUOUS MORTALITY INVESTIGATION BUREAU (CMIB). Continuous Mortality Investigation Reports (CMIR) nº 17. The Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries, UK, 1999.

CONTINUOUS MORTALITY INVESTIGATION BUREAU (CMIB). Projecting future mortality: Towards a proposal for a stochastic methodology. The Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries, UK, 2005.

CONTINUOUS MORTALITY INVESTIGATION BUREAU (CMIB). Stochastic projection methodologies: Further progress and P-Spline model features, example results and implications. The Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries, UK, 2006.

CONTINUOUS MORTALITY INVESTIGATION BUREAU (CMIB). Stochastic projection methodologies: Lee-Carter model features, example results and implications. The Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries, UK, 2007.

CORDEIRO FILHO, Antonio. Cálculo Atuarial Aplicado: Teoria e Aplicações: Exercícios Resolvidos e Propostos. São Paulo: Editora Atlas, 2009.

COURBAGE, Youssef; FARGUES, Philippe. A Method for Deriving Mortality Estimates from Incomplete Vital Statistics. *Population Studies*, v. 33, n. 1, p. 165–180, 1979.

COX, Samuel H.; LIN, Yijia; TIAN, Ruilin; et al. Managing Capital Market and Longevity Risks Defined Benefit Pension Plan. *The Journal of Risk and Insurance*, v. 80, n. 3, p. 585–619, 2013.

COX, Samuel H.; LIN, Yijia; PEDERSEN, Hal. Mortality risk modeling: Applications to insurance securitization. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 46, p. 242–253, 2010.

CRAWFORD, Thomas; DE HAAN, Richard; RUNCHEY, Chad. Longevity Risk Quantification and Management: A Review of Relevant Literature. SOA - Society of Actuaries, 2008.

CURRIE, Iain D.; DURBAN, Maria; EILERS, Paul H. C. Smoothing and forecasting mortality rates, 2003. Disponível em: <<http://www.macs.hw.ac.uk/~iain/research/Currie.SM.pdf>>.

CURRIE, Iain D.; DURBAN, Maria; EILERS, Paul H. C. Smoothing and forecasting mortality rates. *Statistical Modelling*, v. 4, p. 279–298, 2004.

CURRIE, Iain D.; DURBAN, Maria; EILERS, Paul H. C. Generalized linear array models with applications to multidimensional smoothing. *Journal of the Royal Statistical Society*, v. 62, n. 2, p. 259–280, 2006. (Statistical Methodology).

CURRIE, Iain D.; DURBAN, Maria. Flexible smoothing with P-splines: a unified approach. *Statistical Modelling*, n. 4, p. 333–349, 2002.

CZADO, Claudia; DELWARDE, Antoine; DENUIT, Michel. Bayesian Poisson log-bilinear mortality projections. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 36, p. 260–284, 2005.

D'AMATO, Valeria; PISCOPO, Gabriela; RUSSOLILLO, Maria. The mortality of the Italian population: Smoothing techniques on the Lee–Carter model. *The Annals of Applied Statistics*, v. 5, n. 2A, p. 705–724, 2011.

DARKIEWICZ, Grzegorz; HOEDEMAKERS, Tom. How the Co-Integration Analysis Can Help in Mortality Forecasting. Catholic University of Leuven, Belgium, 2002.

DE JONG, Piet; MARSHALL, C. Forecasting mortality using the Wang transform. *ASTIN Bulletin*, v. 37, n. 1, p. 149–162, 2007.

DE JONG, Piet; TICKLE, Leonie. Extending Lee–Carter Mortality Forecasting. *Mathematical Population Studies*, v. 13, n. 1, p. 1–18, 2006.

DE JONG, Piet; TICKLE, Leonie; XU, Jianhui. Coherent modeling of male and female mortality using Lee-Carter in a complex number framework. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 71, p. 130–137, 2016.

DE MOIVRE, Abraham. *Annuities on Lives*. London, 1725.

DEBÓN, Ana; MONTES, Francisco; MARTÍNEZ-RUIZ, Francisco. Statistical methods to compare mortality for a group with non-divergent populations: an application to Spanish regions. *European Actuarial Journal*, v. 1, n. 2, p. 291–308, 2011.

DEBÓN, Ana; MONTES, Francisco; PUIG, Francisco. Modelling and forecasting mortality in Spain. *European Journal of Operational Research*, v. 189, n. 3, p. 624–637, 2008.

DENG, Yinglu; BROCKETT, Patrick L.; MACMINN, Richard D. Longevity/Mortality Risk Modeling and Securities Pricing. *The Journal of Risk and Insurance*, v. 79, n. 3, p. 697–721, 2012.

DENUIT, Michel; HABERMAN, Steven; RENSHAW, Arthur E. Longevity-contingent deferred life annuities. *Journal of Pension Economics and Finance*, v. 14, n. 3, p. 1–13, 2015.

DIAZ, Gisou; DEBÓN, Ana; GINER-BOSCH, Vicent. Mortality forecasting in Colombia from abridged life tables by sex. *Genus - Journal of Population Sciences*, v. 74, n. 15, 2018.

DOKUMENTOV, Alexander; HYNDMAN, Rob J. Two-dimensional smoothing of mortality rates. Monash University, Australia 2013. (Working Paper 26/13), 26. ed. 2013.

DOWD, Kevin; CAIRNS, Andrew J.G; BLAKE, David; *et al.* Evaluating the goodness of fit of stochastic mortality models. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 47, n. 3, p. 255–265, 2010.

DUSHI, Irena; FRIEDBERG, Leora; WEBB, Tony. The impact of aggregate mortality risk on defined benefit pension plans. *Journal of Pension Economics & Finance*, v. 9, n. 4, p. 481–503, 2010.

EDWARDS, Ryan D.; TULJAPURKAR, Shripad. Inequality in Life Spans and a New Perspective on Mortality Convergence Across Industrialized Countries. *Population and Development Review*, v. 31, n. 4, p. 645–674, 2005.

EILERS, Paul H. C.; MARX, Brian D. Flexible Smoothing with B-splines and Penalties. *Statistical Science*, v. 11, n. 2, p. 89–102, 1996.

EUROPEAN COMMISSION - EC. The 2009 Ageing Report: Underlying Assumptions and Projection Methodologies. *European Economy*, v. 7/2008, 2008.

EUROPEAN COMMISSION - EC. The 2009 Ageing Report: Economic and budgetary projections for the EU-27 Member States (2008-2060). *European Economy*, v. 2/2009, 2009.

EUROPEAN COMMISSION - EC. The 2012 Ageing Report: Underlying Assumptions and Projection Methodologies. *European Economy*, v. 4/2011, 2011.

EUROPEAN COMMISSION - EC. The 2012 Ageing Report: Economic and budgetary projections for the 27 EU Member States (2010-2060). *European Economy*, v. 2/2012, 2012.

EUROPEAN COMMISSION - EC. The 2015 Ageing Report: Underlying Assumptions and Projection Methodologies. *European Economy*, v. 8/2014, 2014.

EUROPEAN COMMISSION - EC. The 2015 Ageing Report: Economic and budgetary projections for the 28 EU Member States (2013-2060). *European Economy*, v. 3/2015, 2015.

EWBANK, D. C.; GOMEZ DE LEON, J. C.; STOTO, M. A. A Reducible Four-Parameter System of Model Life Tables. *Population Studies*, v. 37, n. 1, p. 105–127, 1983.

FABER, Joseph F.; WADE, Alice H. Life Tables for The United States: 1900-2050. SSA - Social Security Administration, 1983. (Actuarial Study No 89).

FERNÁNDEZ, Eduardo Aguilar. Estimación y proyección de la mortalidad para Costa Rica con la aplicación del método Lee-Carter con dos variantes. *Población y, Salud en Mesoamérica*, v. 11, n. 1, p. 3–24, 2013.

FERREIRA, Weber José. Coleção Introdução à Ciência Atuarial, 4 volumes. Rio de Janeiro: Instituto de Resseguros do Brasil - IRB 1985, 1985. 4v.

FÍGOLI, Moema G. Bueno. Modelando e Projetando a Mortalidade no Brasil. *Revista Brasileira de Estudos de População - REBEP*, v. 15, n. 1, 1998.

- FLICI, Farid. Coherent mortality forecasting for the Algerian population. Centre of Research in Applied Economics for Development - CREAD, Algeria, 2016 (Working Paper February 2016).
- FORBES, Chatherine; EVANS, Merran; HASTINGS, Nicholas; *et al.* Statistical Distributions - 4th ed. [s.l.]: Wiley, 2011.
- FORFAR, David O. Mortality Laws. *In: Encyclopedia of Actuarial Science.* Wiley, West Sussex: Jozef L. Teugels & C. Bjørn Sundt eds., 2006, v. 3 Volume set, p. 1139–1145.
- FORFAR, David O.; SMITH, D. M. The changing shape of English Life Tables. *Transactions of the Faculty of Actuaries*, v. 40 (1985-87), p. 98–134, 1987.
- FRENK, Julio; BOBADILLA, José Luis; STERN, Claudio; Frejka, Tomas; Lozano, Rafael. Elements for a theory of the health transition. *Health Transition Review*, v. 1, n. 1, p. 21–38, 1991.
- FRIAS, Luiz Armando de Medeiros. Tábuas de mortalidade de alguns Municípios das Capitais e a influência dos óbitos de não residentes nessas Capitais. *Revista Brasileira de Estatística*, v. 35, n. 137, p. 35–55, 1974.
- FRIAS, Luiz Armando de Medeiros; LEITE, Valéria da Motta. Estudo comparativo entre os padrões de mortalidade observados no Brasil e os modelos propostos pelas Nações Unidas. *In: Encontro brasileiro de estudos populacionais: contribuições apresentadas.* Encontro Brasileiro de Estudos Populacionais, Rio de Janeiro, IBGE: Diretoria de Divulgação, 1974, p. 27–48.
- FRIES, James F. Aging, Natural Death, and The Compression of Morbidity. *The New England Journal of Medicine*, v. 303, n. 3, p. 135–135, 1980.
- FUNDAÇÃO DE PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR DO SERVIDOR PÚBLICO FEDERAL - FUNPRESP. Relatório de Fundamentação das Premissas Atuariais utilizadas na Avaliação Atuarial de 2016”, 2017. Disponível em: <<https://www.funpresp.com.br/portal/wp-content/uploads/2017/04/Anexo-5-Premissas-Atuariais.pdf>>. Acesso em: 22 set. 2017.
- GALLOP, Adrian. Mortality Projections in the United Kingdom. *In: Orlando, Fla*, 2008.
- GARCÍA-GUERRERO, Víctor Manuel; MELLADO, Manuel Ordorica. Proyección estocástica de la mortalidad mexicana por medio del método de Lee-Carter. *Estudios Demográficos y Urbanos*, v. 27, n. 2, p. 409–448, 2012.

GIROSI, Federico; KING, Gary. Demographic Forecasting. 1st ed. New Jersey: Princeton University Press, 2008.

GIROSI, Federico; KING, Gary. Understanding the Lee-Carter Mortality Forecasting Method. Gary King. Disponível em: <<http://j.mp/2oTcxGt>>. Acesso em: 22 set. 2017.

GOLDRING, Shayla; HENRETTY, Nigel; MILLS, Julie; *et al.* Mortality of the ‘Golden Generation’: What can the ONS Longitudinal Study tell us? Office for National Statistics, 2011. (Population Trends nr 145).

GOLDSTEIN, Joshua R.; WACHTER, Kenneth W. Relationships between period and cohort life expectancy: Gaps and lags. *Population Studies*, v. 60, n. 3, p. 257–269, 2006.

GOMPERTZ, Benjamin. On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, v. 115, p. 513–583, 1825.

GOMPERTZ, Benjamin. On one Uniform Law of Mortality from Birth to extreme Old Age, and on the Law of Sickness. *Journal of the Institute of Actuaries and Assurance Magazine*, v. 16, n. 5, p. 329–344, 1860. (presented to International statistical congress 1860 and reproduced in 1871).

GOVERNMENT ACTUARY’S DEPARTMENT (GAD). National Population Projections: Review of Methodology for Projecting Mortality. London: National Statistics Quality Review Series Report No. 8, 2001.

GRANGER, C. W. J.; JOYEUX, Roselyne. An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*, v. 1, p. 15–39, 1980.

GRAUNT, John. Natural and Political Observations made upon Bills of Mortality. London, 1662.

GUTTERMAN, Sam; VANDERHOOF, Irwin T. Forecasting Changes in Mortality: A Search for a Law of Causes and Effects. *North American Actuarial Journal*, v. 2, n. 4, p. 135–138, 1998.

HABERMAN, Steven; RUSSOLILLO, Maria. Lee Carter Mortality Forecasting: Application to the Italian Population. City University, London, 2005 (Actuarial Research Paper No 167).

HALLEY, Edmond. An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind. *Philosophical Transactions*, v. 17, n. Royal Society, p. 596–610, 1693. Disponível em: <<http://www.pierre-marteau.com/editions/1693-mortality.html>>.

HALLI, Shiva S.; RAO, K. Vaninadha. *Advanced Techniques of Population Analysis*. New York: Plenum Press, 1992.

HÄRDLE, Wolfgang; MYSICKOVA, Alena. *Stochastic Population Forecast for Germany and its Consequence for the German Pension System*. Humboldt University, Berlin, Germany, 2009 (SFB 649 Discussion Paper 2009-009).

HARPER, F. S. An actuarial study of infant mortality. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, p. 234–270, 1936.

HARTMANN, M. *Laws of mortality on the logit scale*. Lund, Sweden: University of Lund, 1981. (Working paper of the Department of Statistics of the University of Lund).

HELIGMAN, Larry; POLLARD, J. H. The Age Pattern of Mortality. *Journal of the Institute of Actuaries*, v. 107, n. 1, p. 49–80, 1980.

HIGGINS, Timothy Sean. *Mathematical Models of Mortality*. In: Australian National University, 2013.

HILL, Kenneth. Estimating Census and Death Registration Completeness. *Asian and Pacific Population Forum*, v. 1, n. 3, p. 8–24, 1987.

HIMES, Christine L.; PRESTON, Samuel H.; CONDRAN, Gretchen A. A Relational Model of Mortality at Older Ages in Low Mortality Countries. *Population Studies*, v. 48, n. 2, p. 269–291, 1994.

HINDE, Andrew. *Demographic Methods*. London: Arnold, 1998.

HOBBS, Frank. Age and Sex Composition. In: *The Methods and Materials of Demography*, 2nd ed. Emerald Group Publishing Limited, 2004: Jacob S. Siegel & David. A. Swanson, 2004, p. 819.

HOLLMANN, Frederick W.; MULDER, Tammany J.; KALLAN, Jeffrey E. *Methodology and Assumptions for the Population Projections of the United States: 1999 to 2100*. United States Census Bureau, Population Division Working Paper No. 38, 2000.

HORIUCHI, Shiro. Epidemiological Transitions in Human History. In: *Symposium on Health and Mortality*, Brussels: 1997, p. 54–67.

HOSKING, J. R. M. Fractional Differencing. *Biometrika*, v. 68, n. 1, p. 165–176, 1981.

HUBERT, Mia; ROUSSEEUW, Peter J.; VERBOVEN, Sabine. A fast method for robust principal components with applications to chemometrics. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, v. 60, p. 101–111, 2002.

HUMAN MOTALITY DATABASE - HMD. University of California, Berkeley and Max Planck Institute for Demographic Research. Disponível em: <[www.mortality.org](http://www.mortality.org)>. Acesso em: 22 set. 2017.

HYNDMAN, Rob J. addb: Australian Demographic Data Bank. R package version 3.2b. Disponível em: <<https://pkg.robjhyndman.com/addb/>>.

HYNDMAN, Rob J. Demography: Forecasting mortality, fertility, migration and population data (with contributions from Heather Booth, Leonie Tickle and John Maindonald). Disponível em: <<https://cran.r-project.org/web/packages/demography/index.html>>. Acesso em: 28 ago. 2018.

HYNDMAN, Rob J.; BOOTH, Heather. Stochastic population forecasts using functional data models for mortality, fertility and migration. *International Journal of Forecasting*, v. 24, n. 3, p. 323–342, 2008.

HYNDMAN, Rob J.; BOOTH, Heather; YASMEEN, Farah. Coherent Mortality Forecasting: The Product-Ratio Method With Functional Time Series Models. *Demography*, v. 50, n. 1, p. 261–283, 2013.

HYNDMAN, Rob J.; KHANDAKAR, Yeasmin. Automatic Time Series Forecasting: The forecast Package for R. *Journal of Statistical Software*, v. 27, n. 3, 2008.

HYNDMAN, Rob J.; KOEHLER, Anne B.; ORD, J. Keith; *et al.* Forecasting with Exponential Smoothing: The State Space Approach. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

HYNDMAN, Rob J.; SHANG, Han Lin. Forecasting functional time series (with discussion). *Journal of the Korean Statistical Society*, v. 38, n. 3, p. 199–211, 2009.

HYNDMAN, Rob J.; SHANG, Han Lin. Rainbow Plots, Bagplots, and Boxplots for Functional Data. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, v. 19, n. 1, p. 29–45, 2010.

HYNDMAN, Rob J.; ULLAH, Sharid. Robust forecasting of mortality and fertility rates: A functional data approach. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 51, n. 10, p. 4942–4956, 2007.

INSTITUTE FOR HEALTH METRICS AND EVALUATION - IHME. Life Tables / Mortality Visualization / Viz Hub. IHME. Disponível em: <<https://vizhub.healthdata.org/mortality/lifetables>>. Acesso em: 9 ago. 2018.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE. Brasil: tábuas-modelo de mortalidade e populações estáveis. Rio de Janeiro: IBGE, 1981.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE. A Mortalidade Infantil no Brasil nos anos 80. Rio de Janeiro: IBGE, 1988. (DPE - 88 007).

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE. Evolução e Perspectivas da Mortalidade Infantil no Brasil. Rio de Janeiro: IBGE, 1999. (Séries Estudos & Pesquisas - Informação Demográfica e Socioeconômica - número 2). Disponível em: <<https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv6685.pdf>>.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE. Projeções da População - Brasil e Unidades da Federação - Revisão 2000. Rio de Janeiro: IBGE, 2000.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE. Projeção da População do Brasil: 1980-2050 - Revisão 2004. Rio de Janeiro: IBGE, 2004. Disponível em: <[ftp://ftp.ibge.gov.br/Projecao\\_da\\_Populacao/Revisao\\_2004\\_Projecoes\\_1980\\_2050/metodologia.pdf](ftp://ftp.ibge.gov.br/Projecao_da_Populacao/Revisao_2004_Projecoes_1980_2050/metodologia.pdf)>.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE. Tábuas de Mortalidade por sexo e grupos de idade - Grandes Regiões e Unidades da Federação - 1980, 1991 e 2000. Rio de Janeiro: IBGE, 2005. (Textos para discussão - Diretoria de Pesquisas - número 20). Disponível em: <<https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv5851.pdf>>.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE. Projeção da População do Brasil por sexo e idade - 1980-2050 - Revisão 2008. Rio de Janeiro: IBGE, 2008. (Séries Estudos & Pesquisas - Informação Demográfica e Socioeconômica - número 24). Disponível em: <<https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv41229.pdf>>.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE. Observações sobre a evolução da mortalidade no Brasil: o passado, o presente e perspectivas. Rio de Janeiro: IBGE, 2010. Disponível em: <<https://ww2.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/tabuadevida/2009/notastecnicas.pdf>>.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE. Censo Demográfico 2010 - Características da população e dos domicílios Resultados do universo. Rio de Janeiro:

IBGE, 2011. Disponível em:  
<[https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/93/cd\\_2010\\_caracteristicas\\_populacao\\_domicilios.pdf](https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/93/cd_2010_caracteristicas_populacao_domicilios.pdf)>.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE. Projeções da População - Brasil e Unidades da Federação - Revisão 2013. Rio de Janeiro: IBGE, 2013a. (Séries Relatórios Metodológicos - volume 40). Disponível em:  
<[ftp://ftp.ibge.gov.br/Projecao\\_da\\_Populacao/Projecao\\_da\\_Populacao\\_2013/srm40\\_projecao\\_da\\_populacao.pdf](ftp://ftp.ibge.gov.br/Projecao_da_Populacao/Projecao_da_Populacao_2013/srm40_projecao_da_populacao.pdf)>.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE. Tábuas Abreviadas de Mortalidade por Sexo e Idade – Brasil, Grandes Regiões e Unidades da Federação - 2010. Rio de Janeiro: IBGE, 2013b. (Séries Estudos & Pesquisas - Informação Demográfica e Socioeconômica - número 30). Disponível em:  
<<https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv65137.pdf>>.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE. Mudança Demográfica no Brasil no Início do Século XXI - Subsídios para as projeções da população. Rio de Janeiro: IBGE, 2015. (Séries Estudos & Análises - Informação Demográfica e Socioeconômica - número 3). Disponível em:  
<<https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv93322.pdf>>.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE. Retroprojeção da População do Brasil por sexo e idade: 2000-1980. Rio de Janeiro: IBGE, 2016a. Disponível em: <<https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv98635.pdf>>.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE. Procedimentos para obtenção de uma Tábua Completa de Mortalidade a partir de uma Tábua Abreviada – Brasil 2014. Rio de Janeiro: IBGE, 2016b. Disponível em:  
<[ftp://ftp.ibge.gov.br/Tabuas\\_Completas\\_de\\_Mortalidade/Textos\\_metodologico\\_e\\_de\\_analise/Metodologia\\_para\\_transformar\\_uma\\_tabua\\_abreviada\\_em\\_completa\\_de\\_mortalidade.pdf](ftp://ftp.ibge.gov.br/Tabuas_Completas_de_Mortalidade/Textos_metodologico_e_de_analise/Metodologia_para_transformar_uma_tabua_abreviada_em_completa_de_mortalidade.pdf)>.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE. O Centro Brasileiro de Estudos Demográficos – Uma trajetória de estudos populacionais no IBGE. Rio de Janeiro: IBGE, 2017. Disponível em:  
<<https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101399.pdf>>.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE. Projeções da População - Brasil e Unidades da Federação - Revisão 2018. Rio de Janeiro: IBGE, 2018.

(Séries Relatórios Metodológicos - volume 40). Disponível em: <<https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101597.pdf>>.

IYER, Subramaniam. Actuarial mathematics of social security pensions. Geneva: International Labour Office/International Social Security Association, 1999. (Quantitative Methods in Social Protection Series).

JESUS, J. S.; OLIVEIRA, K. F. Previsão da Mortalidade do Estado de Sergipe utilizando o modelo Lee & Carter. *In*: XIX Encontro Nacional de Estudos Populacionais 2014, São Pedro, São Paulo: Associação Brasileira de Estudos Populacionais - ABEP, 2014.

JETHS, Anneke Van den Berg; HOOGENVEEN, Rudolf; DE HOLLANDER, Augustinus; *et al.* A review of epidemiological approaches to forecasting mortality and morbidity. *In*: Forecasting mortality in developed countries: insights from a statistical, demographic and epidemiological perspective. Kluwer Academic Publishers: Ewa Tabeau, Anneke Van Den Berg Jeths and Christopher Heathcote, 2001, p. 33–56. (European Studies of Population, 9).

JIANG, Lin. Changing Kinship Structure and its Implications for Old-Age Support in Urban and Rural China. *Population Studies*, v. 49, n. 1, p. 127–145, 1995.

JORDAN, Chester Wallace Jr. Life Contingencies, 2nd ed. Society of Actuaries, 1991, 1991.

KALBEN, Barbara Blatt. Why Men Die Younger: Causes of Mortality Differences by Sex. Schaumburg, Illinois: Society of Actuaries, 2002. (SOA Monograph M-LI01-1).

KANNISTO, Väinö. Presentation at a workshop on old age mortality. *In*: Odense University, Denmark, 1992.

KANNISTO, Väinö. Development of Oldest-old Mortality, 1950-1990: Evidence from 28 Developed Countries. Odense, Denmark: Odense University Press, 1994. (Odense Monographs on Population Aging 1). Disponível em: <<http://www.demogr.mpg.de/Papers/Books/Monograph1/start.htm>>.

KANNISTO, Väinö. Measuring the Compression of Mortality. *Demographic Research*, v. 3, p. Article 6, 2000.

KEELE, Luke. Semiparametric Regression for the Social Science. Wiley, 2008.

KEILMAN, Nico. Ex-Post Errors in Official Population Forecasts in Industrialized Countries. *Journal of Official Statistics*, v. 13, n. 3, p. 245–277, 1997.

- KEILMAN, Nico; PHAM, Dinh Quang; HETLAND, Arve. Why population forecasts should be probabilistic - illustrated by the case of Norway. *Demographic Research*, v. 6, n. 15, p. 409–454, 2002.
- KESSLER, Emily K. Turning the Tables: Mortality Tables Should Reflect Improving Mortality. *Pension Section News*, v. 60, p. 18–23, 2006.
- KEYFITZ, Nathan; CASWELL, Hal. *Applied Mathematical Demography - 3rd Ed.* New York: Springer, 2005.
- KHAN, Md Hasinur Rahaman; AFRIN, Sadia; MASUD, Mohammad Shahed. Mortality Forecasting Using Lee Carter Model Implemented to French Mortality Data. *Dhaka University Journal of Science*, v. 64, n. 2, p. 99–104, 2016.
- KIRK, Dudley. Demographic Transition Theory. *Population Studies*, v. 50, n. 3, p. 361–387, 1996.
- KISSER, Michael; KIFF, John; OPPERS, Erik S.; *et al.* The Impact of Longevity Improvements on U.S. Corporate Defined Benefit Pension Plans. IMF - International Monetary Fund, 2012. (Working Paper 12/170).
- KISSER, Michael; KIFF, John; OPPERS, Erik S.; *et al.* Longevity assumptions and defined benefit pension plans. *In: American Economic Association 2014 Annual Meeting*, Philadelphia, PA, 2013.
- KJÆRGAARD, Søren; CANUDAS-ROMO, Vladimir. Potential support ratios: Cohort versus period perspectives. *Population Studies*, v. 71, n. 2, p. 171–186, 2017.
- KOISSI, Marie-Claire; SHAPIRO, Arnold F. Fuzzy formulation of the Lee–Carter model for mortality forecasting. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 39, p. 287–309, 2006.
- KOISSI, Marie-Claire; SHAPIRO, Arnold F.; HÖGNÄS, Göran. Evaluating and extending the Lee–Carter model for mortality forecasting: Bootstrap confidence interval. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 38, n. 1, p. 1–20, 2006.
- KOSTAKI, A. A nine parameter version of the Heligman-Pollard formula. *Mathematical Population Studies*, v. 3, n. 4, p. 277–288, 1992.
- KRISHNAMOORTHY, Kalimuthu. *Handbook of Statistical Distributions with Applications - 2nd Ed.* University of Louisiana Lafayette, Louisiana, USA: CRC Press, 2016.
- LAMBERT, J. H. *Dottrina degli azzardi.* Gaeta and Fontana, Milan, 1776.

- LAZAR, Dorina. On forecasting mortality using Lee-Carter method. *In: Proceedings of the 3rd Conference in Actuarial Science & Finance, Samos, Greece, 2004.*
- LAZAR, Dorina; DENUIT, Michel M. A multivariate time series approach to projected life tables. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, v. 25, p. 806–823, 2009.
- LE BRASS, Hervé. *The Nature of Demography*. Princeton University Press, 2008.
- LEDERMANN, Sully; BREAS, Jean. Les dimensions de la mortalité. *Population (Paris)*, v. 14, n. 4, p. 637–682, 1959.
- LEE, Ronald Demos. Probabilistic Approaches to Population Forecasting. *Population and Development Review*, v. 24, Supplement: Frontiers of Population Forecasting, p. 156–190, 1998.
- LEE, Ronald Demos. The Lee-Carter Method for Forecasting Mortality, with Various Extensions and Applications. *North American Actuarial Journal*, v. 4, n. 1, p. 80–91, 2000.
- LEE, Ronald Demos. The Demographic Transition: Three Centuries of Fundamental Change. *Journal of Economic Perspectives*, v. 17, n. 4, p. 167–190, 2003.
- LEE, Ronald Demos. Quantifying Our Ignorance: Stochastic Forecasts of Population and Public Budgets. *Population and Development Review*, v. 30, Supplement: Aging, Health, and Public Policy, p. 153–175, 2004a.
- LEE, Ronald Demos. Reflections on Inverse Projection: Its Origins, Development, Extensions, and Relation to Forecasting. *In: Inverse Projection Techniques: Old and New Approaches*. Springer-Verlag, 2004: Elisabetta Barbi, Salvatore Bertino & Eugenio Sonnino (eds.), 2004b, p. 1–9. (Demographic Research Monographs).
- LEE, Ronald Demos; CARTER, Lawrence R. Modeling and Forecasting U.S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association*, v. 87, n. 419, p. 659–671, 1992.
- LEE, Ronald Demos; CHAN, Wai Sum. Outlier analysis and mortality forecasting: the United Kingdom and Scandinavian countries. *Scandinavian Actuarial Journal*, v. 3, p. 187–211, 2005.
- LEE, Ronald Demos; MILLER, Timothy. Evaluating the performance of the lee-carter method for forecasting mortality. *Demography*, v. 38, n. 4, p. 537–549, 2001.
- LEE, Ronald Demos; NAULT, F. Modeling and Forecasting Canadian Mortality: An Application of the Lee-Carter Approach, with Extensions. *In: World Congress of the International Union for Scientific Study of Population, Montreal, Canada, 1993.*

LEE, Ronald Demos; ROFMAN, R. Modeling and Projecting Mortality in Chile. *Notas de Población*, v. Año XXII, n. 59, p. 183–213, 1994. (Santiago de Chile, Junio 1994).

LEE, Ronald Demos; TULJAPURKAR, Shripad. Stochastic population forecasts for the United States: beyond high, medium, and low. *Journal of the American Statistical Association*, v. 89, n. 428, p. 1175–1189, 1994.

LEE, Ronald Demos; TULJAPURKAR, Shripad. Death and Taxes: Longer Life, Consumption, and Social Security. *Demography*, v. 34, n. 1, p. 67–81, 1997.

LEE, Ronald Demos; TULJAPURKAR, Shripad. Stochastic Forecasts for Social Security. *In: Frontiers in the Economics of Aging*. The University of Chicago Press, 1998: David A. Wise (ed.), 1998a, p. 393–428.

LEE, Ronald Demos; TULJAPURKAR, Shripad. Uncertain Demographic Futures and Social Security Finances. *The American Economic Review*, v. 88, n. 2, p. 237–241, 1998b.

LEE, Ronald Demos; TULJAPURKAR, Shripad. Population Forecasting for Fiscal Planning: Issues and Innovations. Center for the Economics and Demography of Aging. UC Berkeley: Center on the Economics and Demography of Aging, 2000. Disponible em: <http://escholarship.org/uc/item/7n02r268>.

LI, Hong; LU, Yang; LYU, Pintao. Coherent Mortality Forecasting for Less Developed Countries. *SSRN Electronic Journal*, 2018.

LI, Jackie. Projections of New Zealand Mortality Using the Lee-Carter Model and its Augmented Common Factor Extension. *New Zealand Population Review*, v. 36, p. 37–53, 2010.

LI, Jackie. A Poisson common factor model for projecting mortality and life expectancy jointly for females and males. *Population Studies*, v. 67, n. 1, p. 111–126, 2013.

LI, Jackie; TICKLE, Leonie; PARR, Nick. A multi-population evaluation of the Poisson common factor model for projecting mortality jointly for both sexes. *Journal of Population Research*, v. 33, n. 4, p. 333–360, 2016.

LI, Nan; LEE, Ronald Demos. Coherent mortality forecasts for a group of populations: An extension of the lee-carter method. *Demography*, v. 42, n. 3, p. 575–594, 2005.

LI, Nan; LEE, Ronald Demos; GERLAND, Patrick. Extending the Lee-Carter Method to Model the Rotation of Age Patterns of Mortality Decline for Long-Term Projections. *Demography*, v. 50, n. 6, p. 2037–2051, 2013.

LI, Nan; LEE, Ronald Demos; TULJAPURKAR, Shripad. Using the Lee-Carter Method to Forecast Mortality for Populations with Limited Data. *International Statistical Review*, v. 72, n. 1, p. 19–36, 2004.

LI, Siu-Hang; CHAN, Wai Sum. The Lee-Carter Model for Forecasting Mortality, Revisited. *North American Actuarial Journal*, v. 11, n. 1, 2007.

LIU, Xiaoming. Stochastic Mortality Modelling. A thesis submitted in conformity with the requirements for the degree of Doctor of Philosophy Graduate Department of Statistics University of Toronto, University of Toronto, Toronto, Canada, 2008.

LOVÁSZ, Enrico. Analysis of Finnish and Swedish mortality data with stochastic mortality models. *European Actuarial Journal*, v. 1, n. 2, p. 259–289, 2011.

LUNDQUIST, Jennifer Hicke; ANDERTON, Douglas L.; YAUKEY, David. *Demography: The Study of Human Population - 4th Ed.* Long Grove, Illinois: Waveland Press, 2015.

LUNDSTRÖM, Hans; QVIST, Jan. Mortality forecasting and trend shifts: an application of the Lee-Carter model to Swedish mortality data. *International Statistical Review*, v. 72, n. 1, p. 37–50, 2004.

LUTZ, Wolfgang; SANDERSON, Warren C.; SCHERBOV, Sergei. Expert-Based Probabilistic Population Projections. *Population and Development Review*, v. 24, Supplement: Frontiers of Population Forecasting, p. 139–155, 1998.

LUTZ, Wolfgang; SCHERBOV, Sergei. An Expert-Based Framework for Probabilistic National Population Projections: The Example of Austria. *European Journal of Population*, v. 14, n. 1, p. 1–17, 1998.

MAKEHAM, William Matthew. On the Law of Mortality and the Construction of Annuity Tables. *The Assurance Magazine, and Journal of the Institute of Actuaries*, v. 8, n. 6, p. 301–310, 1860.

MAKEHAM, William Matthew. On the Further Development of Gompertz's Law. *Journal of the Institute of Actuaries*, v. 28, n. 4, p. 316–332, 1890.

MARTINELLE, S. A generalized Perks formula for old-age mortality. *In: Statistiska Centralbyran, Stockholm, Sweden, 1987.*

MCKEOWN, Robert E. The Epidemiologic Transition: Changing Patterns of Mortality and Population Dynamics. *American Journal of Lifestyle Medicine*, v. 3, n. suppl.1, p. 19–26, 2009.

MCNOWN, Robert; ROGERS, Andrei. Forecasting Mortality: A Parameterized Time Series Approach. *Demography*, v. 26, n. 4, p. 645–660, 1989.

MELO, Ianne Rafaela Santos. Projeção da mortalidade para os espaços geográficos do semiárido brasileiro. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelos de Decisão e Saúde - Nível Mestrado do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, como requisito regulamentar para obtenção do título de Mestre, Universidade Federal da Paraíba - UFPB, João Pessoa, 2017.

MILNE, Joshua. *A Treatise on the Valuation of Annuities and Assurances on Lives and Survivorships*. London, 1815.

MINISTÉRIO DA SAÚDE - MS. Sistema de Informações sobre Mortalidade SIM/DATASUS. Disponível em: <<http://www2.datasus.gov.br/DATASUS/index.php?area=0205&id=6937>>. Acesso em: 22 set. 2017.

MISSOV, Trifon I.; LENART, Adam. Linking period and cohort life-expectancy linear increases in Gompertz proportional hazards models. *Demographic Research*, v. 24, n. 19, p. 455–468, 2011.

MODE, C. J.; BUSBY, R. C. An eight-parameter model of human mortality - The single decrement case. *Bulletin of Mathematical Biology*, v. 44, n. 5, p. 647–659, 1982.

MOLINA, Carlos Andrés Ochoa. El modelo Lee-Carter para estimar y pronosticar mortalidad: Una aplicación para Colombia. Tesis o trabajo de grado presentada como requisito parcial para optar al título de Magister en Ciencias-Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Colombia, 2015.

MORETTIN, Pedro A.; BUSSAB, Wilton de O. *Estatística Básica*. Editora Saraiva, 2010.

MORTARA, Giorgio. Estudos sobre a mortalidade nos Municípios de Recife, Salvador, Porto Alegre, Belo Horizonte e Belém. *Revista Brasileira de Estatística*, v. 8, n. 29, p. 58–102, 1947.

MOSER, Kath; SHKOLNIKOV, Vladimir M.; LEON, David A. World Mortality 1950–2000: Divergence Replaces Convergence from the Late 1980s. *In: HIV, Resurgent Infections and*

Population Change in Africa. Springer, Dordrecht: Caraël M., Glynn J.R. (eds), 2007, v. 6, p. 11–25. (International Studies in Population).

MOSER, L. Die Gesetze der Lebensdauer. Verlag von Veit und Comp, Berlin, 1839.

MOULTRIE, Tom; DORRINGTON, Rob; HILL, Allan; *et al.* Tools for Demographic Estimation. Paris: International Union for the Scientific Study of Population - IUSSP, 2013. Disponível em: <<http://demographicestimation.iussp.org/>>.

MOURA, Thais Oliveira. Análise Metodológica de Mortalidade através do Modelo de Lee & Carter no Rio Grande do Sul. Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para obtenção do grau de Bacharel em Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, Porto Alegre, 2015.

MURDOCK, Steve H.; ELLIS, David R. Applied Demography: An Introduction to Basic Concepts, Methods and Data. Boulder, Colorado: Westview Press, 1991.

MURPHY, Michael. The Golden Generations in historical context. British Actuarial Journal, v. 15, n. Supplement, p. 151–184, 2009.

MYERS, Robert J. Accuracy of Age Reporting in the 1950 United States Census. Journal of the American Statistical Association, v. 49, n. 268, p. 826–831, 1954.

NAKAGOME, Nobuyuki; KAWAGUCHI, Muneki. The Longevity Risk Associated with the Pension Liability. *In*: International Actuarial Association (IAA) - Actuarial Approach for Financial Risks (AFIR) / Enterprise Risk Management (ERM), Rome, Italy, 2008.

NAMBOODIRI, Krishnan. A Primer of Population Dynamics. New York: Plenum Press, 1996.

NAMBOODIRI, Krishnan; SUCHINDRAN, C. M. Life Table Techniques and Their Applications. London: Academic Press, 1987.

NEWELL, Colin. Methods and Models in Demography. New York: The Guilford Press, 1988.

NORHEIM, Ole Frithjof. A grand convergence in mortality is possible: comment on Global Health 2035. International Journal of Health Policy and Management, v. 2, n. 1, p. 1–3, 2014.

OEPPEN, James E. Coherent forecasting of multiple-decrement life tables: a test using Japanese cause of death data, 2008.

OEPPEN, James E; VAUPEL, James W. Broken Limits to Life Expectancy. Science, v. 296, p. 1029–1031, 2002.

OLIVEIRA, Mário Moreira Carvalho de; FRISCHTAK, Ricardo Milton; RAMIREZ, Milton Ramos; *et al.* Tábuas Biométricas de mortalidade e sobrevivência: EXPERIÊNCIA DO MERCADO SEGURADOR BRASILEIRO – 2010. Rio de Janeiro: Escola Nacional de Seguros - FUNENSEG, 2012.

OLIVEIRA, Mário Moreira Carvalho de; RAMIREZ, Milton Ramos; FRISCHTAK, Ricardo Milton; *et al.* Mortality tables for the Brazilian insured population. *Revista Brasileira de Estudos de População - REBEP*, v. 33, n. 3, p. 653–677, 2016.

OLSHANSKY, S. Jay. On Forecasting Mortality. *The Milbank Quarterly*, v. 66, n. 3, p. 482–530, 1988.

OLSHANSKY, S. Jay; AULT, A. Brian. The Fourth Stage of the Epidemiologic Transition: The Age of Delayed Degenerative Diseases. *The Milbank Quarterly*, v. 64, n. 3, p. 355–391, 1986.

OLSHANSKY, S. Jay; PASSARO, Douglas J.; HERSHOW, Ronald C.; *et al.* A Potential Decline in Life Expectancy in the United States in the 21st Century. *The New England Journal of Medicine*, v. 352, n. 11, p. 1138–1145, 2005.

OMRAN, Abdel R. The epidemiologic transition: a theory of the epidemiology of population change. *Milbank Mem Fund Q*, v. 49, p. 509–538, 1971.

OMRAN, Abdel R. The epidemiologic transition theory revisited thirty years later. *World Health Statistics Quarterly*, v. 51, p. 99–119, 1998.

OPPERMAN, L. Insurance record 1870. *Journal of the Institute of Actuaries*, v. 16 (1872), n. H. & S. 2, p. 335–353, 1870.

ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT - OECD. Mortality Assumptions and Longevity Risk: Implications for pension funds and annuity providers. n. OECD Publishing, 2014.

ORTEGA, Antonio. *Tablas de Mortalidad*. San José, Costa Rica: Centro Latinoamericano de Demografía, 1987.

PALMORE, James A.; GARDNER, Robert W. *Measuring Mortality, Fertility, and Natural Increase: A Self-Teaching Guide to Elementary Measures*. Honolulu, Hawaii: East-West Center, 1994.

- PASCARIU, Marius D. Mortality Laws R package - Parametric Mortality Models, Life Tables and HMD. Disponível em: <<https://github.com/mpascariu/MortalityLaws>>.
- PEDROZA, Claudia. A Bayesian forecasting model: predicting U.S. male mortality. *Biostatistics*, v. 7, n. 4, p. 530–550, 2006.
- PERKS, Wilferd. On some experiments in the graduation of Mortality Statistics. *Journal of the Institute of Actuaries*, v. 63, n. 1, p. 12–57, 1932.
- PERZ, Stephen G. Population Change. *In: The Methods and Materials of Demography*, 2nd ed. Emerald Group Publishing Limited, 2004: Jacob S. Siegel & David. A. Swanson, 2004, p. 819.
- PETRIOLI, L. A new set of models of mortality. *In: Seminar on Methodology and Data Collection in Mortality Studies*, Dakar, Senegal, 1981.
- PISCOPO, Gabriela. The impact of longevity risk on annuitization factors in the Italian state defined contribution pension scheme. *Insurance Markets and Companies: Analyses and Actuarial Computations*, v. 2, n. 1, p. 49–57, 2011.
- POLLARD, A. H.; YUSUF, Farhat; POLLARD, G. N. *Demographic Techniques - Third Edition*. New York: Pergamon Press, 1990.
- POSTON JR., Dudley L.; BOUVIER, Leon F. *Population and Society: An Introduction to Demography*. Cambridge University Press, 2010.
- PRATA, Pedro Reginaldo. A transição epidemiológica no Brasil. *Cadernos de Saúde Pública*, v. 8, n. 2, 1992.
- PRESSAT, Roland. *Demographic Analysis - Projections on Natality, Fertility and Replacement*. New Brunswick, New Jersey: Transaction Publishers, 2009.
- PRESTON, Samuel H.; COALE, Ansley J.; TRUSSELL, T. James; *et al.* Estimating the completeness of reporting of adult deaths in populations that are approximately stable. *Population Index*, v. 46, n. 2, p. 179–202, 1980.
- PRESTON, Samuel H.; ELO, Irma T.; STEWART, Quincy. Effects of Age Misreporting on Mortality Estimates at Older Ages. *Population Studies*, v. 53, n. 2, p. 165–177, 1999.
- PRESTON, Samuel H.; HEUVELINE, Patrick; GUILLOT, Michel. *Demography - Measuring and Modeling Population Process*. Oxford, UK: Blackwell Publishing, 2001.
- PRESTON, Samuel H.; HILL, Kenneth. Estimating the Completeness of Death Registration. *Population Studies*, v. 34, n. 2, p. 349–366, 1980.

R CORE TEAM. R: A language and environment for statistical computing. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.

RABBI, Ahabab Mohammad Fazle; MAZZUCO, Stefano. Mortality and life expectancy forecast for (comparatively) high mortality countries. *Genus - Journal of Population Sciences*, v. 74, n. 18, 2018.

RAFTERY, Adrian; LALIC, Nevena; GERLAND, Patrick. Joint probabilistic projection of female and male life expectancy. *Demographic Research*, v. 30, n. 27, p. 795–822, 2014.

RAMSAY, J. O.; DALZELL, C. J. Some tools for functional data analysis (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, v. 53, n. 3, p. 539–572, 1991.

RAMSAY, J. O.; SILVERMAN, B. W. *Functional Data Analysis - 2nd ed.* New York: Springer, 2005.

RAU, Roland; BOHK-EWALD, Christina; MUSZYNSKA, Magdalena M.; VAUPEL, James W. *Visualizing Mortality Dynamics in the Lexis Diagram.* Springer, 2018. (The Springer Series on Demographic Methods and Population Analysis).

REED, Lowell J.; MERREL, Margaret. A short method for constructing an abridged life table. *American Journal of Epidemiology*, v. 30 Section A, n. 2, p. 33–62, 1939.

REINSEL, Gregory C. *Elements of multivariate time series analysis*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2003.

RENSHAW, Arthur E. Actuarial graduation practice and generalised linear and non-linear models. *Journal of the Institute of Actuaries*, v. 118, p. 295–312, 1991.

RENSHAW, Arthur E.; HABERMAN, Steven. *Modeling for Mortality Reduction Factors.* London, UK: Faculty of Actuarial Science & Insurance, City University London: Department of Actuarial Science and Statistics, 2000.

RENSHAW, Arthur E.; HABERMAN, Steven. Lee-Carter mortality forecasting: a parallel generalized linear modelling approach for England and Wales mortality projection. *Journal of the Royal Statistical Society*, v. 52, n. 1, p. 119–137, 2003a. (Applied Statistics).

RENSHAW, Arthur E.; HABERMAN, Steven. On the forecasting of mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 32, n. 3, p. 379–401, 2003b.

RENSHAW, Arthur E.; HABERMAN, Steven. Lee-Carter mortality forecasting with age-specific enhancement. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 33, n. 2, p. 255–272, 2003c.

- RENSHAW, Arthur E.; HABERMAN, Steven. A cohort-based extension to the Lee–Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 38, p. 556–570, 2006.
- RENSHAW, Arthur E.; HABERMAN, Steven; HATZOPOULOS, P. The Modelling of Recent Mortality Trends in United Kingdom Male Assured Lives. *British Actuarial Journal*, v. 2, n. 2, 1996.
- RODRIGUES, José Angelo. *Gestão de Risco Atuarial*. São Paulo: Editora Saraviva, 2008, 2008.
- ROGERS, A.; PLANCK, F. Model: A general program for estimating parameterized model schedules of fertility, mortality, migration, and marital and labor force status transitions. *In: Working Paper 83-102*. International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria, 1983.
- ROWLAND, Donald T. *Demographic method and concepts*. New York: Oxford University Press, 2003.
- RUPPERT, David; WAND, M. P.; CARROL, R. J. *Semiparametric Regression*. Cambridge University Press, 2003. (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics).
- SALVINI, Maria Silvana; GABRIELLI, Giuseppe; PATERNO, Anna; *et al.* Demographic Trends in Developing Countries: Convergence or Divergence Processes? DISIA - Dipartimento di Statistica, Informatica, Applicazioni “Giuseppe Parenti” (Working Paper 2015/03), Università Degli Studi Firenze, Italia, 2015/03, 2015.
- SANTOS, Raquel Rodrigues. *Técnicas de modelagem do improvement para construção de tábuas geracionais*. Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós- Graduação em Ciências Atuariais do Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais da PUC-Rio, Pontifícia Universidade Católica PUC-RJ, Rio de Janeiro, 2007.
- SCIENCE. Is there a limit to the human life span? *Science*, 2016. Disponível em: <<http://www.sciencemag.org/news/2016/10/there-limit-human-life-span>>. Acesso em: 20 set. 2017.
- SCIENCE. A Pitched Battle Over Life Span. *Science*, v. 333, n. 6042, p. 549–550, 2011.
- SCOTT, Elaine A. *Simple Defined Benefit Plans: Methods of Actuarial Funding*. Irwin Professional Pub, 1989.

SELIGMAN, Benjamin; GREENBERG, Gabi; TULJAPURKAR, Shripad. Convergence in male and female life expectancy: Direction, age pattern, and causes. *Demographic Research*, v. 34, n. 38, p. 1063–1074, 2016.

SENG, You Poh. Errors in Age Reporting in Statistically Underdeveloped Countries. *Population Studies*, v. 13, n. 2, p. 164–182, 1959.

SEVCIKOVA, Hana; LI, Nan; GERLAND, Patrick. Mortcast: Estimation and Projection of Age-Specific Mortality Rates. Disponível em: <<https://cran.r-project.org/web/packages/MortCast/MortCast.pdf>>. Acesso em: 28 ago. 2018.

SHAIR, Syazreen; PURCAL, Sachi; PARR, Nick. Evaluating Extensions to Coherent Mortality Forecasting Models. *Risks*, v. 5, n. 16, 2017.

SHANG, Han Lin. Point and interval forecasts of age-specific life expectancies: A model averaging approach. *Demographic Research*, v. 27, n. 21, p. 593–644, 2012.

SHANG, Han Lin; BOOTH, Heather; HYNDMAN, Rob J. Point and interval forecasts of mortality rates and life expectancy: A comparison of ten principal component methods. *Demographic Research*, v. 25, n. 5, p. 173–214, 2011.

SHANG, Han Lin; HYNDMAN, Rob J. Grouped functional time series forecasting: an application to age-specific mortality rates. Monash University, Australia 2010. (Working Paper 04/16), 04. ed. 2016.

SHANG, Han Lin; HYNDMAN, Rob J.; BOOTH, Heather. A comparison of ten principal component methods for forecasting mortality rates. Monash University, Australia 2010. (Working Paper 08/10), 08. ed. 2010.

SHKOLNIKOV, Vladimir M.; JDANOV, Dmitri A.; ANDREEV, Evgeny M.; VAUPEL, James W. Steep Increase in Best-Practice Cohort Life Expectancy. *Population and Development Review*, v. 37, n. 3, p. 419–434, 2011.

SHUMWAY, Robert H.; STOFFER, David S. *Time Series Analysis and Its Applications With R Examples*, 4th ed. Springer International Publishing, 2017, 2017. (Springer Texts in Statistics).

SIEGEL, Jacob S. *The Great Debate on the Outlook for Human Longevity: Exposition and Evaluation of Two Divergent Views*. Society of Actuaries (SOA), 2005.

SIEGEL, Jacob S.; SWANSON, David A. *The Methods and Materials of Demography*, 2nd ed. Emerald Group Publishing Limited, 2004.

SILER, William. A Competing-Risk Model for animal mortality. *Ecology*, v. 60, n. 4, p. 750–757, 1979.

SILVA, Luciano Gonçalves de Castro e. Aplicação do Método de Lee-Miller para a Projeção da Mortalidade no Brasil a partir das tábuas construídas pelo IBGE 1960-1970-1980-1991-2000-2010. *In*: [s.l.]: Associação Brasileira de Estudos Populacionais - ABEP, 2018a.

SILVA, Luciano Gonçalves de Castro e. O Risco de Longevidade na Previdência Social Brasileira: um Ensaio Simples sobre uma Temática Fundamental. *In*: Regimes Previdenciários e Situação Atuarial. Brasília: MF; SPREV, 2018b, v. 36, p. 432. (Coleção Previdência Social, Série Estudos).

SILVA, Luciano Gonçalves de Castro e. Estudo da Mortalidade dos Servidores Públicos Civis do Estado de São Paulo: Tábua de Mortalidade destinada aos Regimes Próprios de Previdência Social. Dissertação de Mestrado em Estudos Populacionais e Pesquisas Sociais, Escola Nacional de Ciências Estatísticas – ENCE/IBGE, Rio de Janeiro, 2008.

SILVA, Fabiana Lopes da Silva. Impacto do Risco de Longevidade em Planos de Previdência Complementar. Tese apresentada ao curso de Doutorado em Ciências Contábeis na Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo - USP, Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, 2010.

SILVA, Flávia Sommerlatte. Tendências e projeção da mortalidade do município de São Paulo – 1920 a 2100. Dissertação apresentada ao curso de mestrado em Demografia do Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional da Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do Título de mestre em Demografia, Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, Belo Horizonte, 2009.

SIMONOFF, Jeffrey S. *Smoothing Methods in Statistics*. Springer, 1996. (Springer Series in Statistics).

SITHOLE, Terry Z.; HABERMAN, Steven; VERRALL, Richard J. An investigation into parametric models for mortality projections, with applications to immediate annuitants' and life office pensioners' data. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 27, n. 3, p. 285–312, 2000.

SMITH, David P. *Formal Demography*. New York: Plenum Press, 1992.

Group Annuity Reserving Table. SOA, 1995. (Transactions of Society of Actuaries 1995 Vol. 47).

SOCIETY OF ACTUARIES - SOA. 1994 Group Annuity Mortality Table and 1994

SOCIETY OF ACTUARIES - SOA. The RP-2000 Mortality Tables. SOA, 2000.

SOCIETY OF ACTUARIES - SOA. Mortality Improvement Scale MP-2014 Report. SOA, 2014.

SOCIETY OF ACTUARIES - SOA. Mortality Improvement Scale MP-2015 Report. SOA, Retirement Plans Experience Committee, 2015.

SOCIETY OF ACTUARIES - SOA. Mortality Improvement Scale MP-2016 Report. SOA, Mortality Improvement, Subcommittee of the Retirement, Plans Experience Committee, 2016.

SPIEGEL, Murray R. Theory and Problems of Probability and Statistics. McGraw-Hill, 1998. (Schaum's Outline Series).

SRINIVASAN, K. Basic Demographic Techniques and Applications. New Delhi: Sage Publications, 1998.

STATISTICS DENMARK. Documentation of statistics for Population Projections for Denmark 2017. Statistics Denmark, 2017.

STATISTICS NEW ZEALAND. National Population Projections: 2011(base) –2061. New Zealand: SNZ, 2012.

STEFFENSON, J. F. Infantile mortality from an actuarial point of view. *Skandinavisk Aktuarietidskrijt*, p. 272–286, 1930.

STOELDRAIJER, Lenny; VAN DUIN, Coen; VAN WISSEN, Leo; *et al.* Impact of different mortality forecasting methods and explicit assumptions on projected future life expectancy: The case of the Netherlands. *Demographic Research*, v. 29, n. 13, p. 323–354, 2013.

TABEAU, Ewa. A review of demographic forecasting models for mortality. *In: Forecasting mortality in developed countries: insights from a statistical, demographic and epidemiological perspective.* Kluwer Academic Publishers: Ewa Tabeau, Anneke Van Den Berg Jeths and Christopher Heathcote, 2001, v. 9, p. 1–32. (European Studies of Population).

TABEAU, Ewa; EKAMPER, Peter; HUISMAN, Corina; *et al.* Predicting mortality from period cohort or cause-specific trends: a study of four European countries. *In: Forecasting mortality in developed countries: insights from a statistical, demographic and epidemiological perspective.*

Kluwer Academic Publishers: Ewa Tabeau, Anneke Van Den Berg Jeths and Christopher Heathcote, 2001, p. 159–187.

TABEAU, Ewa; WILLEKENS, Frans; VAN POPPEL, Frans. Parameterisation as a tool in analysing age, period and cohort effects on mortality: A case study of the Netherlands. *In: The Life Table, Modelling Survival and Death*. Kluwer Academic Publishers, the Netherlands 2002: G.Wunsch, M.Mouchart, J.Duchene (eds.), 2002, p. 141–170.

TESÁRKOVÁ, Klára Hulíková; KURTINOVÁ, Olga. *Lexis in Demography*. Springer, 2018. (SpringerBriefs in Population Studies).

TEUGELS, Jozef L.; SUNDT, Bjørn. *Encyclopedia of Actuarial Science, 3 Volume Set*. Jozef L. Teugels & Bjørn Sundt (eds.), 2004.

THATCHER, A. R.; KANNISTO, Väinö; VAUPEL, James W. The force of mortality at ages 80 to 120. Odense, Denmark: Odense University Press (1998), 1998. (Odense Monographs on Population Aging 5). Disponível em: <http://www.demogr.mpg.de/Papers/Books/Monograph5/start.htm>.

THIELE, T. N.; SPRAGUE, T. B. On a Mathematical Formula to express the Rate of Mortality throughout the whole of Life, tested by a Series of Observations made use of by the Danish Life Insurance Company of 1871. *Journal of the Institute of Actuaries and Assurance Magazine*, v. 16, n. 5, p. 313–329, 1871.

THOMOPOULOS, Nick T. *Statistical Distributions: Applications and Parameter Estimates*. Springer, 2017.

TRUSSELL, T. James. A Re-estimation of the Multiplying Factors for the Brass Technique for Determining Childhood Survivorship Rates. *Population Studies*, v. 29, n. 1, p. 97–107, 1975.

TULJAPURKAR, Shripad. Stochastic forecasts of mortality, population, and pension systems. *In: Perspectives on Mortality Forecasting - Vol. II: Probabilistic Models*. Swedish Social Insurance Agency, Stockholm 2005: N. Keilman ed., 2005, p. 65–77. (Vol. II: Probabilistic Models).

TULJAPURKAR, Shripad; BOE, Carl. Mortality Change and Forecasting: How Much and How Little Do We Know? *North American Actuarial Journal*, v. 2, n. 4, p. 13–47, 1998.

TULJAPURKAR, Shripad; LI, Nan; BOE, Carl. A universal pattern of mortality decline in the G7 countries. *Nature*, v. 405, n. 6788, p. 789–792, 2000.

TURNER, Heather; FIRTH, David. gnm: an R Package for Generalized Nonlinear Models.

UNITED NATIONS - UN. Manual II - Methods of Appraisal of Quality of Basic Data for Population Estimates. New York, 1955: Department of Economic and Social Affairs, 1955a. (Population Studies n° 23). Disponível em: <[http://www.un.org/esa/population/pubsarchive/migration\\_publications/UN\\_1955\\_Manual2.pdf](http://www.un.org/esa/population/pubsarchive/migration_publications/UN_1955_Manual2.pdf)>.

UNITED NATIONS - UN. Age and Sex Patterns of Mortality: Model Life Tables for Under-Developed Countries. New York: Dept. of Social Affairs, Population Branch, 1955b. (Population Studies, 22).

UNITED NATIONS - UN. Model Life Tables for Developing Countries. New York: Department of International Economic and Social Affairs, 1982. (Population Studies, 77).

UNITED NATIONS - UN. Manual X - Indirect techniques for demographic estimation. New York, 1983: Department of International Economic and Social Affairs, 1983. (Population Studies n° 81). Disponível em: <[http://www.un.org/en/development/desa/population/publications/pdf/mortality/Manual\\_X.pdf](http://www.un.org/en/development/desa/population/publications/pdf/mortality/Manual_X.pdf)>.

UNITED NATIONS - UN. World Population Prospects 2010: Extended Model Life Tables. Population Division, 2010.

UNITED NATIONS - UN. World Population Prospects 2017. Disponível em: <<https://esa.un.org/unpd/wpp/>>.

UNITED STATES CENSUS BUREAU. Methodology, Assumptions, and Inputs for the 2014 National Projections, 2014.

URDINOLA, B. Piedad; QUEIROZ, Bernardo Lanza. Latin American Human Mortality Database, 2017. Disponível em: <<http://www.lamortalidad.org>>. Acesso em: 15 dez. 2018.

VALLIN, Jacques; MESLÉ, France. Convergences and divergences in mortality: A new approach of health transition. Demographic Research, v. SPECIAL COLLECTION 2, n. 2, p. 11–44, 2004.

VAN GENUGTEN, Marianne; HOOGENVEEN, Rudolf; DE HOLLANDER, Augustinus. Incorporating risk factor epidemiology in mortality projections. *In*: Forecasting mortality in developed countries: insights from a statistical, demographic and epidemiological perspective.

Kluwer Academic Publishers: Ewa Tabeau, Anneke Van Den Berg Jeths and Christopher Heathcote, 2001, p. 189–204. (European Studies of Population, 9).

VILANOVA, Wilson. Matemática Atuarial. São Paulo: Livraria Pioneira Editora - Editora da Universidade Federal de São Paulo, 1969.

VILLEGAS, Andrés M.; MILLOSOVICH, Pietro; KAISHEV, Vladimir K. StMoMo: An R Package for Stochastic Mortality Modeling. *Journal of Statistical Software*, v. 84, n. 3, 2018.

WACHTER, Kenneth W. Between Zeus and the Salmon: Introduction. *In: Between Zeus and the Salmon: The Biodemography of Longevity*. NAP - National Academy Press, Washington, D.C. 1997: Kenneth W. Wachter and Caleb E. Finch (eds.), 1997, p. 1–16.

WACHTER, Kenneth W. *Essential Demographic Methods*. Massachusetts: Harvard University Press, 2014.

WADE, Alice H. Social Security Area Population Projections 1989. SSA - Social Security Administration, 1989. (Actuarial Study No 105).

WADE, Alice H. Social Security Area Population Projections 1991. SSA - Social Security Administration, 1992. (Actuarial Study No 106).

WALDRON, Hilary. Literature Review of Long-Term Mortality Projections. *Social Security Bulletin*, Vol. 66, No.1, 2005.

WANG, Chou-Wen; LIU, Yu-Ling. Comparisons of Mortality Modelling and Forecasting - Empirical Evidence from Taiwan. *International Research Journal of Finance and Economics*, n. 37, p. 47–55, 2010.

WANG, Jenny Zheng. Fitting and Forecasting Mortality for Sweden: Applying the Lee-Carter Model. *Mathematical Statistics Stockholm University*, 2007. (Report No 1), 1. ed. 2007.

WANG, S. S. A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks. *The Journal of Risk and Insurance*, v. 67, n. 2, p. 15–36, 2000.

WANG, Yuedong. *Smoothing Splines: Methods and Applications*. CRC Press, 2011. (Monographs on Statistics and Applied Probability 121).

WEEKS, John R. *Population: An Introduction to Concepts and Issues - 12th Ed*. Boston: Cengage Learning, 2015.

WEIBULL, Waloddi. A statistical theory of the strength of materials. *Ing. Vetenskaps Akad. Handl.*, p. 151, 1939.

- WEIBULL, Waloddi. A statistical theory of the strength of materials; A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics*, v. 18, p. 293–297, 1951.
- WEINSTEIN, Jay; PILLAI, Vijayan K. *Demography: The Science of Population - Second Ed.* Rowman & Littlefield, 2016.
- WILKIE, A. D.; WATERS, H. R.; YANG, S.; *et al.* Reserving, pricing and hedging for policies with guaranteed annuity options. *British Actuarial Journal*, v. 10, n. 1, p. 101–152, 2004.
- WILLETS, R. C. *Mortality Trends: An Analysis of Mortality Improvement in the UK.* [s.l.]: London: General & Cologne Re, 1999.
- WILLETS, R. C. The Cohort Effect: Insights and Explanations. *British Actuarial Journal*, v. 10, n. 4, p. 833–877, 2004.
- WILMOTH, John R. Computational methods for fitting and extrapolating the Lee-Carter model of mortality change (Technical Report). [s.l.]: Department of Demography, University of California, Berkeley, 1993.
- WILMOTH, John R. Mortality Projections for Japan: A Comparison of Four Methods. *In: Health and Mortality among Elderly Populations.* Oxford: Oxford University Press 1996: G. Caselli and A. Lopez (eds.), 1996, p. 266–287.
- WILMOTH, John R. The Future of Human Longevity: A Demographer's Perspective. *Science*, v. 280, n. 5362, p. 395–397, 1998.
- WILMOTH, John R. Demography of longevity: past, present, and future trends. *Experimental Gerontology*, v. 35, n. 9–10, p. 1111–1129, 2000.
- WILMOTH, John R. Increase of Human Longevity: Past, Present, and Future. *The Japanese Journal of Population*, v. 9, n. 1, 2011.
- WILMOTH, John R.; HORIUCHI, Shiro. Rectangulization Revisited: Variability of age at death within human populations. *Demography*, v. 36, n. 4, p. 475–495, 1999.
- WILMOTH, John R.; ZUREICK, Sarah; CANUDAS-ROMO, Vladimir; *et al.* A flexible two-dimensional mortality model for use in indirect estimation. *Population Studies*, v. 66, n. 1, p. 1–28, 2012.
- WILSON, Chris. On the Scale of Global Demographic Convergence 1950–2000. *Population and Development Review*, v. 27, n. 1, p. 155–171, 2001.

- WILSON, Chris. Understanding Global Demographic Convergence since 1950. *Population and Development Review*, v. 37, n. 2, p. 375–388, 2011.
- WILSON, Tom. Evaluation of simple methods for regional mortality forecasts. *Genus - Journal of Population Sciences*, v. 74, n. 14, 2018.
- WINKLEVOSS, Howard E. *Pension Mathematics with Numerical Illustrations*. 2. ed. [s.l.]: Pension Research Council - Wharton School of the University of Pennsylvania, 1993.
- WITTSTEIN, Theodor; BUMSTED, D. A. The Mathematical Law of Mortality. *Journal of the Institute of Actuaries and Assurance Magazine*, v. 24, n. 3, p. 153–173, 1883.
- WOLF, D. A. Another variation on the Lee-Carter model. *In: Annual meeting of Population Association of America*, Boston, 2004.
- WONG-FUPUY, Carlos; HABERMAN, Steven. Projecting Mortality Trends: Recent Developments in the United Kingdom and the United States. *North American Actuarial Journal*, v. 8, n. 2, p. 56–83, 2004.
- WOOD, Simon N. *Generalized Additive Models: An Introduction with R*, 2nd ed. CRC Press, 2017. (Texts in Statistical Science Series).
- WOOD, Simon N. Monotonic smoothing splines fitted by cross validation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 15, n. 5, p. 1126–1133, 1994.
- WOOD, Simon N. Thin plate regression splines. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Statistical Methodology)*, v. 65, n. 1, p. 95–114, 2003.
- WOODS, Carmel; DUSTAN, Kim. Forecasting mortality in New Zealand: A new approach for population projections using a coherent functional demographic model, 2014. (Statistics New Zealand Working Paper No 14–01).
- WUNSCH, Guillaume; MOUCHART, Michel; DUCHÊNE, Josianne. *The Life Table: Modeling Survival and Death*. Norwell, MA: Kluwer Academic Press, 2002.
- XU, Jiaquan; MURPHY, Sherry L.; KOCHANNEK, Kenneth D.; *et al.* Mortality in the United States, 2015. NCHS - National Center for Health Statistics, 2016. (Data Brief No. 267).
- YANG, Bowen; LI, Jackie; BALASOORIYA, Uditha. Cohort extensions of the Poisson common factor model for modelling both genders jointly. *Scandinavian Actuarial Journal*, v. 2016, n. 2, p. 93–112, 2016.

YANG, Sharon S.; YUE, Jack C.; HUANG, Hong-Chih. Modeling longevity risks using a principal component approach: A comparison with existing stochastic mortality models. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 46, n. 1, p. 254–270, 2010.

YASUNGNOEN, Natthasurang; SATTAYATHAM, Pairote. Forecasting Thai Mortality by Using the Lee-Carter Model. *Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance*, v. 10, n. 1, 2016.

YATCHEW, Adonis. *Semiparametric regression for the Applied Econometrician*. Cambridge University Press, 2003. (Themes in modern econometrics).

YUSUF, Farhat; MARTINS, Jo. M.; SWANSON, David A. *Methods of Demographic Analysis*. New York: Springer, 2014.

ZABA, Basia. The Four-Parameter Logit Life Table System. *Population Studies*, v. 33, n. 1, p. 79–100, 1979.

ZHAO, Bojuan Barbara. A modified Lee–Carter model for analysing short-base-period data. *Population Studies*, v. 66, n. 1, p. 39–52, 2012.